

Труды МАИ. 2023. № 132  
Trudy MAI, 2023, no. 132

Научная статья

УДК 531.38

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176845>

## **КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ**

**Александр Николаевич Темнов<sup>1</sup>, Ян Наинг У<sup>2</sup>**✉

<sup>1,2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
Москва, Россия

<sup>1</sup>[antt45@mail.ru](mailto:antt45@mail.ru)

<sup>2</sup>[yno64528@gmail.com](mailto:yno64528@gmail.com)✉

*Аннотация.* В данной работе рассмотрены свободные колебания идеальной стратифицированной несжимаемой жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде в предположении, что равновесное движение жидкости представляет собой вращение твердого тела. Получены собственные функции жидкости и собственные значения свободных колебаний стратифицированной жидкости, заполняющей цилиндрическую полость твердого тела, быстровращающегося вокруг своей вертикальной оси симметрии. При достаточно больших значениях угловой скорости движения твердого тела с жидкостью рассматриваемый случай эквивалентен случаю вращения в условиях полной невесомости. Представлены численные расчеты собственных значений нормальных колебаний жидкости при постоянной частоте плавучести в виде таблиц и графиков с граничными условиями для внутренних и поверхностных волн.

**Ключевые слова:** стратифицированная жидкость, свободные колебания, внутренние волны, поверхностные волны

**Для цитирования:** Темнов А.Н., Ян Наинг У. Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в поле центробежных сил инерции // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176845>

Original article

## **OSCILLATIONS OF A STRATIFIED ROTATING FLUID IN THE FIELD OF CENTRIFUGAL FORCES OF INERTIA**

**Alexander N. Temnov<sup>1</sup>, Yan Naing Oo<sup>2</sup>**✉

<sup>1,2</sup>Bauman Moscow State Technical University,  
Moscow, Russia

<sup>1</sup>[antt45@mail.ru](mailto:antt45@mail.ru)

<sup>2</sup>[yno64528@gmail.com](mailto:yno64528@gmail.com)✉

**Abstract.** In this paper, free oscillations of an ideal stratified incompressible fluid in a rotating cylindrical vessel are considered under the assumption that the equilibrium motion of the fluid is the rotation of a solid body. The problem of oscillations of an ideal incompressible rotating stratified fluid in the field of centrifugal inertia forces is studied. Rotating fluids are not only of scientific interest, but are also important in nature and technical applications. In technical applications, rotating liquids are found in centrifuges, in the hollow shafts of liquid-cooled turbines, in stabilization of rocket rotation, in zone-melting processes of single crystal growth. Recently, there has been interest in studying the oscillations of a stratified fluid filling a vessel of finite dimensions used in various fields. In

this paper, we focus our attention on the consideration of some issues related to the problems of oscillations in a stratified fluid. Some results obtained by us in the study of the problem of natural oscillations of an inhomogeneous rapidly rotating fluid that partially fills a cylindrical cavity and completely fills a coaxial cylindrical cavity of a solid body are presented. The eigenfunctions of a fluid and the eigenvalues of free oscillations of a stratified fluid filling a cylindrical cavity of a solid rapidly rotating around its vertical axis of symmetry are obtained. For sufficiently large values of the angular velocity of motion of a solid body with a liquid, the case under consideration is equivalent to the case of rotation in conditions of complete weightlessness. Numerical calculations of the eigenvalues of normal fluid oscillations at a constant buoyancy frequency are presented in the form of tables and graphs with boundary conditions for internal and surface waves.

**Keywords:** stratified fluid, free oscillations, internal waves, surface waves

**For citation:** Temnov A.N., Yan Naing Oo. Oscillations of a stratified rotating fluid in the field of centrifugal forces of inertia. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176845>

## Введение

Вращающиеся жидкости представляют не только научный интерес, но и важны в природе и технических приложениях. В техническом применении вращающиеся жидкости встречаются в центрифугах, в полых валах турбин с жидкостным охлаждением, при стабилизации вращения ракет, в зонно-плавильных процессах роста монокристаллов. В работах [1-5] рассмотрены собственные колебания жидкости со свободной поверхностью в цилиндрическом резервуаре, вращающемся

вокруг оси вращения, и реакция этой конфигурации на гармоническое возбуждение, перпендикулярное оси вращения. В статье [6] численно исследована периодическая осесимметричная реакция жидкостного кольца, заключенного во вращающийся цилиндр и подвергающегося периодическому осевому возбуждению в диапазоне собственных частот. Экспериментальные результаты по указанным выше работам о вращающихся жидкостях в резервуаре можно встретить в работе [7]. Общие теории о вращении твёрдого тела с полостями, содержащими жидкость, изложены в книгах [8,9]. Выведены некоторые результаты, полученные при исследовании задачи о собственных колебаниях неоднородной вращающейся жидкости, полностью или частично заполняющей цилиндрический топливный бак, вращающийся вокруг продольной оси [10,11]. Большинство упомянутых выше исследований относятся к однородной жидкости.

В последнее время появился интерес к исследованию колебаний стратифицированной жидкости, заполняющей сосуд конечных размеров, применяемых в различных областях. В настоящей работе сосредоточим наше внимание на рассмотрении некоторых вопросов, связанных с задачами колебаний в стратифицированной жидкости. Исследованы некоторые задачи о свободных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости в ограниченном или не ограниченном объеме в статьях [12-16]. В последнее время в работах [17-20] рассмотрены собственные колебания идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости и полости подвижного твёрдого тела, совершающего малые движения. Ранее авторами [21,22] были исследованы задачи о свободных колебаниях и

устойчивости идеальной стратифицированной вращающейся несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндрическую и эллипсоидальную полость.

В настоящей работе исследована задача о колебаниях идеальной несжимаемой вращающейся стратифицированной жидкости в поле центробежных сил инерции. Изложены некоторые результаты, полученные нами при исследовании задачи о собственных колебаниях неоднородной быстровращающейся жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость и полностью заполняющей коаксиальную цилиндрическую полость твердого тела.

### Постановка задачи

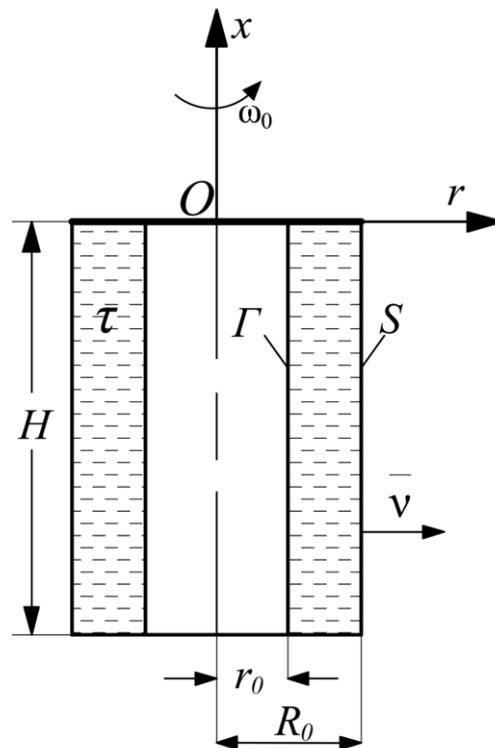
Рассмотрим твердое тело с цилиндрической полостью, заполненной идеальной стратифицированной жидкостью, вращающееся вокруг вертикальной оси симметрии полости  $Ox$  с угловой скоростью  $\omega_0$  (рис.1). Движение жидкости целесообразно исследовать относительно цилиндрической системы координат  $r, \eta, x$ . Начало отсчета поместим в точке пересечения оси симметрии полости с верхним основанием. Таким образом, жидкость находится под действием сил гравитационного и центробежного происхождения, векторы которых находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. Колебания вращающейся стратифицированной жидкости при малой угловой скорости вращения, т.е.  $\frac{\omega_0^2 l}{g} \ll 1$  изучены в работе [22].

В данной постановке будем предполагать, что при достаточно больших значениях угловой скорости  $\omega_0$  стационарного вращения жидкости, поле центробежных сил инерции значительно больше поля сил тяжести, т.е.  $\frac{\omega_0^2 l}{g} \gg 1$  ( $l$  – характерный

геометрический размер объема жидкости). Следовательно, потенциальную энергию на единицу масс жидкости равной  $\Pi_0 = \frac{\omega_0^2 r^2}{2}$ . В таком случае свободная поверхность  $\Gamma$  вращающейся жидкости в закрытом сосуде в отсутствии колебаний примет форму цилиндрической поверхности с внутренним радиусом  $r_0$ , а угловую скорость вращения, отвечающую этому положению, приближённо можно оценить формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10gH}{r_0}},$$

где  $H$  высота цилиндрического сосуда. Будем также считать, что в результате вращения в жидкости установилось некоторое распределение плотности  $\rho_0(r)$ , среднее значение которой обозначим  $\rho_0^*$ .



**Рис. 1.** Цилиндрический бак, заполненный несжимаемой стратифицированной жидкостью

Пусть в возмущенном движении жидкость приобретает поле скоростей, давлений и плотностей –  $\bar{V}$ ,  $p$ ,  $\rho$ . Считая  $\bar{V}$ ,  $p$ ,  $\rho$  – величинами первого порядка малости и используя двойное приближение Буссинеска [14], получаем следующие уравнения возмущенного движения вращающейся неоднородной жидкости:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{V} - \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad \text{в } \tau, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \bar{V} = 0 \quad \text{в } \tau. \quad (2)$$

При малом отклонении движения будем считать, что  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{V}'$ .  $\rho_0, \bar{V}_0$  – плотность и скорость жидкости при невозмущённом состоянии,  $\rho', \bar{V}'$  – отклонение плотности и скорости жидкости в возмущенном состоянии. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \cdot V_r = 0.$$

Далее не будем пользоваться штрихами. Пусть  $V_r = \frac{\partial w_r}{\partial t}$ , тогда получим

$$\rho = -w_r \rho_0(r_0) \frac{1}{r}.$$

Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат можно записать в виде

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad \text{в } \tau. \quad (3)$$

Уравнения возмущенного движения необходимо подчинить граничным условиям

$$\bar{V} \cdot \bar{v} = 0 \text{ на } S, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V_r \frac{\partial p_0(r)}{\partial r} = 0 \text{ на } \Gamma \quad (5)$$

$\bar{V}$  – внутренняя нормаль к смачиваемой поверхности  $S$ ;  $\tau$  – область, занимаемая жидкостью.

В проекции на оси цилиндрической системе координат уравнения малых движений (1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} &= 2\omega_0 V_\eta - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho}{\rho_0^*} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \\ \frac{\partial V_\eta}{\partial t} &= -2\omega_0 V_r - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть в невозмущенном движении жидкости закон изменения плотности имеет вид  $\rho_0(r) = \rho_0(r_0) \left(1 + \ln \frac{r}{r_0}\right)$ . Введем функцию  $N^2(r)$

$$N^2(r) = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \quad (7)$$

аналогичную квадрату частоты Вэйсяля – Брента в стратифицированной жидкости [23-25], или квадрату частоты плавучести [14].  $\rho_0^*$  – постоянное среднее значение плотности жидкости при использовании двойного приближения Буссинеска. Для рассматриваемого закона изменения плотности имеем

$$N^2 = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} = k\omega_0^2 \quad (8)$$

$k$  – постоянная, зависящая от соотношения плотностей жидкости.

Перепишем уравнения движения (6) с учетом (7) и (8) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_r}{\partial t} &= 2\omega_0 V_\eta - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial r} - w_r N_{rr}^2, \\ \frac{\partial V_\eta}{\partial t} &= -2\omega_0 V_r - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial x},\end{aligned}\quad (9)$$

После небольших преобразований уравнения (2), (3), (9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N_{rr}^2 \Delta_{\eta x} p + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Delta_{\eta x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

## 1. Свободные колебания вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде со свободной поверхностью

Определим собственные числа  $q = \frac{\omega}{2\omega_0}$  и собственные функции задачи о

нормальных колебаниях жидкости  $\varphi(r, \eta, x)$ , полагая  $p = \varphi e^{i\omega t}$ . Уравнение для определения собственных колебаний жидкости в возмущенном движении, отвечающее (10), запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1 - Fr^2 \cdot \chi^2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + [1 - \chi^2 (1 + Fr^2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (11)$$

а граничные условия (4) и (5) для быстровращающегося цилиндра со стратифицированной жидкостью будут

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - i \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\
r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left[ 4 \frac{1 - \chi^2 (1 + Fr^2)}{\chi^2} \varphi - i \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H.
\end{aligned} \tag{12}$$

где  $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$ ,  $\omega$  – частота нормальных колебаний,  $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$ .

Исследование свободных колебаний сводится к следующей задаче на собственные значения: найти те значения параметра  $\chi$ , при которых дифференциальное уравнение (11) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям (12). Тогда частота для любой данной моды определяется  $q = \frac{\omega}{2\omega_0}$ , а узловая структура моды описывается целыми числами  $m$  (количество  $\eta$ -узлов),  $l$  (количество  $x$ -узлов) и нулями функции  $R$  (радиальные узлы).

### (а) Внутренние волны

Полагая функцию  $\varphi(r, \eta, x_3) = R(r)H(\eta)Z(x_3)$  и используя метод разделения переменных, получаем следующие краевые задачи из (11) для случая  $\chi^2(1 + Fr^2) > 1$ :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d^2 H(\eta)}{d^2 \eta^2} + \frac{m^2}{1 - Fr^2 \cdot \chi^2} H(\eta) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{d^2 Z(x)}{d^2 x^2} + \frac{k^2}{\chi^2(1 + Fr^2) - 1} Z(x) = 0, \tag{15}$$

с граничными условиями,

$$\begin{aligned} r \frac{dR(r)}{dr} + m \chi_2 R(r) &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ r \frac{dR(r)}{dr} + (4\chi_3 + m\chi_2)R(r) &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{dZ(x)}{dx} &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H, \end{aligned} \quad (16)$$

здесь  $k, m$  – постоянные разделения уравнения (11). Обозначим

$$\chi_2 = \frac{\chi}{\sqrt{1 - Fr^2 \cdot \chi^2}}, \quad \chi_3 = \frac{1 - \chi^2(1 + Fr^2)}{\chi^2}. \quad (17)$$

В рассматриваемом частном случае решение задачи (11) и (12) имеет вид

$$\varphi_{mnl} = [AJ_m(\xi_{mn}\bar{r}) + BY_m(\xi_{mn}\bar{r})] H(\eta) \cos k_l x, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{r_0}, \quad k_l = \frac{l\pi}{H}; \quad \xi_{mn} = k_{mn}r_0; \quad k_{mn} = k_l \sqrt{\chi^2(1 + Fr^2) - 1}, \\ \chi &= \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{mn}^2}{\bar{k}_l^2(1 + Fr^2)}}; \quad \bar{k}_l = k_l \cdot r_0, \\ l &= 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots, \end{aligned}$$

здесь  $J_m(\xi_{mn}\bar{r})$  и  $Y_m(\xi_{mn}\bar{r})$  – функции Бесселя первого и второго родов  $m$ -го порядка.

Функция  $\varphi_{mnl}(r, \eta, x)$  из (18) удовлетворяла граничными условиями (12), то есть

$$\begin{aligned} A[\xi_{mn}c \cdot J'_m(\xi_{mn}c) + m\chi_2 J_m(\xi_{mn}c)] + \\ + B[\xi_{mn}c \cdot Y'_m(\xi_{mn}c) + m\chi_2 Y_m(\xi_{mn}c)] &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ A[\xi_{mn}J'_m(\xi_{mn}) + (4\chi_3 + m\chi_2)J_m(\xi_{mn})] + \\ + B[\xi_{mn}Y'_m(\xi_{mn}) + (4\chi_3 + m\chi_2)Y_m(\xi_{mn})] &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$J'_m(\xi_{mn}\bar{r}) = \frac{dJ_m(\xi_{mn}\bar{r})}{d(\xi_{mn}\bar{r})}, \quad Y'_m(\xi_{mn}\bar{r}) = \frac{dY_m(\xi_{mn}\bar{r})}{d(\xi_{mn}\bar{r})}, \quad c = \frac{R_0}{r_0},$$

здесь  $\xi_{mn}$  –  $n$ -ый корень характеристического уравнения (19). Условие существования нетривиальных решений системы двух однородных алгебраических уравнений (19), записанное в виде уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{mn}c \cdot J'_m(\xi_{mn}c) + m\chi_2 J_m(\xi_{mn}c) & \xi_{mn}c \cdot Y'_m(\xi_{mn}c) + m\chi_2 Y_m(\xi_{mn}c) \\ \xi_{mn}J'_m(\xi_{mn}) + (4\chi_3 + m\chi_2)J_m(\xi_{mn}) & \xi_{mn}Y'_m(\xi_{mn}) + (4\chi_3 + m\chi_2)Y_m(\xi_{mn}) \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m\chi_2 + m)J_m(\xi_{mn}c) - \xi_{mn}c \cdot J_{m+1}(\xi_{mn}c) & (m\chi_2 + m)Y_m(\xi_{mn}c) - \xi_{mn}c \cdot Y_{m+1}(\xi_{mn}c) \\ (4\chi_3 + m\chi_2 + m)J_m(\xi_{mn}) - \xi_{mn}J_{m+1}(\xi_{mn}) & (4\chi_3 + m\chi_2 + m)Y_m(\xi_{mn}) - \xi_{mn}Y_{m+1}(\xi_{mn}) \end{vmatrix} = 0$$

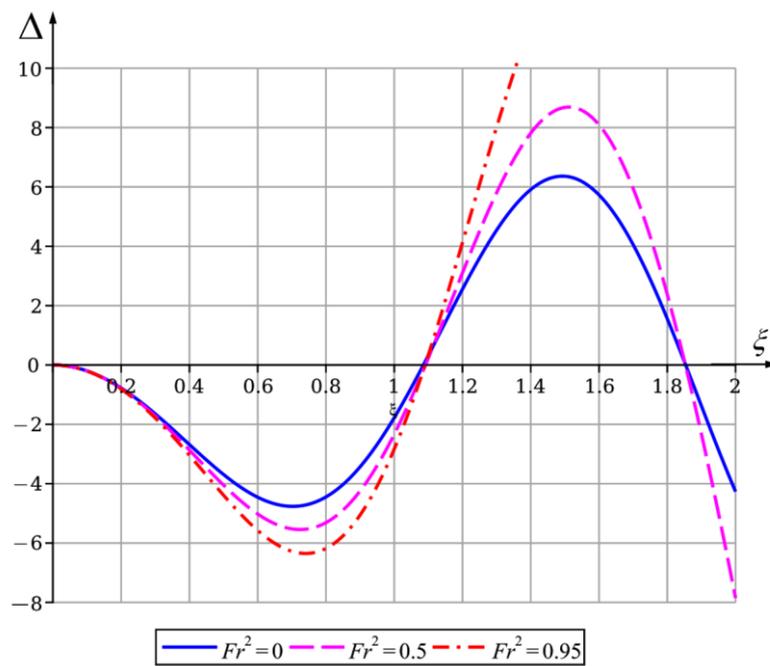
может служить одновременно уравнением для определения частотного спектра внутренних волн жидкости.

Собственное число при фиксированных значениях  $m, n, l, Fr^2$  для внутренних волн определяется формулой

$$q_{mnl}^{(вну.)} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2(1 + Fr^2)}{\bar{k}_l^2 + \xi_{mn}^2}}. \quad (21)$$

Одной из самых важных характеристик колебательного движения жидкости является спектр частот собственных колебаний, который в рассматриваемом случае определяется уравнениями (20) и (21). Эти уравнения для однородной жидкости ( $Fr^2 = 0$ ) были получены в работах [1,4]. Для однородной жидкости спектр внутренних волн в круглом цилиндре представляет собой всюду плотное множество на отрезке  $0,1$ .

Исследуем далее уравнение (20) для определения корней  $\xi_{mn}$  и собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$ . Графическое решение уравнения (20) для случая  $m=1, l=1, c=5$ , полученное с помощью пакета Maple при числах  $Fr^2 = 0, 0.5, 0.95$  и высоте жидкости  $H=2$  приведено на рис. 2, численные результаты  $\xi_{mn}$  для случаев  $m=-1, 0, 1; l=1, n=1$ , в таблице 1.



**Рис. 2.** Графическое решение уравнений (20) при  $m=1, l=1, H=2, c=5$ ,  
 $Fr^2 = 0, 0.5, 0.95$

**Таблица 1.** Значения корней  $\xi_{mn}$  при  $m = -1, 0, 1$ ;  $l = 1$ ,  $n = 1$ ,  $H = 2$ ,  $c = 3, 4, 5, 10$ ,  
 $Fr^2 = 0 \div 0.95$

$c$	$m$	$\xi_{mn}$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
3	-1	2.049379	2.050022	2.025286	1.930707	1.748174	1.603709
	0	1.993441	2.02844	2.056867	2.080336	2.099957	2.112641
	1	2.042061	2.085949	2.077204	1.900544	1.696403	1.579019
4	-1	1.413077	1.417773	1.418941	1.415782	1.406365	1.392858
	0	1.328064	1.350327	1.368507	1.383537	1.396110	1.404249
	1	1.388729	1.427390	1.457613	1.480194	1.488041	1.463574
5	-1	1.085454	1.088785	1.090908	1.091843	1.091539	1.090407
	0	0.986652	1.002618	1.015914	1.027073	1.036523	1.042694
	1	1.044343	1.076715	1.101977	1.122208	1.138862	1.149551
10	-1	0.516722	0.517056	0.517344	0.517591	0.517800	0.517931
	0	0.421637	0.426050	0.430112	0.433845	0.437265	0.439653
	1	0.442089	0.463858	0.481151	0.494605	0.505122	0.511552

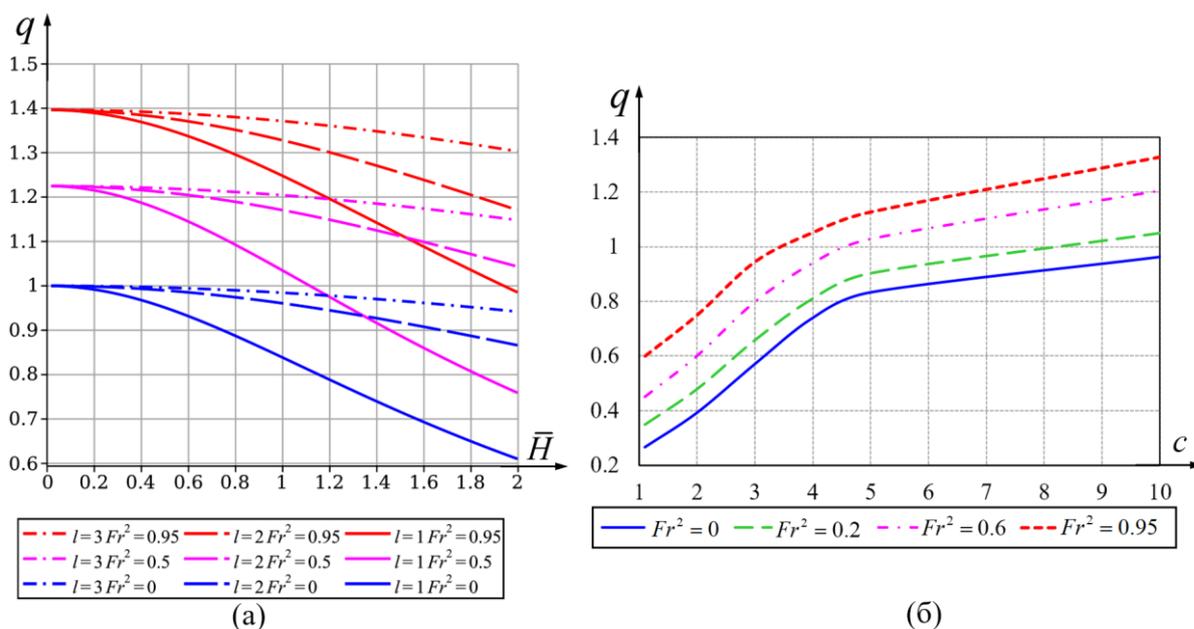
Отметим одно важное свойство, отличающее частотный спектр колебаний жидкости в поле инерционных сил от спектра частот жидкости в поле сил тяжести. Оно заключается в различном влиянии геометрических размеров объема жидкости на величины частот свободных колебаний. Действительно, для медленного вращения или вращения при малой угловой скорости величины собственных частот зависят

только от отношения глубины жидкости к радиусу цилиндра, т.е. от одного параметра [22]. В случае большой скорости вращения или в поле центробежных сил инерции корни уравнений (20) целиком и полностью определяются отношениями  $c = \frac{R_0}{r_0}$  и

$\bar{H} = \frac{H}{r_0}$ . Это значит, что существует двухпараметрическое множество объемов

однородной жидкости, которые обладают одним и тем же спектром частот. В рассматриваемой задаче корни уравнений (20) зависят не только от отношений  $c$  и  $\bar{H}$ , но и от стратификации числа  $Fr^2$ .

Далее рассмотрим зависимость значений собственных значений  $q_{mnl}^{(вну.)}$  внутренних волн от стратификации числа  $Fr^2$ , отношений радиусов  $c = \frac{R_0}{r_0}$  и высоты к радиусу полости  $\bar{H} = \frac{H}{r_0}$ . На рис.3 приведены зависимости величины собственного числа  $q_{mnl}^{(вну.)}$  от параметров  $\bar{H}$  и  $c$  для случая  $m=1, n=1$  при большой скорости вращения. В таблице 2 приведены численные результаты собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$  внутренних волн для случаев  $m=-1, 0, 1; n=1, l=1$  при различных числах ( $Fr^2 = 0 \div 0.95$ ).



**Рис. 3.** Зависимости величины собственного числа  $q_{mnl}^{(вну.)}$  внутренних волн

(а) от параметра  $\bar{H}$  при  $m=1, n=1, l=1,2,3; c=3, Fr^2=0,0.5,0.95$

(б) от параметра  $c$  при  $m=1, n=1, l=1, Fr^2=0,0.2,0.6,0.95$

**Таблица 2.** Собственные числа  $q_{mnl}^{(вну.)}$  внутренних волн при  $m=-1,0,1; l=1, n=1, H=2, c=3,4,5,10, Fr^2=0 \div 0.95$

$c$	$m$	$q_{mnl}^{(вну.)}$					
		$Fr^2=0$	$Fr^2=0.2$	$Fr^2=0.4$	$Fr^2=0.6$	$Fr^2=0.8$	$Fr^2=0.95$
3	-1	0.608335	0.666266	0.725150	0.798285	0.896702	0.977131
	0	0.618922	0.670706	0.718138	0.762217	0.803619	0.833201
	1	0.609705	0.658966	0.713673	0.805836	0.911538	0.984839
4	-1	0.743444	0.813193	0.878024	0.939586	0.999556	1.044824
	0	0.763643	0.830695	0.892130	0.949215	1.002803	1.041068
	1	0.749191	0.810719	0.867323	0.920582	0.973992	1.021675
5	-1	0.822687	0.900314	0.971835	1.038646	1.101751	1.147125

	0	0.846807	0.923379	0.993533	1.058688	1.119812	1.163432
	1	0.832748	0.903553	0.968627	1.029235	1.086195	1.126892
10	-1	0.949923	1.040523	1.123832	1.201371	1.274196	1.326193
	0	0.965811	1.057246	1.141208	1.219261	1.292497	1.344743
	1	0.962602	1.050595	1.131332	1.206514	1.277227	1.327787

Из таблицы 2 и рис. 3 видно, что наличие стратификации приводит к увеличению частот нормальных колебаний жидкости, чем больше значение числа  $Fr^2$  тем больше величина собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$ . С точки зрения размеров полости, из рис. 3 следует, что значения собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$  уменьшаются при увеличении значения параметра  $\bar{H}$  и увеличиваются при увеличении величины  $c$ .

### (б) Поверхностные волны

Теперь рассмотрим поверхностные волны. В этом случае будем считать уравнение (11) имеет  $\chi^2(1 + Fr^2) < 1$ . Следовательно, для поверхностных волн, краевые задачи (13) – (15) будут

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \left( \kappa^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 H(\eta)}{d^2 \eta^2} + \frac{m^2}{1 - Fr^2 \cdot \chi^2} H(\eta) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 Z(x)}{d^2 x^2} + \frac{\kappa^2}{1 - \chi^2(1 + Fr^2)} Z(x) = 0, \quad (24)$$

с граничными условиями (16)

Тогда собственные функции жидкости для поверхностных волн можно представить так:

$$\varphi_{ml} = [C I_m(\mu_m \bar{r}) + D K_m(\mu_m \bar{r})] H(\eta) \cos \kappa_l x, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{r_0}, \quad \kappa_l = \frac{l\pi}{H}, \quad \mu_m = \kappa_m r_0, \quad \kappa_{mn} = \kappa_l \sqrt{1 - \chi^2 (1 + Fr^2)}, \\ \chi &= \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2 - \mu_m^2}{\bar{\kappa}_l^2 (1 + Fr^2)}}, \quad \bar{\kappa}_l = \kappa_l \cdot r_0, \\ l &= 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots, \end{aligned}$$

здесь  $I_m(\mu_m \bar{r})$  и  $K_m(\mu_m \bar{r})$  – функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя)  $m$ -го порядка.

Функция  $\varphi_{ml}(r, \eta, x)$  из (25) удовлетворяла граничными условиями (12), то есть

$$\begin{aligned} C[\mu_m c I'_m(\mu_m c) + m\chi_2 I_m(\mu_m c)] + \\ + D[\mu_m c K'_m(\mu_m c) + m\chi_2 K_m(\mu_m c)] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ C[\mu_m I'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2) I_m(\mu_m)] + \\ + D[\mu_m K'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2) K_m(\mu_m)] = 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$I'_m(\mu_m \bar{r}) = \frac{dI_m(\mu_m \bar{r})}{d(\mu_m \bar{r})}, \quad K'_m(\mu_m \bar{r}) = \frac{dK_m(\mu_m \bar{r})}{d(\mu_m \bar{r})}, \quad c = \frac{R_0}{r_0},$$

здесь  $\mu_m$  – корень характеристического уравнения (26). Условие существования нетривиальных решений системы двух однородных алгебраических уравнений (26), записанное в виде уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_m c I'_m(\mu_m c) + m\chi_2 I_m(\mu_m c) & \mu_m c K'_m(\mu_m c) + m\chi_2 K_m(\mu_m c) \\ \mu_m I'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2) I_m(\mu_m) & \mu_m K'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2) K_m(\mu_m) \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

или

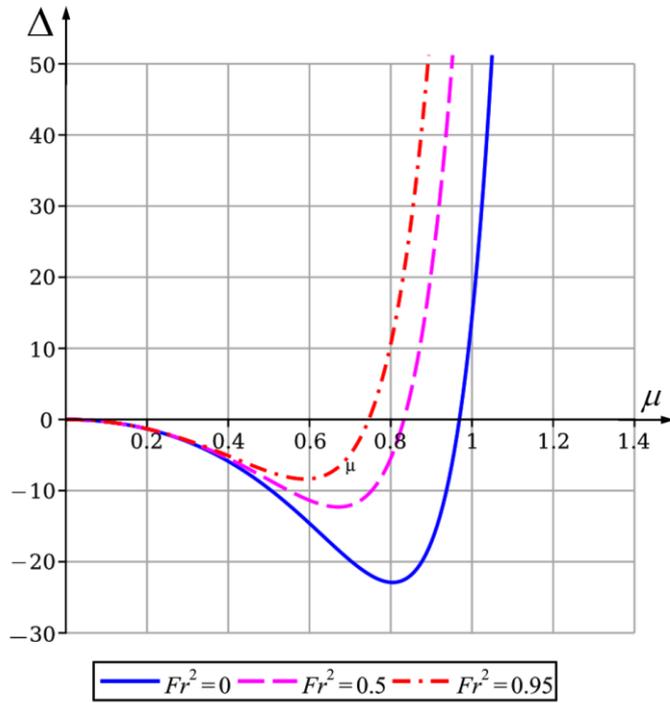
$$\Delta = \begin{vmatrix} (m \chi_2 + m)I_m(\mu_m c) + \mu_m c \cdot I_{m+1}(\mu_m c) & (m \chi_2 + m)K_m(\mu_m c) - \mu_m c \cdot K_{m+1}(\mu_m c) \\ (4\chi_3 + m \chi_2 + m)I_m(\mu_m) + \mu_m I_{m+1}(\mu_m) & (4\chi_3 + m \chi_2 + m)K_m(\mu_m) - \mu_m K_{m+1}(\mu_m) \end{vmatrix} = 0$$

может служить одновременно уравнением для определения частотного спектра поверхностных волн жидкости.

Собственное число при фиксированных значениях  $m, l, Fr^2$  для поверхностных волн,

$$q_{ml}^{(нов.)} = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2 + \bar{\kappa}_l^2 Fr^2}{\bar{\kappa}_l^2 - \mu_m^2}}. \quad (28)$$

Определяем корни  $\mu_m$  характеристического уравнения (27) и спектр частот собственных колебаний  $q_{ml}^{(нов.)}$  уравнения (28) для поверхностных волн. Эти уравнения для однородной жидкости ( $Fr^2 = 0$ ) были исследованы в работах [1,4]. В работе [22] представлены численные результаты для поверхностных волн при медленном вращении в случае частичного заполнения жидкости. Графическое решение уравнения (27) для случая  $m = -1, l = 1, c = 5$ , полученное с помощью пакета Maple при числах  $Fr^2 = 0, 0.5, 0.95$  и высоте жидкости  $H = 2$  приведено на рис. 4, численные результаты  $\mu_m$  для случаев  $m = -1, 0, 1; l = 1$  в таблице 3.



**Рис. 4.** Графическое решение уравнений (27) при  $m = -1$ ,  $l = 1$ ,  $H = 2$ ,  $c = 5$ ,

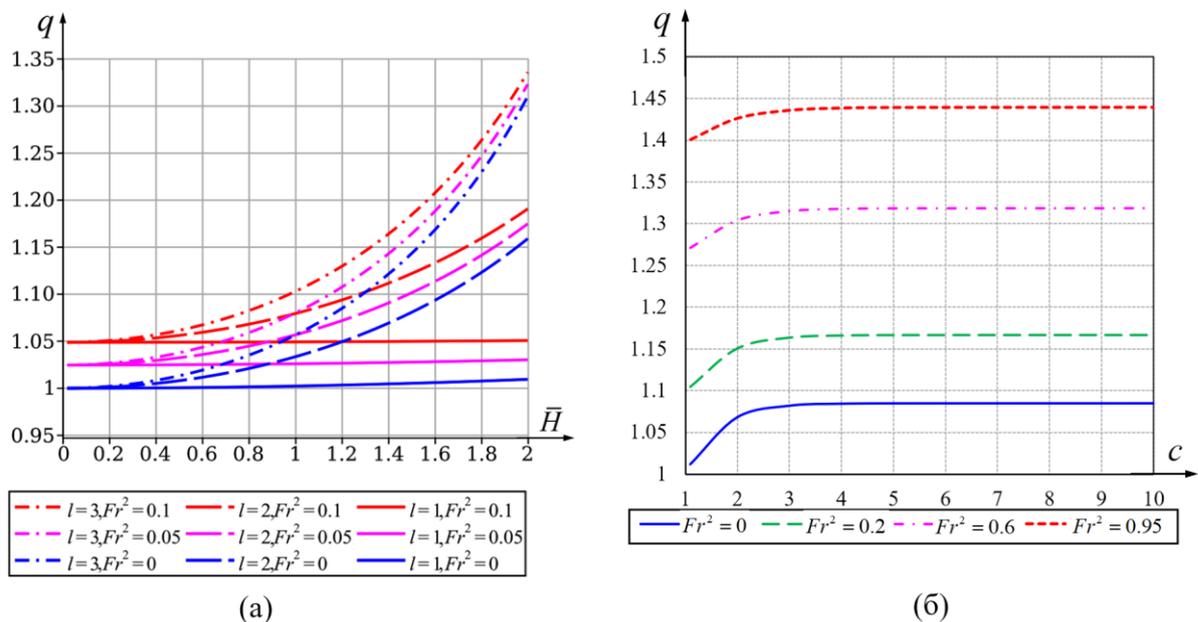
$$Fr^2 = 0, 0.5, 0.95$$

**Таблица 3.** Значения корней  $\mu_m$  при  $m = -1, 0, 1$ ;  $l = 1$ ,  $n = 1$ ,  $H = 2$ ,  $c = 3, 4, 5, 10$ ,  $Fr^2 = 0 \div 0.95$

$c$	$m$	$\mu_m$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
3	-1	0.959758	0.895626	0.840771	0.793218	0.751514	0.723411
	0	0.688818	0.595807	0.513057	0.436862	0.363942	0.309226
	1	0.600132	0.529984	0.474159	0.428763	0.391152	0.366965
4	-1	0.968214	0.906494	0.854077	0.808937	0.769594	0.743215
	0	0.735099	0.659474	0.596333	0.542413	0.495443	0.463782
	1	0.607893	0.539000	0.484179	0.439540	0.402524	0.378645
5	-1	0.969103	0.907754	0.855748	0.811049	0.772165	0.746140

	0	0.743018	0.671203	0.612359	0.563117	0.521142	0.493414
	1	0.609142	0.540664	0.486222	0.441960	0.405273	0.381627
10	-1	0.969226	0.907951	0.856039	0.811452	0.772698	0.746778
	0	0.745057	0.674710	0.617749	0.570764	0.531365	0.505753
	1	0.609380	0.541025	0.486747	0.442651	0.406140	0.382632

На рис.5 приведены зависимости величины собственного числа  $q_{ml}^{(нов.)}$  поверхностных волн от параметров  $\bar{H}$  и  $c$  для случая  $m=1$  при большой скорости вращения. В таблице 4 приведены численные результаты собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$  поверхностных волн для случаев  $m=-1,0,1; l=1$  при различных числах ( $Fr^2 = 0 \div 0.95$ ).



**Рис. 5.** Зависимости величины собственного числа  $q_{ml}^{(нов.)}$  поверхностных волн

(а) от параметра  $\bar{H}$  при  $m=1, l=1,2,3, c=5, Fr^2 = 0,0.05,0.1,$

(б) от параметра  $c$  при  $m=1, l=1, Fr^2 = 0,0.2,0.6,0.95$

**Таблица 4.** Собственные числа  $q_{ml}^{(нов.)}$  поверхностных волн при  $m = -1, 0, 1$ ;  $l = 1$ ,  $n = 1$ ,  $H = 2$ ,  $c = 3, 4, 5, 10$ ,  $Fr^2 = 0 \div 0.95$

$c$	$m$	$q_{ml}^{(нов.)}$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
3	-1	1.263216	1.333430	1.400765	1.465490	1.527844	1.573187
	0	1.112612	1.183916	1.251875	1.316864	1.379169	1.424295
	1	1.082088	1.163681	1.241111	1.314841	1.385278	1.436165
4	-1	1.269929	1.341341	1.409824	1.475633	1.539008	1.585072
	0	1.131555	1.206968	1.278965	1.347818	1.413807	1.461583
	1	1.084503	1.166254	1.243776	1.317544	1.387987	1.438853
5	-1	1.270644	1.342273	1.410984	1.477027	1.540637	1.586878
	0	1.135007	1.211629	1.284872	1.354972	1.422193	1.470873
	1	1.084896	1.166736	1.244329	1.318162	1.388656	1.439555
10	-1	1.270743	1.342419	1.411186	1.477294	1.540976	1.587274
	0	1.135907	1.213049	1.286912	1.357712	1.425690	1.474967
	1	1.084972	1.166841	1.244471	1.318339	1.388868	1.439794

Из таблицы 4 и рис. 5 видно, что наличие стратификации приводит к увеличению частот нормальных колебаний жидкости, чем больше значение числа  $Fr^2$  тем больше величина собственных чисел  $q_{ml}^{(нов.)}$ . С точки зрения размеров



3	1	0.200000	0.489897	0.663324	0.800000	0.916515	0.994987
	2	0.364109	0.576694	0.729777	0.855906	0.965699	1.040469
	3	0.499657	0.670564	0.806012	0.921768	1.024527	1.095289
4	1	0.203203	0.491214	0.664297	0.800806	0.917219	0.995636
	2	0.365420	0.577522	0.730432	0.856465	0.966194	1.040929
	3	0.499938	0.670774	0.806187	0.921921	1.024665	1.095417
5	1	0.204634	0.491808	0.664737	0.801171	0.917538	0.995929
	2	0.365777	0.577748	0.730611	0.856616	0.966330	1.041054
	3	0.499984	0.670808	0.806216	0.921945	1.024687	1.095438
10	1	0.206497	0.492586	0.665313	0.801648	0.917955	0.996313
	2	0.366010	0.577895	0.730728	0.856716	0.966417	1.041136
	3	0.499999	0.670820	0.806225	0.921954	1.024695	1.095445

## 2. Свободные колебания вращающейся стратифицированной жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде при отсутствии свободной поверхности

Для сравнения рассмотрим колебательное движение жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним радиусом  $R_0$ . Тогда граничные уравнения (12) преобразуются к более простому виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \text{при } r = R_0, \quad r = r_0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \text{при } x_3 = 0, \quad x_3 = -H,$$
(31)

и в этом состоянии поверхностные волны становятся невозможными.

### (а) Внутренние волны

В данном случае трансцендентное уравнение по граничным уравнениям (31) и частотное уравнение для внутренних волн предоставляются так:

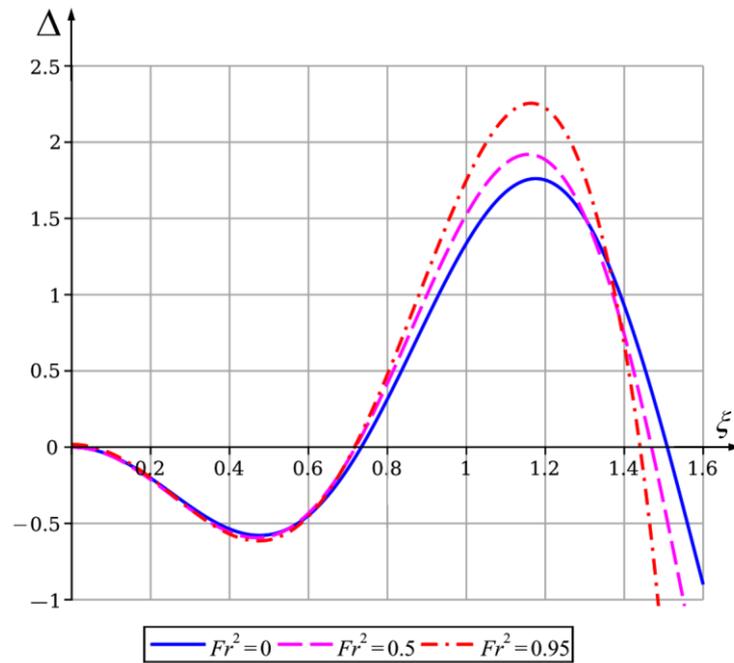
$$\begin{aligned}
 & A[\xi_{mn} c \cdot J'_m(\xi_{mn} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{mn} c)] + \\
 & \quad + B[\xi_{mn} c \cdot Y'_m(\xi_{mn} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mn} c)] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \\
 & A[\xi_{mn} J'_m(\xi_{mn}) + m \chi_2 J_m(\xi_{mn})] + \\
 & \quad + B[\xi_{mn} Y'_m(\xi_{mn}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mn})] = 0, \quad \text{при } r = r_0,
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{mn} c \cdot J'_m(\xi_{mn} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{mn} c) & \xi_{mn} c \cdot Y'_m(\xi_{mn} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mn} c) \\ \xi_{mn} J'_m(\xi_{mn}) + m \chi_2 J_m(\xi_{mn}) & \xi_{mn} Y'_m(\xi_{mn}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mn}) \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m \chi_2 + m) J_m(\xi_{mn} c) - \xi_{mn} c \cdot J_{m+1}(\xi_{mn} c) & (m \chi_2 + m) Y_m(\xi_{mn} c) - \xi_{mn} c \cdot Y_{m+1}(\xi_{mn} c) \\ (m \chi_2 + m) J_m(\xi_{mn}) - \xi_{mn} J_{m+1}(\xi_{mn}) & (m \chi_2 + m) Y_m(\xi_{mn}) - \xi_{mn} Y_{m+1}(\xi_{mn}) \end{vmatrix} = 0$$

Определяем корни  $\xi_{mn}$  и собственные значения  $q_{mnl}^{(вн.)}$  для рассматриваемого случая при отсутствии свободной поверхности. Графическое решение уравнения (33) для случая  $m=1, l=1, c=5$ , полученное с помощью пакета Maple при числах  $Fr^2 = 0, 0.5, 0.95$  и высоте жидкости  $H = 2$  приведено на рис. 6, численные результаты  $\xi_{mn}$  для случаев  $m = -1, 0, 1; l = 1, n = 1$  в таблице 6.



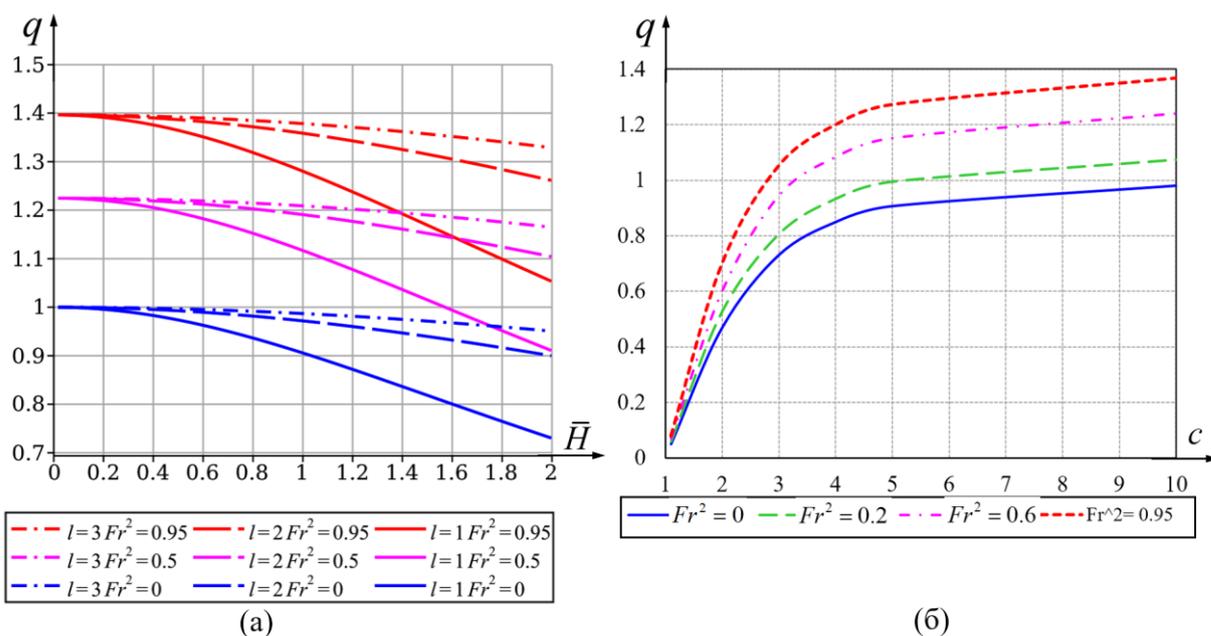
**Рис. 6.** Графическое решение уравнений (33) при  $m = 1, l = 1, H = 2, c = 5,$   
 $Fr^2 = 0, 0.5, 0.95$

**Таблица 6.** Значения корней  $\xi_{mn}$  при  $m = -1, 0, 1; l = 1, n = 1, H = 2, c = 3, 4, 5, 10,$   
 $Fr^2 = 0 \div 0.95$

$c$	$m$	$\xi_{mn}$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
3	-1	1.895637	1.903638	1.909860	1.888687	1.746711	1.602367
	0	1.635616	1.635616	1.635616	1.635616	1.635616	1.635616
	1	1.470404	1.448821	1.425669	1.402034	1.380139	1.367881
4	-1	1.338010	1.339689	1.341179	1.342129	1.341667	1.339080
	0	1.111877	1.111877	1.111877	1.111877	1.111877	1.111877
	1	0.979349	0.969482	0.959509	0.949539	0.939695	0.932455
5	-1	1.046417	1.046719	1.046934	1.047013	1.046886	1.046586

	0	0.847150	0.847150	0.847150	0.847150	0.847150	0.847150
	1	0.733783	0.727905	0.722091	0.716369	0.710765	0.706654
10	-1	0.513711	0.513593	0.513471	0.513442	0.513209	0.513105
	0	0.394094	0.394094	0.394094	0.394094	0.394094	0.394094
	1	0.323293	0.321805	0.320359	0.318955	0.317592	0.316596

Представлены зависимости величины собственного числа  $q_{mnl}^{(вну.)}$  от параметров  $\bar{N}$  и  $c$  для случая  $m=1, n=1$  в коаксиальном цилиндрическом сосуде при большой скорости вращения (рис. 7). В таблице 7 приведены численные результаты собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$  внутренних волн для случаев  $m=-1, 0, 1$  при различных числах ( $Fr^2 = 0 \div 0.95$ ). Из таблицы 7 и рис. 7 следует, что наличие стратификации приводит к увеличению частот нормальных колебаний жидкости. Из рис. 7 следует, что значения собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$  уменьшаются при увеличении значения параметры  $\bar{N}$  и увеличиваются при увеличении величины  $c$ .



**Рис. 7.** Зависимости величины собственного числа  $q_{mnl}^{(вну.)}$  внутренних волн

(а) от параметры  $\bar{H}$  при  $m=1, n=1, l=1,2,3; c=3, Fr^2=0,0.5,0.95$

(б) от параметры  $c$  при  $m=1, n=1, l=1, Fr^2=0,0.2,0.6,0.95$

**Таблица 7.** Собственные числа  $q_{mnl}^{(вну.)}$  внутренних волн при  $m=-1,0,1; l=1, n=1, H=2, c=3,4,5,10, Fr^2=0 \div 0.95$

$c$	$m$	$q_{mnl}^{(вну.)}$					
		$Fr^2=0$	$Fr^2=0.2$	$Fr^2=0.4$	$Fr^2=0.6$	$Fr^2=0.8$	$Fr^2=0.95$
3	-1	0.638048	0.697200	0.751600	0.808831	0.897117	0.977548
	0	0.692670	0.758782	0.819578	0.876166	0.929315	0.967262
	1	0.730051	0.805229	0.876154	0.943682	1.007876	1.053095
4	-1	0.761261	0.833479	0.899839	0.961681	1.020166	1.062686
	0	0.816213	0.894116	0.965756	1.032437	1.095065	1.139780
	1	0.848580	0.932192	1.009737	1.082500	1.151346	1.200791

5	-1	0.832241	0.911593	0.984571	1.052527	1.116415	1.162104
	0	0.880158	0.964164	1.041417	1.113322	1.180856	1.229074
	1	0.906018	0.993915	1.075064	1.150878	1.222331	1.273491
10	-1	0.950462	1.041203	1.124653	1.202312	1.275300	1.327400
	0	0.969939	1.062515	1.147648	1.226887	1.301310	1.354447
	1	0.979470	1.073156	1.159350	1.239614	1.315031	1.368897

Из проведенных численных результатов таблиц 2 и 7 видно, что значения собственных чисел  $q_{mnl}^{(вну.)}$  для всех типов внутренних волн ( $m = -1, 0, 1$ ) в коаксиальном цилиндрическом сосуде больше, чем значения собственных чисел колебаний в случае со свободной поверхностью.

### (в) Двумерные колебания

Двумерные волны в коаксиальном цилиндрическом сосуде при  $l = 0$  решаются по формуле (29) с граничными условиями на боковой и внутренней стенках, т.е. по первому уравнению граничного условия (31), получаем уравнение на собственные значения

$$[\chi^2(1 + Fr^2) - 1](c^m - c^{-m}) = 0 \quad (34)$$

Определяем численные результаты собственных чисел  $q_{ml} = \frac{1}{\chi}$  двумерных волн при различных числах ( $Fr^2 = 0 \div 0.95$ ) для случаев  $m = 1, 2, 3$  по уравнению (34).  
Здесь нашёл, что полученные численные результаты неизменны зависимости от

отношения радиусов  $c$  и  $m$ . Из таблицы 8 видно, что полученные результаты собственных чисел для двумерных волн близкие к результатам для трёхмерных внутренних волн при  $m = 1$  большими величинами отношений  $c$  (Таблица 7).

**Таблица 8.** Собственные числа  $q_{ml}$  двумерных волн при  $H = 2$ ,  $Fr^2 = 0 \div 0.95$

$c$	$m$	$q_{ml}$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
1.1, 1.2,	1, 2,	1	1.095445	1.183216	1.264911	1.341641	1.396424
...	...						

### Заключение

Проведённое исследование колебаний быстровращающейся стратифицированной жидкости показало, что спектр собственных чисел колебаний состоит из двух множеств действительных чисел: двухиндексного  $q_{ml}$ , и трёхиндексного  $q_{mnl}$  множеств. Собственные числа с тремя индексами расположены на интервале  $\sqrt{1 + Fr^2} \leq q_{mnl}^{(nog.)} \leq \infty$ , им отвечают поверхностные волны, затухающие в радиальном направлении, собственные числа с тремя индексами расположены на отрезке  $Fr^2 \leq q_{mnl}^{(вну.)} \leq \sqrt{1 + Fr^2}$ , им отвечают внутренние волны. Полученные собственные числа внутренних волн при большой скорости вращения в обычном цилиндрическом сосуде со свободной поверхностью и в коаксиальном цилиндрическом сосуде с отсутствием свободной поверхности мало отличаются, если одинаковы величины стратификации и высоты жидкости цилиндра. Дискретному

подмножеству  $q_{m0}, l = 0, m = 1, 2, 3, \dots$  отвечают плоские двумерные волны в угловом направлении, удовлетворяющие неравенству  $Fr^2 \leq q_{m0} \leq \sqrt{1 + Fr^2}$ .

### Список источников

1. Miles J.W., Troesch B.A. Surface oscillations of a rotating liquid // Journal of Applied Mechanics, 1961, vol. 28 (4), pp. 491-496. DOI: [10.1115/1.3641773](https://doi.org/10.1115/1.3641773)
2. Miles J.W. Free surface oscillations in a rotating liquid // Journal of Fluid Mechanics, 1964, vol. 18, issue 2, pp. 187-194. DOI: [10.1017/S0022112064000143](https://doi.org/10.1017/S0022112064000143)
3. Rao V.S. Surface waves in a rotating liquid // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1969, vol. 65, issue 1, pp. 309-318. DOI: [10.1017/S0305004100044261](https://doi.org/10.1017/S0305004100044261)
4. Гонткевич В.С. Собственные колебания вращающейся жидкости в сосудах // Гидромеханика: Республиканский межвузовский сборник. 1972. № 20. С. 52–58.
5. Рвалов Р.В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 4. С. 81-88.
6. Ehmann M., Seikmann J. Numerical Study of the oscillations of axially excited liquid annuli with rotational symmetry enclosed in revolving circular cylindrical containers // Journal of Fluid Mechanics, 1995, vol. 297, pp. 215-230.
7. Мсewan A.D. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder // Journal of Fluid Mechanics, 1970, vol. 40, part 3, pp. 603-640. DOI: [10.1017/S0022112070000344](https://doi.org/10.1017/S0022112070000344)
8. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. - 230 с.

9. Greenspan H.P. The theory of rotating fluids, London, Cambridge university press, 1968, 327 p.
10. Габов С.А. О спектре и базисах из собственных функций одной задачи, связанной с колебаниями вращающейся жидкости // Математический сборник. 1981. Т. 116 (158). № 2 (10). С. 245-252.
11. Орлов В.В., Темнов А.Н. Нормальные колебания жидкости, вытекающей из вращающегося бака // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 8. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mech/mlgp/1907.html>
12. Копачевский Н.Д. О свободных колебаниях жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде в условиях невесомости // Механика жидкости и газа. 1972. № 4. С. 3-9.
13. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Свободные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. № 1. С. 109-123.
14. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МВТУ, 1983, 192 с.
15. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103–130.
16. Цветков Д.О. Нормальные колебания идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругой льдом // Таврический вестник информатики и математики. 2017. № 3. С. 79-93.

17. Габов С.А. Свешников А.Г. О некоторых задачах, связанных с колебаниями стратифицированных жидкостей // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1150-1156.
18. Перова Л.В. О колебаниях стратифицированной вращающейся жидкости при возбуждении ее свободной поверхности движущимися источниками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 5. С. 903-922.
19. Темнов А.Н., Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твердого тела // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/291.html>
20. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55633>
21. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Вращение вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью наполненной неоднородной жидкостью // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=171387>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-06](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-06)
22. Ян Наинг У. Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2023. № 130. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=174605>. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)
23. Краусс В. Внутренние волны. Методы и результаты теоретической океанографии. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1968. - 270 с.
24. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. - 288 с.

25. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. - М.: Наука, 1990. - 341 с.
26. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=84412>
27. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159785>. DOI: [34759/trd-2021-119-08](https://doi.org/10.26907/2542-0405.2021.119.08)
28. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53486>

## References

1. Miles J.W., Troesch B.A. Surface oscillations of a rotating liquid, *Journal of Applied Mechanics*, 1961, vol. 28 (4), pp. 491-496. DOI: [10.1115/1.3641773](https://doi.org/10.1115/1.3641773)
2. Miles J.W. Free surface oscillations in a rotating liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, vol. 18, issue 2, pp. 187-194. DOI: [10.1017/S0022112064000143](https://doi.org/10.1017/S0022112064000143)
3. Rao V.S. Surface waves in a rotating liquid, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1969, vol. 65, issue 1, pp. 309-318. DOI: [10.1017/S0305004100044261](https://doi.org/10.1017/S0305004100044261)

4. Gontkevich V.S. *Gidromekhanika: Respublikanskii mezhvuzovskii sbornik*. 1972, no. 20, pp. 52–58.
5. Rvalov R.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 1973, no. 4, pp. 81-88.
6. Ehmman M., Seikmann J. Numerical Study of the oscillations of axially excited liquid annuli with rotational symmetry enclosed in revolving circular cylindrical containers, *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, vol. 297, pp. 215-230.
7. Mcewan A.D. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, vol. 40, part 3, pp. 603-640. DOI: [10.1017/S0022112070000344](https://doi.org/10.1017/S0022112070000344)
8. Chernous'ko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu zhidkost'* (Motion of a rigid body with cavities containing a viscous fluid), Moscow, Vychislitel'nyi tsentr AN SSSR, 1968, 230 p.
9. Greenspan H.P. *The theory of rotating fluids*, London, Cambridge university press, 1968, 327 p.
10. Gabov S.A. *Matematicheskii sbornik*. 1981, vol. 116 (158), no. 2 (10), pp. 245-252.
11. Orlov V.V., Temnov A.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*. 2019, no. 8. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mech/mlgp/1907.html>
12. Kopachevskii N.D. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. 1972, no. 4, pp. 3-9.
13. Kopachevskii N.D., Temnov A.N. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 1984, vol. 24, no. 1, pp. 109-123.
14. Temnov A.N. *Kolebaniya stratifitsirovannoi zhidkosti v ogranichennom ob'eme* (Oscillations of a stratified fluid in a limited volume), Doctor's thesis, Moscow, MVTU, 1983, 192 p.

15. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya*. 2008, vol. 29, pp. 103–130.
16. Tsvetkov D.O. *Tavrisheskii vestnik informatiki i matematiki*. 2017, no. 3, pp. 79-93.
17. Gabov S.A. Sveshnikov A.G. *Differentsial'nye uravneniya*. 1982, vol. 18, no. 7, pp. 1150-1156.
18. Perova L.V. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 2007, vol. 47, no. 5, pp. 903-922.
19. Temnov A.N., Ai Min Vin. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*. 2012, no. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/291.html>
20. Ai Min Vin, Temnov A.N. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55633>
21. Temnov A.N., Yan Naing U. *Trudy MAI*. 2023, no. 128. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171387>. DOI: [10.34759/trd-2023-128-06](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-06)
22. Yan Naing U. *Trudy MAI*. 2023, no. 130. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=174605>. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)
23. Krauss V. *Vnutrennie volny. Metody i rezul'taty teoreticheskoi okeanografii* (Internal waves. Methods and results of theoretical oceanography), Leningrad, Gidrometeoizdat, 1968, 270 p.
24. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkosti* (Problems of dynamics of stratified fluids), Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1986, 288 p.
25. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Lineinye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennikh voln* (Problems of dynamics of stratified fluids), Moscow, Nauka, 1990, 341 p.

26. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI*. 2017, no. 95. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>
27. Pak Songi, Grigor'ev V.G. *Trudy MAI*. 2021, no. 119. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785>. DOI: [34759/trd-2021-119-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08)
28. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*. 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53486>

Статья поступила в редакцию 15.08.2023

Одобрена после рецензирования 22.08.2023

Принята к публикации 27.10.2023

The article was submitted on 15.08.2023; approved after reviewing on 22.08.2023; accepted for publication on 27.10.2023