



Научная статья

УДК 534.1: 629.7: 519.6

URL: <https://trudymai.ru/publications.php?ID=188264>

EDN: <https://www.elibrary.ru/ZBUZNA>

ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОРИСТОЙ ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

М.С. Егорова  , О.В. Тушавина 

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

г. Москва, Россия

 egorovams@mai.ru

Цитирование: Егорова М.С., Тушавина О.В. Обобщенная динамическая модель пористой градиентной среды и классификация волновых процессов// Труды МАИ: электрон. журнал. № 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188264>

Аннотация. В работе представлена обобщенная динамическая модель пористой градиентной среды, построенная на основе вариационного подхода. На основе вариационного принципа сформулирован лагранжиан, включающий кинетическую и потенциальную энергии. Получены уравнения движения и уравнение пористости, содержащие одиннадцать физических постоянных. Семь из них описывают статические свойства (классические и градиентные модули упругости, параметры пористости и их взаимодействие), четыре – инерционные характеристики матрицы и пор, а также динамическое взаимодействие.,

Установлены асимптотические зависимости частоты от волнового числа в длинноволновой и коротковолновой областях, выявлены условия существования волн и диапазоны «запираания» (непрозрачности) среды. Показано, что в общем случае среда демонстрирует сложное дисперсионное поведение с чередованием зон прозрачности и непрозрачности, что имеет принципиальное значение для прогнозирования поведения пористых материалов при динамических нагрузках.

Ключевые слова: пористая среда; градиентная теория упругости; динамическая модель; волны пористости; дисперсия волн; уравнения движения, вариационный принцип; классификация волновых процессов; эффект «запирания»; микроструктура.

Финансирование: работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (FSFF-2025-0001)

DYNAMIC MODEL OF A POROUS GRADIENT MEDIUM AND CLASSIFICATION OF WAVE PROCESSES

M.S. Egorova  , O.V. Tushavina 

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

 egorovams@mai.ru

Citation: Egorova M.S., Tushavina O.V. Dynamic model of a porous gradient medium and classification of wave processes// Trudy MAI. 2026. No. 148. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188264>

Abstract. This paper presents a generalized dynamic model of a porous gradient medium, constructed using a variational approach. A Lagrangian incorporating kinetic and potential energies is formulated using the variational principle. Equations of motion and a porosity equation are derived, containing eleven physical constants. Seven of these describe static properties (classical and gradient elastic moduli, porosity parameters, and their interactions), while four describe the inertial characteristics of the matrix and pores, as well as dynamic interactions.

Asymptotic dependences of frequency on wavenumber in the long- and short-wavelength regions are established, and the conditions for wave existence and the ranges of "locking" (opacity) of the medium are identified. It is shown that, in general, the medium exhibits complex dispersion behavior with alternating zones of transparency and opacity, which is fundamental for predicting the behavior of porous materials under dynamic loads.

Keywords: porous medium; gradient theory of elasticity; dynamic model; porosity waves; wave dispersion; equations of motion; variational principle; classification of wave processes; "locking" effect; microstructure.

Введение

Необходимость использования обобщённых теорий упругости связана с наличием микроструктуры у материалов [1-9, 15]. Различные неоднородности, такие как поры, зёрна, включения, трещины в естественных материалах, формируют подобные микроструктуры. В искусственно созданных материалах (метаматериалах) микроструктура может проектироваться и создаваться целенаправленно. В результате, из-за наличия микроструктуры, напряжённо-деформированное состояние в телах может отличаться от предсказанного в классической теории упругости. В классической теории упругости нет масштабных параметров, но с масштабными параметрами связаны многие методы расчёта длительной прочности, масштабные эффекты могут оказывать сильное влияние на уровень концентрации напряжений. При рассмотрении материалов на микро- и наноуровне зачастую нельзя целиком игнорировать наличие микроструктуры, так характерные размеры неоднородностей уже могут быть сравнимы с размерами рассматриваемого тела.

Исследование динамических процессов в пористых средах является фундаментальной задачей механики сплошных сред, имеющей широкий спектр приложений. Классические модели упругости часто оказываются недостаточными для описания сложного поведения таких сред, поскольку не учитывают эффекты, связанные с микроструктурой, такие как вращение частиц, масштабные эффекты и, что наиболее важно для данного исследования, наличие и эволюция порового пространства.

Классическая теория упругости, описывающая поведение идеально однородных сплошных сред, оказывается недостаточной для адекватного моделирования пористых материалов. Ее применение не позволяет учесть ряд важнейших эффектов, обусловленных наличием микроструктуры: дисперсию волн (зависимость скорости распространения от частоты), масштабные эффекты (зависимость эффективных свойств от размера образца или длины волны), а

также существование дополнительных типов волн, связанных с эволюцией порового пространства. Экспериментальные наблюдения неоднократно фиксировали отклонения от классической теории, что стимулировало развитие более сложных моделей, способных описать эти явления.

Существующие подходы к моделированию пористых сред можно разделить на модели с «алгебраической» пористостью, где изменение объема пор связано только с деформацией, и более сложные градиентные теории, учитывающие нелокальное взаимодействие. К числу последних относятся модели, развитые в работах Миндлина [10] и Тупина [12], которые вводят в рассмотрение градиенты деформаций или дополнительные кинематические переменные. Однако общая динамическая картина, учитывающая одновременное влияние различных механизмов взаимодействия между полем деформаций матрицы и полем пористости, а также их инерционные свойства, до сих пор остается предметом активных исследований [11].

Настоящая работа посвящена построению и анализу обобщенной динамической модели пористой градиентной среды. На основе вариационного подхода формулируется лагранжиан, включающий кинетическую и потенциальную энергию, что позволяет получить уравнения движения и уравнение пористости, содержащие одиннадцать физических постоянных. Основной целью является классификация типов динамического взаимодействия и исследование законов дисперсии продольных волн для различных частных случаев модели, что позволяет выявить критерии существования волн, условия «запирания» и асимптотическое поведение дисперсионных кривых в длинноволновой и коротковолновой областях.

Математическая постановка задачи

Рассмотрим пористую среду, состояние которой описывается полем вектор перемещений R_i упругой матрицы и скалярным полем пористости, характеризующим изменение объема пор. Будем считать, что среда является градиентной, т.е. ее потенциальная энергия зависит не только от деформаций и пористости, но и от их градиентов.

Лагранжиан L , работа внешних сил A , потенциальная энергия U и плотность потенциальной энергии U_v пористой градиентной среды:

$$L = A - U$$

$$A = \int_V P_i^V R_i dV + \int_F P_i^F R_i dF$$

$$U_v = \frac{1}{2} [2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + (K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) + (C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k})]$$

При решении динамических задач следует учесть кинетическую энергию:

$$K = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\rho \dot{R}_i \dot{R}_i + \rho_{\theta\theta} \dot{\theta} \dot{\theta} + 2\rho_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + \rho_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} \dot{\varphi}) dV dt$$

Полная система уравнений содержит одиннадцать физических постоянных. В дальнейшем ограничимся случаем отсутствия внешних объемных сил.

Уравнения движения приобретут вид:

$$\mu \Delta R_i + (\mu + \lambda) \theta_{,i} + K^{12} \varphi_{,i} - C^{11} \Delta \theta_{,i} - C^{12} \Delta \varphi_{,i} - (\rho \ddot{R}_i + \rho_{\theta\theta} \ddot{\theta}_{,i} + \rho_{\theta\varphi} \ddot{\varphi}_{,i}) + P_i^V = 0 \quad (1)$$

Уравнение пористости приобретет вид:

$$K^{12} \theta + K^{22} \varphi - C^{12} \Delta \theta - C^{22} \Delta \varphi + \rho_{\theta\varphi} \ddot{\theta} + \rho_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} = 0 \quad (2)$$

Семь физических постоянных $\mu; K^{11}; K^{12}; K^{22}; C^{11}; C^{12}; C^{22}$ отражают свойства стационарных состояний пористой среды:

- классические упругие $\mu; K^{11}$ и градиентные C^{11} свойства непрерывной среды;
- «алгебраические» K^{22} и градиентные C^{22} свойства пористой среды;
- константы взаимодействия непрерывной и пористой среды в «алгебраической» K^{12} и градиентной C^{12} частях потенциальной энергии.

Кроме свойств, проявляющихся в стационарных состояниях, имеется четыре физические постоянные, отражающие инерционные свойства непрерывной матрицы $\rho; \rho_{\theta\theta}$, пористой среды $\rho_{\varphi\varphi}$ и константы динамического взаимодействия непрерывной матрицы и пористой среды $\rho_{\theta\varphi}$.

Далее будем рассматривать случай, когда внешние объёмные силы равны нулю.

Классификация динамических взаимодействий

Динамическое взаимодействие между полем совместного и несовместного изменения объёма осуществляется по трем различным каналам: в кинетической энергии, благодаря наличию билинейного слагаемого $\rho_{\theta\phi}\dot{\theta}\dot{\phi}$ с константой взаимодействия $\rho_{\theta\phi}$; в «алгебраической» части потенциальной энергии, благодаря наличию билинейного слагаемого $K^{12}\theta\phi$ с константой взаимодействия K^{12} и, наконец, в градиентной части потенциальной энергии, благодаря наличию билинейного слагаемого $C^{12}\theta_{,k}\phi_{,k}$ с константой взаимодействия C^{12} .

В отсутствие всех трех констант взаимодействия, поле пористости в соответствии с (2) определяется уравнением:

$$K^{22}\phi - C^{22}\Delta\phi + \rho_{\phi\phi}\ddot{\phi} = 0 \quad (3)$$

Из (3) вытекает факт существования волн пористости с характерной скоростью распространения:

$$c_{\phi} = \sqrt{\frac{C^{22}}{\rho_{\phi\phi}}} \quad (4)$$

Следует обратить внимание, что физические параметры $C^{22}; \rho_{\phi\phi}$ отличаются по размерности от классических параметров $(2\mu + \lambda); \rho$ на размерность квадрата длины, но их отношение, как и отношение классических параметров, дает квадрат характерной скорости.

Кроме того, из (3) вытекает, что невозмущенные волны пористости имеют дисперсию:

$$\omega = c_{\phi}k\sqrt{1 + \frac{K^{22}}{C^{22}k^2}} \quad (5)$$

Таким образом, (4) определяет невозмущенную скорость волны пористости, а соотношение (5) определяет характерный размер пор d :

$$d = \sqrt{\frac{C^{22}}{K^{22}}}$$

Общая модель включает три независимых канала связи между полем объемной деформации и полем пористости:

- кинетический;

- «алгебраический» потенциальный;
- градиентный потенциальный.

Классическая теория упругости

Пусть все неклассические модули равны нулю. Уравнение пористости отсутствует, а уравнения движения имеют классический вид:

$$\mu \Delta R_i + (\mu + \lambda) \theta_{,i} - \rho \ddot{R}_i = 0$$

Будем искать решение в виде плоской волны:

$$R_i = R_i^0 e^{ik_r x_r + i\omega t} \quad k^2 = k_r k_r$$

Получим закон дисперсии для поперечных акустических волн:

$$\omega = \pm k \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \text{ – скорость поперечных акустических волн.}$$

$$c_L = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \text{ – скорость продольных акустических волн.}$$

Обратим внимание на то, что во всех моделях градиентной пористой среды скорость поперечных волн одна и та же, в то время как скорость продольных волн будет меняться от модели к модели.

Частные модели

Если из трех констант взаимодействия хотя бы две не равны нулю, появляются ещё три частные модели

Случай, когда $\rho_{\theta\theta} = 0; C^{12} = 0$.

Решая (1) и (2) относительно круговой частоты, получим:

$$\begin{aligned} & (\rho_{\varphi\varphi} \rho + \rho_{\varphi\varphi} \rho_{\theta\theta} k^2) \omega^4 + \\ & - [\rho K^{22} + (\rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi} (2\mu + \lambda) + \rho_{\theta\theta} K^{22}) k^2 + (\rho_{\theta\theta} C^{22} + \rho_{\varphi\varphi} C^{11}) k^4] \omega^2 + \\ & + ((2\mu + \lambda) K^{22} - K^{12} K^{12}) k^2 + (C^{11} K^{22} + C^{22} (2\mu + \lambda)) k^4 + C^{11} C^{22} k^6 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\omega_1^2; \omega_2^2$ - положительные корни биквадратного уравнения (6). Эти корни являются функциями квадрата волнового числа k^2 . В зависимости от величины k^2

, можно определить два характерных диапазона волновых чисел: длинноволновое при $k^2 \ll d^{-2}$ и коротковолновое при $k^2 \gg d^{-2}$.

Длинноволновое приближение дает:

$$\omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}$$

Коротковолновое приближение дает:

$$\omega^4 - \left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}\right)k^2\omega^2 + \frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}}\frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}k^4 = 0$$

Вышеуказанные соотношения позволяют утверждать, что в коротковолновом пределе волны объёмного сжатия и пористости не возмущают друг друга и не имеют дисперсии.

С учетом того, что коротковолновое приближение существует, можно утверждать, что

на интервале $0 \leq (kd)^2 \leq (k_1d)^2$ корни уравнения (6) существуют,

на интервале $(k_1d)^2 < (kd)^2 < (k_2d)^2$ имеет место запираание

на интервале $(k_2d)^2 \leq (kd)^2 \leq (k_3d)^2$ решение корни уравнения (6) существуют

на интервале $(k_3d)^2 < (kd)^2 < (k_4d)^2$ имеет место запираание,

на интервале $(k_4d)^2 < (kd)^2 < \infty$ корни уравнения (6) существуют с соответствующей асимптотикой на бесконечности.

Случай, когда $\rho_{\theta\varphi} = 0; K^{12} = 0$.

Решая (1) и (2)) относительно круговой частоты, получим:

$$\begin{aligned} &(-\rho_{\varphi\varphi}\rho + \rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}k^2)\omega^4 - \\ &+[\rho K^{22} + (-\rho_{\theta\theta}K^{22} + \rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda))k^2 + (\rho_{\varphi\varphi}C^{11} - \rho_{\theta\theta}C^{22})k^4]\omega^2 - \\ & - [(2\mu + \lambda)K^{22}k^2 + (C^{11}K^{22} + (2\mu + \lambda)C^{22})k^4 + (C^{11}C^{22} - C^{12}C^{12})k^6] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Длинноволновое приближение дает:

$$\omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}$$

Коротковолновое приближение дает:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k^2}{2} \left[-\left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} - \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}\right)^2 - 4\frac{C^{12}C^{12}}{\rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}}} \right]$$

В отличие от первого случая даже асимптотически волны сжатия и пористости не разделяются, и комбинированная волна может иметь только одну скорость распространения:

$$\lim_{kd \rightarrow \infty} \omega^2 = k^2 \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right)^2 - 4 \frac{C^{12} C^{12}}{\rho_{\varphi\varphi} \rho_{\theta\theta}}} - \left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} - \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right) \right] \quad (8)$$

Следует отметить, что в асимптотическом приближении (8) комбинированная волна не имеет дисперсии. В общем случае дискриминант биквадратного уравнения (7), является полиномом четвертой степени по k^2 и должен иметь неотрицательное значение. Корни этого полинома определяют интервалы, на которых решение (7) существует, а на которых – нет. Эти интервалы определяются четырьмя положительными корнями полинома четвертой степени $k_1^2 < k_2^2 < k_3^2 < k_4^2$, определяющего дискриминант.

Случай, когда $K^{12} = 0; C^{12} = 0$.

Решая (1) и (2) относительно круговой частоты, получим:

$$\begin{aligned} &[(\rho_{\theta\theta} \rho_{\varphi\varphi} - \rho_{\theta\varphi} \rho_{\theta\varphi})k^2 - \rho_{\varphi\varphi} \rho] \omega^4 - \\ &+ [\rho K^{22} + (-\rho_{\theta\theta} K^{22} + \rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi} (2\mu + \lambda))k^2 + (\rho_{\varphi\varphi} C^{11} - \rho_{\theta\theta} C^{22})k^4] \omega^2 + \\ &+ [-(2\mu + \lambda) K^{22} k^2 - (C^{11} K^{22} + (2\mu + \lambda) C^{22})k^4 - C^{11} C^{22} k^6] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Длинноволновое приближение дает:

$$\omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}$$

Коротковолновое приближение дает:

$$\omega_{1,2}^2 = k^2 \frac{-(\rho_{\varphi\varphi} C^{11} - \rho_{\theta\theta} C^{22}) \pm \sqrt{(\rho_{\varphi\varphi} C^{11} + \rho_{\theta\theta} C^{22})^2 - 4 \rho_{\theta\varphi} \rho_{\theta\varphi} C^{11} C^{22}}}{2(\rho_{\theta\theta} \rho_{\varphi\varphi} - \rho_{\theta\varphi} \rho_{\theta\varphi})}$$

Следует отметить, что в асимптотическом приближении комбинированная волна не имеет дисперсии. В общем случае дискриминант биквадратного уравнения (9), является полиномом четвертой степени по k^2 и должен иметь неотрицательное значение.

С учетом того, что коротковолновое приближение существует, можно утверждать:

на интервале $0 \leq (kd)^2 \leq (k_1 d)^2$ корни уравнения (9) существуют,

на интервале $(k_1d)^2 < (kd)^2 < (k_2d)^2$ имеет место запираание,

на интервале $(k_2d)^2 \leq (kd)^2 \leq (k_3d)^2$ корни уравнения (9) существуют,

на интервале $(k_3d)^2 < (kd)^2 < (k_4d)^2$ имеет место запираание

на интервале $(k_4d)^2 < (kd)^2 < \infty$ по-прежнему корни уравнения (9) существуют с соответствующей асимптотикой на бесконечности.

Заключение

В результате проведенного исследования была построена обобщенная динамическая модель пористой градиентной среды, учитывающая не только упругие свойства матрицы, но и инерционные свойства пор, а также нелокальные эффекты за счет включения градиентных слагаемых в энергию. На основе вариационного принципа получена замкнутая система уравнений, содержащая одиннадцать физических постоянных, что позволяет описать широкий спектр волновых явлений.

Показано, что даже в отсутствие всех констант взаимодействия среда поддерживает распространение волн пористости. Эти волны обладают дисперсией, а их характерная скорость и масштаб определяются внутренними параметрами микроструктуры.

При наличии двух и более ненулевых констант связи наблюдается сложное взаимодействие волн сжатия и пористости, приводящее к появлению двух ветвей дисперсии.

Обнаружен эффект запираания, при котором для определенных диапазонов волновых чисел k распространение волн становится невозможным. Границы этих диапазонов определяются корнями дискриминанта дисперсионных уравнений.

Разработанная модель и полученные на её основе закономерности могут найти широкое практическое применение в следующих областях. При проектировании звукопоглощающих и вибродемпфирующих конструкций из пористых материалов (теплозащитных покрытий, сотовых панелей, металлопористых композитов). Эффект запираания позволяет создавать акустические фильтры и виброизоляторы, подавляющие волны в заданных

частотных диапазонах, что особенно важно для снижения шума в кабинах летательных аппаратов и защиты чувствительной аппаратуры от вибраций.

В фундаментальных исследованиях механики сплошной среды — полученные классификации типов динамического взаимодействия и условия существования волн могут быть использованы при построении более сложных нелинейных и термомеханических моделей пористых градиентных сред, а также при разработке численных методов решения краевых задач. Таким образом, предложенная модель не только даёт непротиворечивое описание волновой динамики пористых градиентных сред, но и предоставляет инженерный инструментарий для прогнозирования, диагностики и оптимизации материалов с управляемой пористостью.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
3. Bendsøe M. P., Sigmund O. Topology Optimization: theory, methods and applications. Berlin: Springer, 2003. 370 p.
4. Ташкинов М.А., Шалимов А.С. Моделирование влияния микромасштабных морфологических параметров на деформационное поведение пористых материалов с металлической матрицей // Физическая мезомеханика. 2021. № 5. С. 130–137. DOI 10.24412/1683-805X-2021-5-130-137.
5. Нгуен Н.Х., Тарлаковский Д.В. Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости // Труды МАИ: электрон. журнал. 2012. № 53. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=29269>.

6. Лурье С.А., Шрамко К.К. Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости // Труды МАИ: электрон. журнал. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161414>. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02.
7. Dilatation gradient elasticity theory // European Journal of Mechanics-A/Solids / S.A. Lurie et al. 2021. Vol. 88. P. 104258. DOI 10.1016/j.euromechsol.2021.104258
8. Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 4. С. 5–12. DOI 10.24411/1683-805X-2018-14001.
9. Лурье С.А., Белов П.А. Моделирование диссипативных термомеханических процессов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2025. № 5. С. 56–68. DOI 10.15593/perm.mech/2025.5.05.
10. Cowin S.C., Nunziato, J.W. Linear elastic materials with voids // Journal of
11. Lurie S., Belov P. Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations // International Journal of Fracture. 2008. Vol. 150 (1–2), P. 181–194.
12. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of continuous media with conserved dislocations // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 7468–
13. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of defects in continuous media // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, iss. 1. P. 91–111.
14. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
15. Gorman D.J. Free vibration analysis of rectangular plates with symmetrically distributed point supports along the edges // Journal of Sound and Vibration. 1980. Vol. 73, no. 4. P. 563–574. DOI 10.1016/0022-460X(80)90668-9.
16. Leissa A. W. The free vibration of rectangular plates // Journal of Sound and Vibration. 1973. Vol. 31, no. 3. P. 257–293.
17. Gibson L.J., Ashby M.F. Cellular solids: structure and properties. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 510 p.

References

1. Bolotin V.V. *Dinamicheskaya ustoichivost' uprugikh sistem* [Dynamic Stability of Elastic Systems], Moscow, Gostekhizdat, 1956. 600 p.
2. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* [Applied methods in the theory of oscillations], Moscow, Nauka, 1988, 328 p.
3. Bendsøe M. P., Sigmund O. *Topology Optimization: theory, methods and applications*, Berlin, Springer, 2003, 370 p.
4. Tashkinov M.A., Shalimov A.S. Modeling the influence of microscale morphological parameters on the deformation behavior of porous materials with a metal matrix. *Physical Mesomechanics*, 2021, no. 5. pp. 130–137. DOI 10.24412/1683-805X-2021-5-130-137.
5. Nguyen N.H., Tarlakovsky D.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2012, no. 53. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=29269>.
6. Lurie S. A., Shramko K. K. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2021, no. 120. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161414>. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02.
7. Lurie S.A. et al. Theory of elasticity with a dilatation gradient. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, vol. 88, pp. 104258. DOI 10.1016/j.euromechsol.2021.104258.
8. Vasilyev V.V., Lurie S.A., Salov V.A. Study of the strength of cracks in plates based on the maximum stress criterion in the scale-dependent generalized theory of elasticity. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, no. 4, pp. 5–12. DOI 10.24411/1683-805X-2018-14001.
9. Lurie S.A., Belov P.A. Modeling of dissipative thermomechanical processes. *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2025, no. 5, pp. 56–68. DOI 10.15593/perm.mech/2025.5.05.
10. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, 1983, vol. 13, pp.125. DOI 10.1007/BF00041230.
11. Lurie S., Belov P. Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations. *International Journal of Fracture*, 2008, vol. 150 (1–2), pp. 181–194.

12. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of continuum media with persistent dislocations. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, pp. 7468–7485.
13. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of continuum media defects. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, no. 1, pp. 91–111.
14. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in engineering]. Moscow, Nauka, 1967, 444 p.
15. Gorman D.J. Analysis of free oscillations of rectangular plates with symmetrically distributed point supports at the edges. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, vol. 73, no. 4, pp. 563–574. DOI 10.1016/0022-460X(80)90668-9.
16. Leissa A.V. Free oscillations of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, vol. 31, no. 3, pp. 257–293.
17. Gibson L.J., Ashby M.F. *Cellular bodies: structure and properties*, 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1997, 510 p.

Информация об авторах

Мария Сергеевна Егорова, аспирант кафедры 610 «Управление эксплуатацией ракетно-космических систем», МАИ, г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5937-3028>; ID РИНЦ: 1231273; e-mail: egorovams@mai.ru

Ольга Валериановна Тушавина, к.т.н., доцент, заведующий кафедры 610 «Управление эксплуатацией ракетно-космических систем», МАИ, г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-0608-542X>; ID РИНЦ: 1016923; e-mail: tushavinaov@mai.ru

Information about the authors

Maria S. Egorova, Postgraduate Student of Department 610 "Management of Rocket and Space Systems Operation", Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5937-3028>; ID РИНЦ: 1231273; e-mail: egorovams@mai.ru

Olga V. Tushavina, PhD, Associate Professor, Head of Department 610 "Management of Rocket and Space Systems Operation", Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-0608-542X>; ID РИНЦ: 1016923; e-mail: tushavinaov@mai.ru

Получено 24 апреля 2026 ● Принято к публикации 19 мая 2026 ● Опубликовано 25 июня 2026
Received 24 April 2026 ● Accepted 19 May 2026 ● Published 25 June 2026
