

Труды МАИ. 2023. № 133
Trudy MAI, 2023, no. 133

Научная статья

УДК 531.38

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177658>

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ КРИОГЕННУЮ ЖИДКОСТЬ

Александр Николаевич Темнов¹, Ян Наинг У²✉

^{1,2}Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

¹antt45@mail.ru

²yno64528@gmail.com✉

Аннотация. В статье рассмотрена устойчивость стационарного вращения твёрдого тела, имеющего цилиндрическую полость, полностью заполненную несжимаемой криогенной жидкостью. Устойчивость стационарного вращения тела со стратифицированной жидкостью изучается на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых определяются из решения краевых задач гидродинамики, не зависящих от времени. Отличительной особенностью всех криогенных жидкостей является неоднородное изменение плотности и температуры, наблюдаемое во всех режимах хранения и эксплуатации. Наиболее значительное расслоение криогенного компонента происходит в направлении действия внешнего поля массовых сил. Для исследования движений такой механической системы подходящей моделью является стратифицированная

несжимаемая жидкость. Получены характеристические уравнения краевой задачи и движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью, стационарно вращающейся вокруг своей оси. Построены области устойчивости свободного вращения тела со стратифицированной жидкостью в безразмерных параметрах.

Ключевые слова: устойчивость вращения, криогенная жидкость, стратифицированная жидкость, свободные колебания

Для цитирования: Темнов А.Н., Ян Наинг У. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей криогенную жидкость // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177658>

Original article

ON THE STABILITY OF STATIONARY ROTATION OF A SOLID BODY WITH A CAVITY CONTAINING A CRYOGENIC LIQUID

Alexander N. Temnov¹, Yan Naing Oo²

^{1,2}Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

¹antt45@mail.ru

²yno64528@gmail.com

Abstract. The article considers the stationary rotation stability of a solid body with a cylindrical cavity completely filled with incompressible cryogenic liquid. The stationary rotation stability of a body with stratified liquid is being studied based on ordinary differential equations, which coefficients are being determined from the solution of time-independent boundary value problems of hydrodynamics. A distinctive feature of all

cryogenic liquids is the non-uniform change of density and temperature observed in all storage and operation modes. The most significant stratification of the cryogenic component occurs in the direction of action of the external field of mass forces. To study motions of this mechanical system, a stratified incompressible fluid is a suitable model. The authors studied various cases: (a) the case of solid body rotation in the absence of liquid mass and with solidified liquid; (b) the case of solid body rotation with homogeneous liquid, when the moment of inertia of the solid body equals to zero or not equal to zero; (c) the case of solid body rotation with stratified liquid, when the moment of inertia of the solid body equals zero or not equal to zero. Characteristic equations of the boundary value problem and the motion of a solid body with a stratified fluid stationary rotating about its axis were obtained. The stability regions of free rotation of a solid with stratified fluid in dimensionless parameters are plotted. The obtained results allow drawing inference that stable stratification of the fluid leads to a decrease in the areas of instability in the rotation of a solid body with a cylindrical cavity completely filled with fluid. The considered method maybe used for studying not only the cylindrical cavity, but the other forms of cavity as well.

Keywords: rotational stability, cryogenic fluid, stratified fluid, free oscillations

For citation: Temnov A.N., Yan Naing Oo. On the stability of stationary rotation of a solid body with a cavity containing a cryogenic liquid. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177658>

Введение

Задачи о движении твёрдых тел с полостями, заполненными однородными или неоднородными жидкостями, представляют собой одну из основных групп задач,

связанных с гидродинамикой и динамикой твёрдого тела с жидкостью. Исследования движения твёрдого тела с полостями, наполненными однородной и вязкой жидкостью, были начаты Н. Е. Жуковским [1]. В работе [2] рассмотрена задача о колебаниях вращающейся эллипсоидальной оболочки, содержащей жидкость. Работа С. Л. Соболева [3] посвящена общей теории движения симметричного волчка с эллипсоидальной и цилиндрической полостями, наполненными жидкостями. В статье [4] изучались задачи о малых колебаниях твёрдого тела, полость которого целиком заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. В статье [5] были определены потенциалы скорости однородной жидкости внутри цилиндрической полости и введено понятие центра инерции системы. В работе [6] рассмотрена общая задача о движении твёрдого тела, содержащего вязкую несжимаемую жидкость. Форма полости считалась произвольной, а движения жидкости предполагались с малыми числами Рейнольдса. Некоторые численные расчеты и экспериментальные результаты о свободных колебаниях вращающейся жидкости в цилиндрическом сосуде приведены в книгах [7, 8]. В статье [9] собственные значения свободных колебаний вращающейся жидкости в цилиндрическом сосуде представлены в виде таблиц и графиков. Вопросы устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа с эллипсоидальной полостью, заполненной однородной жидкостью, изучались в статье [10], в которой установлены необходимые и достаточные условия устойчивости таких движений. В работе [11] рассмотрена устойчивость вращательных движений твёрдого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной несжимаемой жидкостью.

В связи с расширением областей применения криогенных жидкостей большое внимание уделяется проблемам колебаний криогенных жидкостей в резервуарах различных форм. Все криогенные жидкости характеризуются неоднородностью плотности и температуры, наблюдаемой во всех режимах хранения и эксплуатации. Вследствие конвективного перемешивания в резервуаре с криогенной жидкостью образуется слой, имеющий значительный градиент плотности и температуры в вертикальном направлении. Такую криогенную жидкость в научной литературе принято называть стратифицированной жидкостью [15].

В работах [12, 13] исследовалась устойчивость стационарного вращения твёрдого тела, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью. Установлено, что резонансное возбуждение внутренних волн во вращающейся жидкости, заполняющей цилиндр, является важным фактором возникновения неустойчивости. Работа [14] посвящена экспериментальному исследованию устойчивости движения волчка с полостью, заполненной жидкостью. В этой работе сделан вывод, что наличие жидкости в полости рассматриваемой модели оказывает существенное влияние на её поведение при вращении. В работах [16, 17] рассматривались задачи устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, полностью заполненной однородной или стратифицированной жидкостью. Представлены области неустойчивости свободного вращения тела, наполненного этими жидкостями. Ранее авторами [18, 19] были исследованы задачи о свободных колебаниях идеальной стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости при малой и большой угловых скоростях.

В настоящей работе представлена задача об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью наполненной стратифицированной жидкостью. Получены характеристические уравнения краевой задачи с граничными условиями, которые также выражаются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Записаны уравнения движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в векторной форме и выражены коэффициенты при их интегралах. Затем приведены области неустойчивости стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, заполненной (а) однородной жидкостью и (б) стратифицированной жидкостью.

1. Формулировка краевой задачи

Пусть имеется твёрдое тело с цилиндрической полостью, полностью заполненной идеальной стратифицированной жидкостью. Тело совершает стационарное вращение с угловой скоростью вокруг неподвижной точки O_1 , являющейся центром масс всей механической системы и находящейся на расстоянии d от центра масс жидкости O , расположенного на оси O_1x_3 (рис. 1). Предположим, что угловая скорость стационарного вращения ($\omega_0 = const$) в невозмущенном движении

удовлетворяет условию $\frac{\omega_0^2 \ell}{g} \ll 1$ (ℓ – характерный размер полости). Следовательно,

будем считать, что потенциальная энергия на единицу масс жидкости равна

$\Pi_0 = -\vec{g} x_3$, т.е. здесь пренебрегаем центробежными силами инерции при вращении.

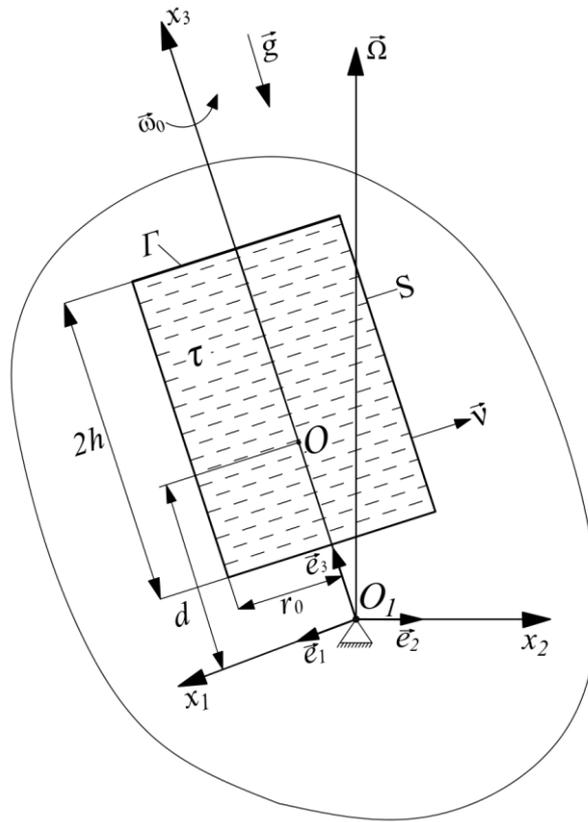


Рис. 1. Твёрдое тело с цилиндрической полостью, полностью заполненной идеальной стратифицированной жидкостью

Рассмотрим возмущенное движение относительно стационарного вращения твёрдого тела с полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью.

Угловая скорость тела представляется в виде

$$\vec{\omega}_T = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega} = \omega_0 \vec{e}_3 + \vec{\Omega}, \quad (1)$$

здесь $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$ – угловая скорость стационарного вращения тела, направленная по орту \vec{e}_3 оси $O_1 x_3$, связанной с телом системы координат $O_1 x_1 x_2 x_3$, $\vec{\Omega}$ – угловая скорость тела в возмущенном движении, являющаяся величиной первого порядка малости по сравнению с $\vec{\omega}_0$ и введем вектор малых углов поворота $\vec{\theta}(t)$, $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$

Используем двойное приближение Буссинеска [15]: $\rho_0 = \rho_0^* = const$ в уравнениях движения, для вычисления ρ, \vec{u} . С учетом сделанных допущений уравнения возмущённого движения стратифицированной жидкости в системе $O_1x_1x_2x_3$ с точностью до второго порядка малости имеют вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p - g(\vec{e}_3 \times \vec{\theta}) \quad \text{в } \tau, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (3)$$

с граничным условием

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \quad (4)$$

Здесь \vec{u} – скорость жидкости в системе $O_1x_1x_2x_3$, \vec{r} – радиус-вектор, ρ – плотность жидкости, τ – область, занятая жидкостью, S – граница области τ , $\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к поверхности S , ρ_0^* – постоянное среднее значение плотности жидкости при использовании двойного приближения Буссинеска.

При $\vec{\Omega} \equiv 0$ из уравнений (2) и (3) получим задачу о собственных колебаниях жидкости в полости вращающегося тела, решение которой будем искать в виде гармонических колебаний

$$\vec{u} = \vec{v} e^{\lambda t}, \quad p = \varphi e^{\lambda t}, \quad \rho = \psi e^{\lambda t},$$

где $\lambda = i\omega$ – комплексное число, ω – частота колебаний жидкости.

Для решения краевой задачи при использовании приближения Буссинеска, плотность жидкости в невозмущенном движении изменяется по закону

$\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta x_3)$. Используя метод разделения переменных для функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ получаем следующую краевую задачу для стратифицированной жидкости [18]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (5)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_2 - i \chi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_2 \right) + (1 - \sigma^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} v_3 = 0, \quad (6)$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, $\sigma^2 = \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 - \omega^2} = \frac{\chi^2(1 - Fr^2)}{1 - Fr^2\chi^2}$, $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$.

Непосредственной проверкой можно установить, что при $Fr^2 = 0$ будет $\sigma = \chi$ и краевая задача (5) и граничные условия (6) совпадают с краевой задачей и граничными условиями для однородной вращающейся жидкости Л. В. Докучаева [16]. Собственные функции $\varphi_n (n=1, 2, 3, \dots)$ краевой задачи (5) соответствует собственным числам χ_n , как известно [1, 16].

Введем цилиндрическую систему координат (r, η, x) и представим функции φ_n в виде произведения,

$$\varphi_n = g_n(x, r) e^{in\eta} \quad (7)$$

Функция $g_n(x, r)$ должна, согласно краевой задачей (5) и граничным условиям (6). Решение краевой задачи получаем в виде [18],

$$g_n = g_{lp}(x, r) = \sin(k_l x) \frac{J_1(\xi_{lp} \bar{r})}{J_1(\xi_{lp})}, \quad (8)$$

где $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$, $k_l = \frac{(2l+1)\pi}{2h}$, $\bar{k}_l = k_l r_0$, $\xi_{lp} = \bar{k}_l \sqrt{\frac{\chi_{lp}^2 - 1}{1 - Fr^2 \chi_{lp}^2}}$,

$$\chi_{lp} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{lp}^2}{\bar{k}_l^2 + \xi_{lp}^2 Fr^2}}, \quad (l=0,1,2,\dots, \quad p=1,2,3,\dots), \quad (9)$$

здесь $J_1(\xi_{lp}r)$ – функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка.

Гармоники, симметричные по координате x , не возбуждаются. Индекс n представляет собой всевозможные сочетания порядковых номеров продольных и поперечных гармоники l и p . Величина ξ_{lp} является p -м корнем характеристического уравнения

$$Y_2(\xi) = \xi J_0(\xi) \pm (\chi_{lp} - 1)J_1(\xi) = 0. \quad (10)$$

Графическое решение уравнения (10) для случая $\chi_{lp} > 0$ при различных значениях числа Fr^2 и корней (l, p) рассмотрено в работе [18].

Скорость жидкости можно представить в векторной форме,

$$\vec{v}_n = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi_n}{2\omega_0(\chi_n^2 - 1)} \left[\chi_n \vec{e}_3 \times \nabla \varphi_n - i \nabla \varphi_n + i \sigma^2 \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \nabla \varphi_n) \right], \quad (11)$$

и обладает свойством ортогональности в области τ

$$\int_{\tau} \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n^* d\tau = 0, \quad \text{при } n \neq n^*, \quad (12)$$

Здесь \vec{v}_n^* является комплексным сопряжением \vec{v}_n .

Применим к уравнению (2) метод Бубнова-Галёркина. Представим вектор скорости в виде разложения по собственным векторным функциям (11) краевой задачи (5)

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_n(t) \vec{v}_n(x_1, x_2, x_3), \quad (13)$$

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_n = -\lambda_n \vec{v}_n - \frac{N^2}{\lambda_n} \vec{v}_n \cdot \vec{e}_3 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \varphi, \quad (14)$$

Подставим разложение (13) в уравнение (2) и с учетом уравнения (14) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{s}_n \vec{v}_n + \dot{s}_n \left(-i\omega_n \vec{v}_n + \frac{i}{\omega_n} N^2 \vec{v}_n \cdot \vec{e}_3 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) + N^2 s_n \vec{v}_n \cdot \vec{e}_3 \right] + \vec{\theta} \times \vec{r} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + g(\vec{e}_3 \times \vec{\theta}) = 0, \quad (15)$$

Умножим уравнение (15) скалярно на \vec{v}_n^* и проинтегрируем по объему τ . В силу свойства ортогональности (12) уравнение (15) сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[N_n^2 (\ddot{s}_n - i\omega_n \dot{s}_n) + N_{3n}^2 \left(\frac{i}{\omega_n} \dot{s}_n + s_n \right) \right] + \vec{a}_n^* \cdot \vec{\theta} + \vec{d}_n^* \cdot \vec{\theta} = 0, \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (16)$$

Коэффициенты в уравнениях (16) выражаются через собственные функции \vec{v}_n

и \vec{v}_n^*

$$\begin{aligned} N_n^2 &= \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n \cdot \vec{v}_n^*) d\tau & ; & & N_{3n}^2 &= \int_{\tau} \rho_0 (v_{3n} \cdot v_{3n}^*) d\tau ; \\ \vec{a}_n^* &= \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{v}_n^*) d\tau & ; & & \vec{d}_n^* &= g \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n^* \times \vec{e}_3) d\tau . \end{aligned} \quad (17)$$

2. Собственные колебания вращающегося тела с жидкостью

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях свободного вращающегося тела со стратифицированной жидкостью около стационарного вращения (см. рис. 1). Уравнения возмущенного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью, находящейся в однородном поле массовых сил напряженности j , приобретают

$$\begin{aligned}
J \cdot \ddot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\Omega} + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \ddot{\vec{u}} d\tau + \int_{\tau} \rho_0 \vec{\omega}_0 \times (\vec{r} \times \vec{u}) d\tau + \\
+ \int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau - \int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau = \vec{M},
\end{aligned} \tag{18}$$

здесь $J = J^0 + J'$, J^0 – тензор инерции твёрдого тела без жидкости, J' – тензор инерции затвёрдевшей жидкости, \vec{M} – момент внешних сил.

Уравнение (18) с учетом разложения (13) будет иметь вид

$$J \cdot \ddot{\vec{\theta}} + \vec{\theta} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \ddot{\vec{\theta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{s}_n \vec{a}_n + \dot{s}_n (\vec{\omega}_0 \times \vec{a}_n - \vec{b}_n) + s_n \vec{c}_n \right] = \vec{M}, \tag{19}$$

Система уравнений возмущенного движения тела в представленной форме (16) и (19) позволяет рассматривать режимы, когда на тело действуют произвольные управляющие моменты.

В случае осесимметричной полости гидростатический момент идеальной стратифицированной жидкости относительно оси симметрии равен нулю и скалярное уравнение движения вокруг оси O_1x_3 отделяется от остальных. Уравнения вращения тела относительно поперечных осей O_1x_1 и O_1x_2 идентичны.

Коэффициенты в уравнении (19) обозначим

$$\vec{a}_n = \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{v}_n) d\tau, \quad \vec{b}_n = \int_{\tau} \nabla \rho_0 \vec{v}_n (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau, \quad \vec{c}_n = \int_{\tau} \nabla \rho_0 \vec{v}_n (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau. \tag{20}$$

Здесь обозначим ещё один коэффициент

$$\vec{d}_n = g \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n \times \vec{e}_3) d\tau. \tag{21}$$

По результатами интегралов компоненты векторных величин коэффициентов

\vec{a}_n, \vec{a}_n^* и \vec{d}_n, \vec{d}_n^* обладают следующими свойствами.

$$a_{1n} = a_{1n}^* = -ia_{2n} = ia_{2n}^* ; \quad d_{1n} = d_{1n}^* = -id_{2n} = id_{2n}^*. \quad (22)$$

Коэффициенты из уравнений (17), (20) и (21) через функцию g_n выражаются следующим образом:

$$N_n^2 = \frac{\pi \chi_n^2}{2\rho_0^* \omega_0^2} \int_G \left\{ \frac{(\sigma_n^2 - 1)^2}{(\chi_n^2 - 1)^2} \left(\frac{\partial g_n}{\partial x} \right)^2 + \frac{\chi_n^2 + 1}{(\chi_n^2 - 1)^2} \left[\left(\frac{\partial g_n}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{g_n}{r} \right)^2 \right] + \frac{4\chi_n}{(\chi_n^2 - 1)^2} \frac{\partial g_n}{\partial r} \frac{g_n}{r} \right\} r dS,$$

$$N_{3n}^2 = \frac{2\pi Fr^2 \chi_n^2 (\sigma_n^2 - 1)^2}{\rho_0^* (\chi_n^2 - 1)^2} \int_G \left(\frac{\partial g_n}{\partial x} \right)^2 r dS,$$

$$a_n = a_{1n} = -\frac{\pi \chi_n}{2\omega_0} \int_G \left[\frac{\sigma_n^2 - 1}{\chi_n^2 - 1} r \frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{x}{\chi_n - 1} \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} + \frac{g_n}{r} \right) \right] r dS, \quad (23)$$

$$b_n = ib_{1n} = b_{2n} = -\frac{2\pi Fr^2 \chi_n (\sigma_n^2 - 1) \omega_0^2}{g(\chi_n^2 - 1)} \int_G x \frac{\partial g_n}{\partial x} r^2 dS,$$

$$c_n = c_{1n} = \frac{2\pi Fr^2 \chi_n (\sigma_n^2 - 1) \omega_0}{\chi_n^2 - 1} \int_G \frac{\partial g_n}{\partial x} r^2 dS,$$

$$d_n = d_{1n} = \frac{\pi g \chi_n}{2\omega_0 (\chi_n - 1)} \int_G \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} + \frac{g_n}{r} \right) r dS.$$

Компоненты векторного уравнения (19) получим

$$M_1 = J_{11} \ddot{\theta}_1 + (J_{33} - J_{11}) \dot{\theta}_2 \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{s}_n a_{1n} + \dot{s}_n (-\omega_0 a_{2n} - b_{1n}) + s_n c_{1n}],$$

$$M_2 = J_{22} \ddot{\theta}_2 - (J_{33} - J_{11}) \dot{\theta}_1 \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{s}_n a_{2n} + \dot{s}_n (\omega_0 a_{1n} - b_{2n}) + s_n c_{2n}], \quad (24)$$

$$M_3 = 0.$$

Пусть ось Ox_3 была главной осью инерции системы и ось вращения системы была осью массовой и геометрической симметрии, то имеем

$$J_{jk} = J_{kj} = 0; \quad (j, k = 1, 2, 3).$$

Когда заменим $J_{22} = J_{11}$, $a_{2n} = ia_{1n}$, $b_{1n} = -ib_{2n}$, $c_{2n} = ic_{1n}$ уравнение (24)

преобразуется к виду

$$\begin{aligned} M_1 &= J_{11}\ddot{\theta}_1 + (J_{33} - J_{11})\dot{\theta}_2\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{s}_n a_{1n} + i\dot{s}_n(-\omega_0 a_{1n} + b_{2n}) + s_n c_{1n}], \\ M_2 &= J_{11}\ddot{\theta}_2 - (J_{33} - J_{11})\dot{\theta}_1\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [i\ddot{s}_n a_{1n} + \dot{s}_n(\omega_0 a_{1n} - b_{2n}) + i s_n c_{1n}], \\ M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь из первого уравнения (25) вычтем умножение второго уравнения на мнимую единицу и получаем в виде

$$M_1 - iM_2 = J_{11}(\ddot{\theta}_1 - i\ddot{\theta}_2) + i\omega_0(J_{33} - J_{11})(\dot{\theta}_1 - i\dot{\theta}_2) + \sum_{n=1}^{\infty} 2[\ddot{s}_n a_{1n} + i\dot{s}_n(b_{2n} - \omega_0 a_{1n}) + s_n c_{1n}]. \quad (26)$$

Заменим $J_{11} = J_{22} = A$, $J_{33} = C$, $\theta_1 - i\theta_2 = \theta$, $M_1 - iM_2 = M$, $a_{1n} = a_{1n}^* = a_n$, $b_{2n} = b_n$, $c_{1n} = c_n$, $d_{1n} = d_{1n}^* = d_n$ получим следующую систему уравнений, эквивалентную системам (16) и (26)

$$A\ddot{\theta} + i(C - A)\dot{\theta}\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2[\ddot{s}_n a_n + i\dot{s}_n(b_n - \omega_0 a_n) + s_n c_n] = M, \quad (27)$$

$$N_n^2(\ddot{s}_n - i\omega_n \dot{s}_n) + N_{3n}^2 \left(\frac{i}{\omega_n} \dot{s}_n + s_n \right) + a_n \cdot \ddot{\theta} + d_n \cdot \theta = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (28)$$

Здесь

$$A = A^0 + A' = J_{11}^0 + J'_{11}, \quad C = C^0 + C' = J_{33}^0 + J'_{33}.$$

Для решения системы уравнений (27) и (28) полагая $\theta = \theta_0 e^{i\alpha t}$, $s_n = s_{n_0} e^{i\alpha t}$ и подставим в уравнение (28), получим

$$s_{n_0} = \frac{\theta_0(a_n \alpha^2 - d_n)}{\left(N_n^2 \alpha + N_{3n}^2 \frac{1}{\omega_n} \right) (\omega_n - \alpha)}. \quad (29)$$

Предположим, что момент внешних сил $\vec{M} = 0$, при этом уравнение (27) с учетом (29) получаем в виде

$$A\alpha^2 + (C - A)\omega_0\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(a_n\alpha^2 - d_n)}{\left(N_n^2\alpha + N_{3n}^2 \frac{1}{\omega_n}\right)(\omega_n - \alpha)} [a_n\alpha^2 + (b_n - a_n\omega_0)\alpha - c_n] = 0. \quad (30)$$

3. Вращение твёрдого тела при отсутствии массы жидкости

В случае твёрдого тела без жидкости, т.е. при $\rho_0(x_3) = 0$, уравнение (30) сводится к виду

$$A^0\alpha^2 + (C^0 - A^0)\omega_0\alpha = 0. \quad (31)$$

Для устойчивости стационарного вращения твёрдого тела должно удовлетворяться неравенству

$$C^0 - A^0 \geq 0. \quad (32)$$

Неравенство (32) является известным условием устойчивости стационарного вращения свободного твёрдого тела и это условие сводится к требованию, чтобы момент инерции C^0 был либо наибольшими, либо наименьшим главным центральным моментом инерции системы.

4. Вращение твёрдого тела с затвердевшей жидкостью

В этом случае относительное движение жидкости отсутствует, центр масс жидкости относительно твёрдого тела не изменяется своего положения, и моменты инерции всей механической системы $J_{jk} = J_{jk}^0 + J'_{jk}$ также остаются постоянными, поэтому предыдущий вывод остается справедливым: вращение твёрдого тела с

затвердевшей жидкостью будет устойчиво вокруг оси с наибольшим или наименьшим главным центральным моментом инерции системы.

5. Вращение твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью заполненной однородной жидкостью

Выясним условия устойчивости для случая цилиндрической полости с однородной жидкостью ($Fr^2 = 0$). В этом случае уравнение (30) превращается к виду [16]

$$A\alpha + (C - A)\omega_0 - \alpha(\alpha - \omega_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\alpha - \lambda_n} = 0, \quad (33)$$

здесь $E_n = \frac{2a_n^2}{N_n^2}$.

В первом приближении, когда вместо бесконечной суммы в (33) можно оставить один главный член ($n = 1$), получаем квадратное уравнение относительно α и его решение в виде

$$\alpha = \frac{-[(C - A)\omega_0 - A\omega_1 + E_1\omega_0] \pm \sqrt{[(C - A)\omega_0 - A\omega_1 + E_1\omega_0]^2 + 4(C - A)(A - E_1)\omega_0\omega_1}}{2(A - E_1)}. \quad (34)$$

Для устойчивости стационарного вращения (необходимое условие) все корни уравнения (34) должны быть действительными. Для этого должно быть

$$[(C - A)\omega_0 - A\omega_1 + E_1\omega_0]^2 + 4(C - A)(A - E_1)\omega_0\omega_1 > 0, \quad (35)$$

Из условия (35) получим уравнения границ области устойчивости

$$C - A = -E_1 - (A - 2E_1)\delta_1 \pm 2\sqrt{E_1\delta_1(A - E_1)(1 - \delta_1)}, \quad (36)$$

где $\delta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{2}{\chi_1}$.

Уравнение границ области устойчивости в безразмерных параметрах будут

$$\Delta = \frac{1}{\rho_0^* r_0^5} \left[-E_1 - \frac{2}{\chi_1} (A^0 + A' - 2E_1) \pm \frac{2}{\chi_1} \sqrt{2E_1(A - E_1)(\chi_1 - 2)} \right], \quad (37)$$

здесь $\Delta = \frac{C - A}{\rho_0^* r_0^5}$ – безразмерная величина, A^0 и A' – моменты инерции твёрдого тела

без жидкости и затвердевшей жидкости относительно поперечной оси O_1x_1 .

Предлагаем, что момент инерции тела для произвольной формы $A^0 = const$ и для затвердевшей однородной жидкости

$$A' = 2\pi\rho_0^* r_0^2 h \left(\frac{1}{4} r_0^2 + \frac{1}{3} h^2 + d^2 \right).$$

В этом случае для однородной жидкости ($Fr^2 = 0$) коэффициенты N_1^2 и a_1^2 записываются в виде

$$\begin{aligned} N_1^2 &= \frac{\pi\chi_1^2}{4\rho_0^*\omega_0^2} \left\{ \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} [k_l h + \cos(k_l h) \sin(k_l h)] \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_l} [k_l h + \cos(k_l h) \sin(k_l h)] \left[\frac{\chi_1^2 + 1}{(\chi_1^2 - 1)^2} \left(\xi_1^2 \frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + \xi_1^2 - 2 \right) + 4\chi_1 \right] \right\}, \quad (38) \\ a_1 &= -\frac{\pi\chi_1}{\omega_0} \left\{ \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \sin(k_l h) \left(2 - \xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right) + \frac{r_0}{k_l^2 (\chi_1 - 1)} [\sin(k_l h) - k_l h \cos(k_l h)] \right\}. \end{aligned}$$

Используя формулу (37), можно построить области устойчивости в переменных Δ и \bar{h} ($\bar{h} = h/r_0$). На рис. 2 изображены области устойчивости твёрдого тела с однородной жидкостью в безразмерных переменных Δ и \bar{h} с различными значениями корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$). Области устойчивости на рис. 2. (а)

построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $A^0 = 10$, $d = \frac{h}{2}$; на рис. 2. (б) – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $A^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

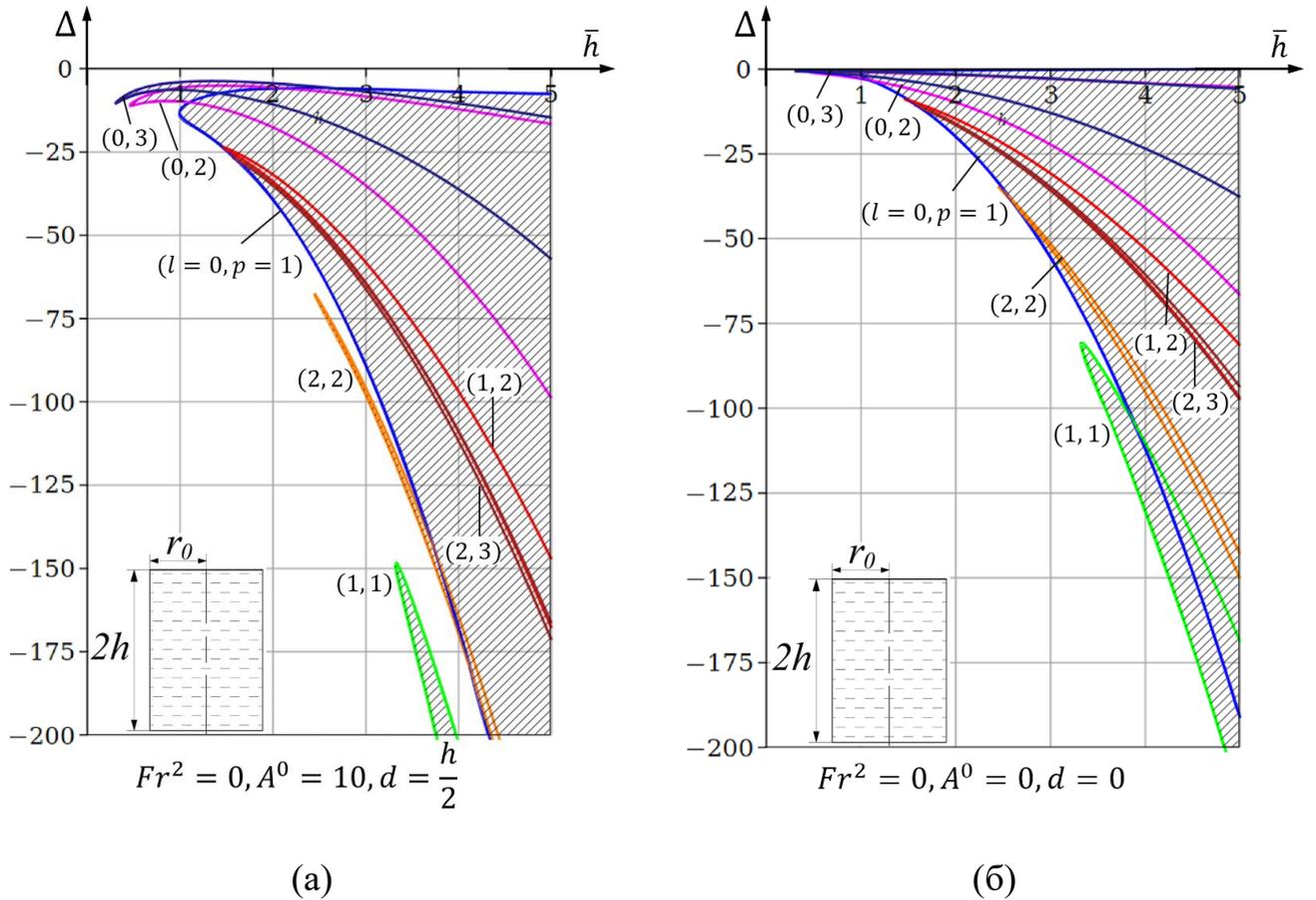


Рис. 2. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с однородной жидкостью

Из проведенных графических расчетов (рис. 2) следует, что увеличение числа p сдвигает ветви в область меньших значений абсолютной величины Δ , а ветви с большим числом l опускаются вниз на плоскости переменных Δ и \bar{h} . Одновременное увеличение чисел l и p приводит к слиянию соответствующих этим числам ветви с ветвями для меньших чисел l и p . Например, в обоих двух случаях при $A^0 = 10$, $d = \frac{h}{2}$

ветви $[(1,2),(2,3)]$ и при $A^0 = 0, d = 0$ ветви $[(1,2),(2,2),(2,3)]$ сливаются с основной зоной неустойчивости $(0,1)$.

6. Вращение твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью

Выясним условия устойчивости для случая цилиндрической полости со стратифицированной жидкостью ($Fr^2 \neq 0$). В первом приближении, когда вместо бесконечной суммы в (30) можно оставить один главный член ($n=1$), и получим кубическое уравнение

$$y_0 \alpha_*^3 + y_1 \alpha_*^2 + y_2 \alpha_* + y_3 = 0, \quad (39)$$

здесь

$$\begin{aligned} y_0 &= (AN_1^2 - 2a_1^2)\omega_0^2 & ; & & y_1 &= [(C - A)N_1^2\omega_0 - AN_1^* + 2a_1^2\omega_0]\omega_0 ; \\ y_2 &= -[(C - A)N_1^*\omega_0 + AN_{31}^2 - 2a_1c_1]; & & & y_3 &= -(C - A)N_{31}^2; \\ \alpha_* &= \frac{\alpha}{\omega_0}, & & & N_1^* &= N_1^2\delta_1\omega_0 - N_{31}^2\frac{1}{\delta_1\omega_0}. \end{aligned}$$

Коэффициенты из уравнения (23) для стратифицированной жидкости при $n=1$ записываются в виде

$$\begin{aligned} N_1^2 &= \frac{\pi\chi_1^2}{4\rho_0^*\omega_0^2} \left\{ \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{(\chi_1^2 - 1)^2} \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} [k_l h + \cos(k_l h) \sin(k_l h)] \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_l} [k_l h + \cos(k_l h) \sin(k_l h)] \left[\frac{\chi_1^2 + 1}{(\chi_1^2 - 1)^2} \left(\xi_1^2 \frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + \xi_1^2 - 2 \right) + 4\chi_1 \right] \right\}, \\ N_{31}^2 &= \frac{\pi Fr^2 \chi_1^2 (\sigma_1^2 - 1)^2}{\rho_0^* (\chi_1^2 - 1)^2} \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} [k_l h + \cos(k_l h) \sin(k_l h)] \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right], \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{\pi\chi_1}{\omega_0} \left\{ \frac{\sigma^2 - 1}{\chi_1^2 - 1} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \sin(k_l h) \left(2 - \xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right) + \frac{r_0}{k_l^2 (\chi_1 - 1)} [\sin(k_l h) - k_l h \cos(k_l h)] \right\}, \quad (40)$$

$$c_1 = \frac{4\pi Fr^2 \chi_1 (\sigma^2 - 1) \omega_0}{\chi_1^2 - 1} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \sin(k_l h) \left(2 - \xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right),$$

$$b_1 = 0, \quad d_1 = 0.$$

Для устойчивости стационарного вращения (необходимое условие) все корни уравнения (39) должно быть действительными. Корни кубического уравнения будут действительными, если дискриминант $D < 0$.

где

$$D = 27y_0^2 y_3^2 - y_1^2 y_2^2 + 4y_1^3 y_3 + 4y_2^3 y_0 - 18y_0 y_1 y_2 y_3. \quad (41)$$

Приравнять $D = 0$, и получим уравнение 4-го порядка относительно $(C - A)$,

$$z_1(C - A)^4 + z_2(C - A)^3 + z_3(C - A)^2 + z_4(C - A) + z_5 = 0, \quad (42)$$

здесь

$$z_1 = \left[4N_1^2 N_{31}^2 + (N_1^*)^2 \right] (N_1^2)^2 \omega_0^6,$$

$$z_2 = \left\{ \left[18(AN_1^2 - 2a_1^2)N_1^* + 12(2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)N_1^2 \right] N_1^2 N_{31}^2 + \right. \\ \left. + \left[4(AN_1^2 - 2a_1^2)(N_1^*)^2 + 2(2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)N_1^2 N_1^* + 2(AN_{31}^2 - 2a_1 c_1)(N_1^2)^2 \right] N_1^* \right\} \omega_0^5,$$

$$z_3 = \left\{ -27(AN_1^2 - 2a_1^2)^2 (N_{31}^2)^2 + \left[18(AN_1^2 - 2a_1^2) \left((2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)N_1^* + (AN_{31}^2 - 2a_1 c_1)N_1^2 \right) + \right. \right. \\ \left. + 12(2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)^2 N_1^2 \right] N_{31}^2 + \left[12(AN_{31}^2 - 2a_1 c_1)(AN_1^2 - 2a_1^2) + (2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)^2 \right] (N_1^*)^2 + \\ \left. + (2a_1 c_1 - AN_{31}^2)N_1^2 \left[4(AN_1^* - 2a_1^2\omega_0)N_1^* + (2a_1 c_1 - AN_{31}^2)N_1^2 \right] \right\} \omega_0^4,$$

$$z_4 = - \left\{ \left[18(AN_1^2 - 2a_1^2)(2a_1c_1 - AN_{31}^2) - 4(2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)^2 \right] (2a_1^2\omega_0 - AN_1^*) N_{31}^2 + \right. \\ \left. + \left[12(AN_{31}^2 - 2a_1c_1)(AN_1^2 - 2a_1^2) + 2(2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)^2 \right] (2a_1c_1 - AN_{31}^2) N_1^* + \right. \\ \left. + 2(AN_1^* - 2a_1^2\omega_0)(2a_1c_1 - AN_{31}^2)^2 N_1^2 \right\} \omega_0^3,$$

$$z_5 = \left[4(2a_1c_1 - AN_{31}^2)(2a_1^2 - AN_1^2) + (2a_1^2\omega_0 - AN_1^*)^2 \right] (2a_1c_1 - AN_{31}^2)^2 \omega_0^2.$$

После несложных вычислений из уравнения (42) получим два действительные и два комплексные корни $(C - A)_k$, $(k = 1, \dots, 4)$. Для построения области устойчивости возьмём два действительные корни. Уравнение границ области устойчивости в безразмерных параметрах будет как уравнения (37). Предлагаем, что момент инерции твёрдого тела для произвольной формы $A^0 = const$ и для затвердевшей стратифицированной жидкости

$$A' = 2\pi\rho_0^*r_0^2h \left(\frac{1}{4}r_0^2 + \frac{1}{3}h^2 + d^2 - x_{3c}^2 \right),$$

здесь x_{3c} — расстояние от центра масс стратифицированной жидкости до геометрического центра полости, считаем по формуле

$$x_{3c} = \frac{\int_{-h}^h \rho_0 x_3 dx_3}{\int_{-h}^h \rho_0 dx_3} = -\frac{\beta h^2}{2}, \quad (43)$$

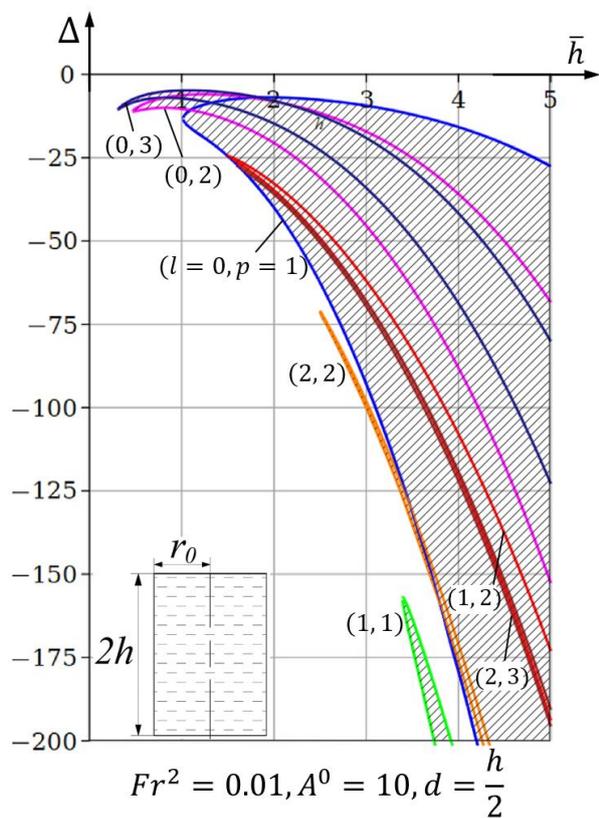
где $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta x_3)$ и пусть $\beta = \frac{0.4 Fr^2}{r_0}$.

На рис. 3 изображены области устойчивости твёрдого тела со стратифицированной жидкостью (при $Fr^2 = 0.01, 0.1$) в безразмерных переменных Δ и \bar{h} с различными значениями корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$). Области устойчивости

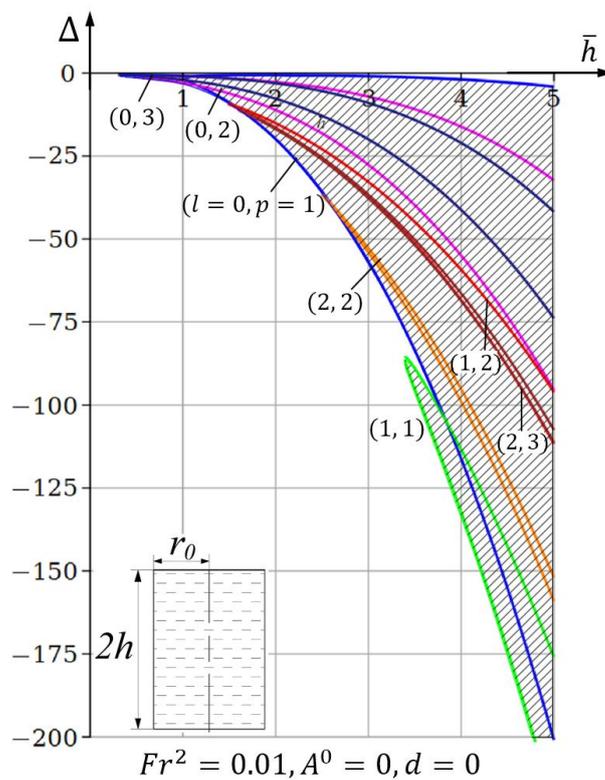
на рис. 3. (а) и (в) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах

$A^0 = 10, d = \frac{h}{2}$; на рис. 3. (б) и (г) – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при

$A^0 = 0, d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).



(a)



(б)

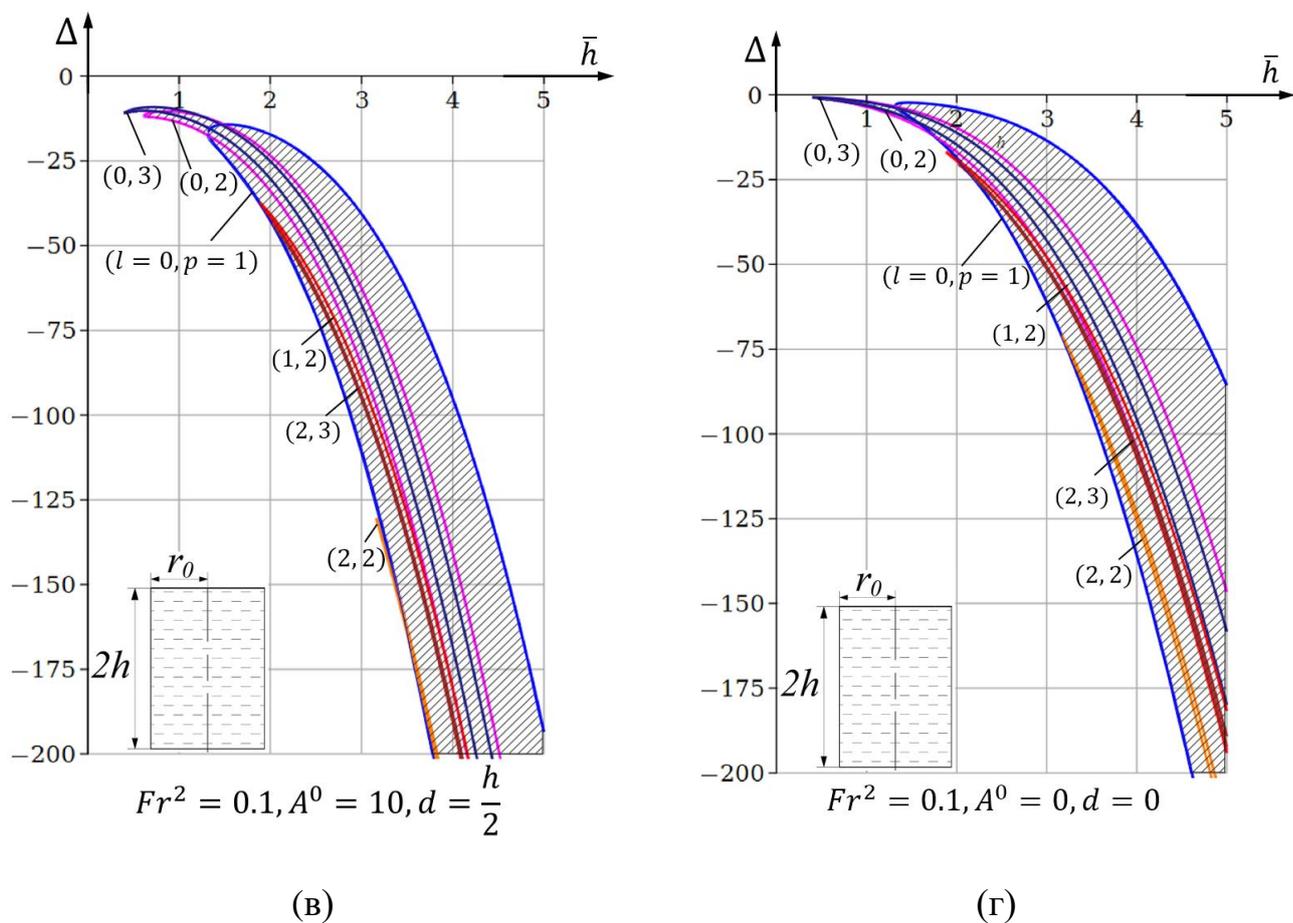


Рис. 3. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при различных корнях l и p

Далее рассмотрим, как получим области неустойчивости в зависимости от стратификации при первом члене $n=1$ с корнями $l=0, p=1$. На рис. 4 изображены области устойчивости для твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в безразмерных переменных Δ и \bar{h} с различными числами Fr^2 ($Fr^2 = 0, 0.01, 0.1, 0.2$) при постоянных корнях $l=0, p=1$. Области устойчивости на рис. 4. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $A^0 = 10, d = \frac{h}{2}$; на рис. 4. (б) – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $A^0 = 0, d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

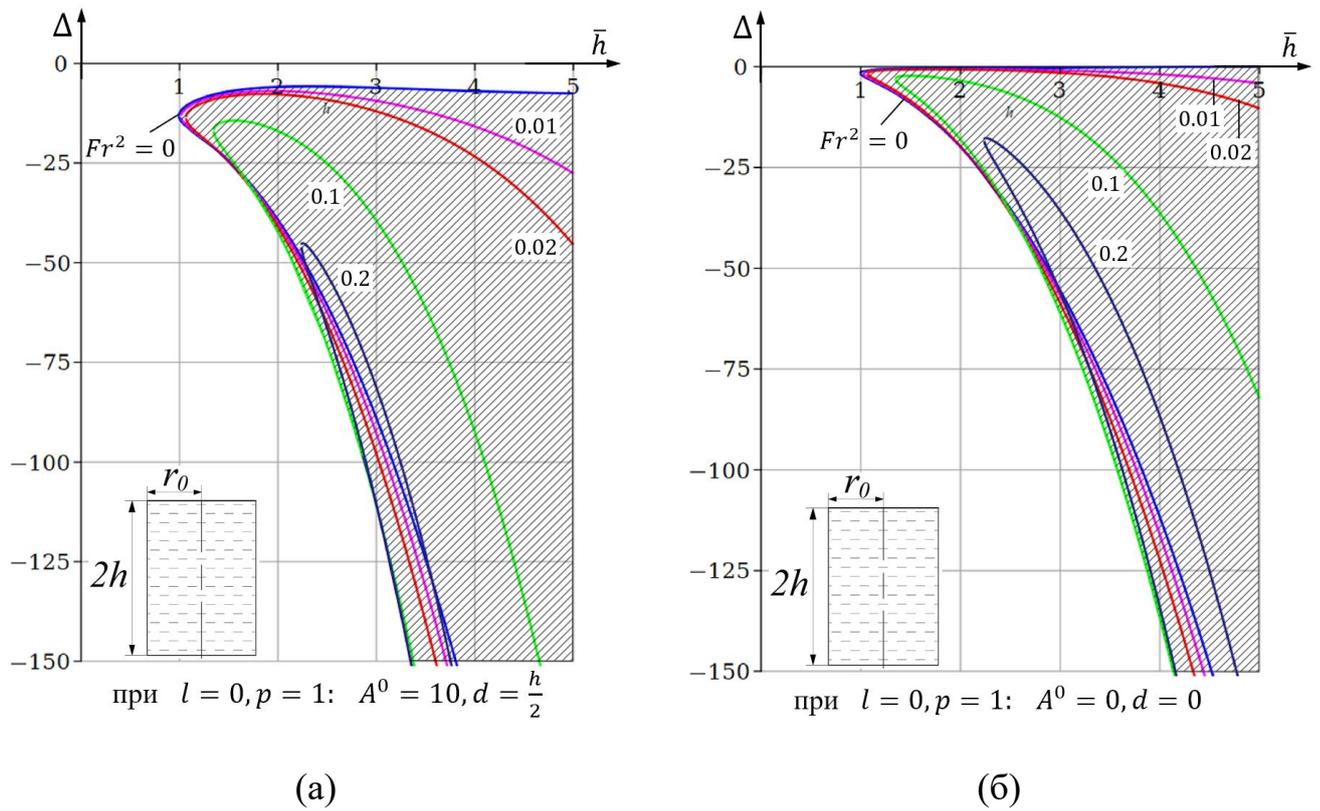


Рис. 4. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при различных числах Fr^2

Из рис. 3. видно, что ветви при различных корнях l и p при наличии стратификации ($Fr^2 = 0.1$) получены аналогично как однородной жидкости. При увеличении числа p приводит к увеличению области неустойчивости и при увеличении числа l приводит к уменьшению области неустойчивости. Когда числа l и p одновременно увеличиваются, ветви приводят к слиянию соответствующих ветвей для меньших чисел l и p . Из рис. 4 следует, что при наличии стратификации области неустойчивости уменьшаются и эти области с большими значениями числа Fr^2 находятся почти внутри области неустойчивости с меньшими значениями числа Fr^2 .

Заключение

В статье представлены области неустойчивости вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью, при вращении вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс рассматриваемой механической системы. Рассмотрены различные случаи: а) случай вращения твёрдого тела при отсутствии массы жидкости и с затвердевшей жидкостью, б) случай вращения твёрдого тела с однородной жидкостью, когда момент инерции твёрдого тела равняется нулю, либо не равняется нулю, (в) случай вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью, когда момент инерции твёрдого тела равняется нулю, либо не равно нулю. Устойчивая стратификация жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью заполненной жидкостью. Рассмотренный метод можно использовать для исследования не только цилиндрической полости, но и других форм полости.

Список источников

1. Жуковский Н.Е. О движении твёрдого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью: репринт. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. - 137 с.
2. Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, 1895, vol. 186, part 1, pp. 469–506. DOI: [10.1098/rsp1.1894.0153](https://doi.org/10.1098/rsp1.1894.0153)

3. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 20-55.
4. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 65-75.
5. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 1. С. 3-20.
6. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т 5. № 6. С. 1049-1070.
7. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. - 248 с.
8. Greenspan Н.Р. The theory of rotating fluids. London, Cambridge university press, 1968, 327 p.
9. Miles J.W. Free - surface oscillations in a rotating liquid // Journal of Fluid Mechanics, 1959, vol. 2, no. 3, pp. 297-305. DOI:[10.1017/S0022112064000143](https://doi.org/10.1017/S0022112064000143)
10. Жак С.В. Об устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа, содержащего жидкие массы // Прикладная математика и механика. 1958. Т. XXII. № 2. С. 245-249.
11. Костандян Б.А. Об устойчивости вращательных движений волчка с полостью, неполностью наполненной жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 56-64.

12. Дерендяев Н.В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Доклады АН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1073-1076.
13. Дерендяев Н.В., Сандолов В.М. Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Машиноведение. 1986. № 1. С. 19-26.
14. Малашенко С.В., Темченко М.Е. Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 76-80.
15. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МВТУ, 1983, 192 с.
16. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Механика твердого тела. 1973. № 2. С. 6-14.
17. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=55633>
18. Ян Наинг У. Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2023. № 130. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=174605>. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)
19. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в поле центробежных сил инерции // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176845>

20. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=84412>
21. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159785>. DOI: [10.26907/2542-0405.2021.119-08](https://doi.org/10.26907/2542-0405.2021.119-08)
22. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53486>

References

1. Zhukovskii N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoi kapel'noi zhidkost'yu: reprint* (On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous droplet liquid), Moscow, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2017, 137 p.
2. Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A, 1895, vol. 186, part 1, pp. 469–506. DOI: [10.1098/rspl.1894.0153](https://doi.org/10.1098/rspl.1894.0153)
3. Sobolev S.L. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1960, no. 3, pp. 20-55.
4. Ishlinskii A.Yu., Temchenko M.E. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1960, no. 3, pp. 65-75.

5. Okhotsimskii D.E. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1956, vol. 20, no. 1, pp. 3-20.
6. Chernous'ko F.L. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1965, vol. 5, no. 6, pp. 1049-1070.
7. Mikishev G.N. *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* (Experimental methods in the dynamics of spacecraft), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 248 p.
8. Greenspan H.P. *The theory of rotating fluids*. London, Cambridge university press, 1968, 327 p.
9. Miles J.W. Free - surface oscillations in a rotating liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, 1959, vol. 2, no. 3, pp. 297-305. DOI: [10.1017/S0022112064000143](https://doi.org/10.1017/S0022112064000143)
10. Zhak S.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1958, vol. XXII, no. 2, pp. 245-249.
11. Kostandyan B.A. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1960, no. 3, pp. 56-64.
12. Derendyaev N.V. *Doklady AN SSSR*, 1983, vol. 272, no. 5, pp. 1073-1076.
13. Derendyaev N.V., Sandolov V.M. *Mashinovedenie*, 1986, no. 1, pp. 19-26.
14. Malashenko S.V., Temchenko M.E. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1960, no. 3, pp. 76-80.
15. Temnov A.N. *Kolebaniya stratifitsirovannoi zhidkosti v ogranichennom ob'eme* (Oscillations of a stratified fluid in a limited volume), Doctor's thesis, Moscow, MVTU, 1983, 192 p.
16. Dokuchaev L.V., Rvalov R.V. *Mekhanika tverdogo tela*, 1973, no. 2, pp. 6-14.
17. Ai Min Vin, Temnov A.N. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55633>

18. Yan Naing OO. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=174605>. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)
19. Temnov A.N., Yan Naing OO. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176845>
20. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>
21. Pak Songi, Grigor'ev V.G. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785>. DOI: [34759/trd-2021-119-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08)
22. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53486>

Статья поступила в редакцию 17.11.2023

Одобрена после рецензирования 27.11.2023

Принята к публикации 25.12.2023

The article was submitted on 17.11.2023; approved after reviewing on 27.11.2023; accepted for publication on 25.12.2023