

УДК 539.4

## Деформация плоской статически неопределимой стержневой системы при потере устойчивости стержней

Гнездилов В.А.\*, Гришанина Т.В.\*\*, Нагорнов А.Ю.\*\*\*

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: gnezdilov\_07@mail.ru*

*\*\*e-mail: t.grishanina@mai.ru*

*\*\*\*e-mail: andrey-nagornov@mail.ru*

### Аннотация

Представлен новый подход для решения геометрически нелинейной задачи статического деформирования плоской стержневой системы. Каждый стержень системы, работающий на растяжение и изгиб и жестко соединенный в узлах с другими стержнями, рассматривается как конечный элемент. Его большие перемещения в составе конструкции характеризуются четырьмя неизвестными координатами концов стержня (узлов, которые он соединяет) и тремя обобщенными координатами, две из которых представляют относительные углы поворота его концов и третья – амплитудное значение формы потери устойчивости защемленного на концах стержня. Таким образом, достаточно точно описывается прогиб стержня с подвижными узлами при его возможной потере устойчивости.

Уравнения статически нелинейной деформируемой системы под действием сил и моментов, приложенных в узлах, получаются на основании принципа

возможных перемещений. Эти уравнения решаются численно с использованием метода Ньютона. Рассмотрен пример расчета.

**Ключевые слова:** стержневые системы, геометрически нелинейное деформирование, большие перемещения, потеря устойчивости.

## Введение

Удлиненные фермы (решетчатые балки) часто используются в различных конструкциях (краны, мачты, мосты, опоры подвесных линий электропередачи, пр.), а также в космических конструкциях, развертываемых или собираемых на орбите. В некоторых случаях такие конструкции могут испытывать большие упругие перемещения с большими углами поворота стержней, например – гибкие мачты при сильном ветре. Если при этом деформации всех элементов конструкции остаются упругими, то после прекращения действия нагрузки она возвращается в свое исходное состояние. Поэтому при проектировании таких конструкций обычно требуется, чтобы при максимальных эксплуатационных нагрузках в них не возникали необратимые деформации и повреждения (трещины).

В статически неопределимых системах допускается потеря устойчивости отдельных сжатых стержней с появлением умеренных конечных прогибов, величины которых ограничены продольными перемещениями («усадкой») и углами поворота в узлах, соединяющих потерявший устойчивость стержень с другими стержнями.

Геометрически и физически нелинейным задачам деформирования, прочности и несущей способности стержневых систем посвящено большое число публикаций с

разработками различных численных и вариационных методов расчета; здесь отметим работы [1-8].

В данной работе предложен новый подход для решения плоской задачи геометрически нелинейного деформирования статически неопределимых стержневых систем при больших перемещениях с учетом потери устойчивости отдельных стержней.

### **Уравнения равновесия при больших перемещениях**

Рассмотрим плоскую ферму (решетчатую конструкцию) произвольной статически неопределимой структуры со стержнями постоянного поперечного сечения, жестко соединенными между собой в узлах. Под действием сил и моментов, приложенных в узлах, ферма может иметь большие перемещения при упругих конечных деформациях стержней. При определенных нагрузках некоторые сжатые стержни могут терять устойчивость с умеренными конечными прогибами, ограниченными продольными перемещениями («усадкой») и углами поворота на концах в узлах. При дальнейшем нагружении такие стержни будут частично участвовать в работе, а усилия в других стержнях статически неопределимой системы будут перераспределяться. Несущая способность фермы будет исчерпана при некоторой критической нагрузке, при которой из-за глобальной неустойчивости группы стержней начинается катастрофическое увеличение перемещений. В качестве предельной эксплуатационной нагрузки можно принять нагрузку, при которой в некотором опасном сечении стержней будет достигнуто появление пластических деформаций.

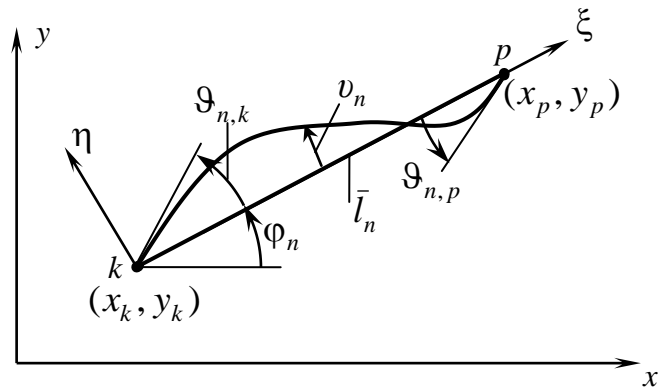


Рис. 1 – Деформированный стержень

Рассмотрим  $n$ -ый стержень (рис. 1) соединяющий узлы  $k$  и  $p$  в исходном недеформированном состоянии с координатами  $x_k^0, y_k^0$  и  $x_p^0, y_p^0$ , соответственно. Длина и угол наклона оси недеформированного стержня в глобальной декартовой системе координат  $x, y$  обозначаются через  $l_n$  и  $\varphi_n^0$  и определяются как

$$l_n = \sqrt{(x_p^0 - x_k^0)^2 + (y_p^0 - y_k^0)^2}, \quad \sin \varphi_n^0 = \frac{y_p^0 - y_k^0}{l_n}, \quad \cos \varphi_n^0 = \frac{x_p^0 - x_k^0}{l_n}. \quad (1)$$

В деформированном состоянии фермы координаты узлов  $k$  и  $p$  будут  $x_k, y_k$  и  $x_p, y_p$ . При больших перемещениях и углах поворота для  $n$ -го стержня будем использовать местную систему координат  $\xi, \eta$  с осью  $\xi$ , проходящей через узлы  $k$  и  $p$ , с началом в узле  $k$ , рис. 1. Расстояние между узлами  $k$  и  $p$  и угол наклона оси  $\xi$  для  $n$ -го стержня в деформированном состоянии будем обозначать через  $\bar{l}_n$  и  $\varphi_n$ ; тогда будем иметь

$$\bar{l}_n = \sqrt{(x_p - x_k)^2 + (y_p - y_k)^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{y_p - y_k}{\bar{l}_n}, \quad \cos \varphi_n = \frac{x_p - x_k}{\bar{l}_n}. \quad (2)$$

При растяжении постоянной продольной силой  $N_n$  и изгибе  $n$ -го стержня постоянного поперечного сечения с учетом нагрева относительная конечная деформация удлинения его оси в квадратичном приближении будет [9]

$$\varepsilon_n = \frac{N_n}{EF_n} = \left( \frac{\bar{l}_n}{l_n} - 1 \right) - \alpha_n t_n^\circ + \frac{1}{2l_n} \int_0^{l_n} \vartheta_n^2 d\xi; \quad \vartheta_n(\xi) \approx v_n'(\xi), \quad (3)$$

где  $EF_n$  – жесткость  $n$ -го стержня на растяжение;  $\alpha_n$ ,  $t_n^\circ$  – коэффициент температурного расширения и превышение температуры по отношению к нормальной температуре (при которой производился монтаж фермы без начальных напряжений);  $\vartheta_n(\xi)$ ,  $v_n(\xi)$  – угол поворота оси стержня и его поперечное перемещение при изгибе с граничными условиями  $v_n(0) = v_n(l_n) = 0$ . Здесь углы поворота  $\vartheta_n$  считаются умеренными при выполнении с необходимой точностью условия  $\cos \vartheta_n \approx 1 - \vartheta_n^2 / 2$ . Практически можно принять  $\max \vartheta \leq 0.5$  рад.

Для использования метода Ритца функцию  $U_n(\xi)$  представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_n} v_n(\xi) &= \vartheta_{n,k} \sigma(\xi) + \vartheta_{n,p} \tau(\xi) + f_n \chi(\xi); & \vartheta_n(\xi) &= v_n'(\xi); \\ \sigma(\bar{\xi}) &= \bar{\xi}(1 - \bar{\xi})^2, \quad \tau(\bar{\xi}) = -\bar{\xi}^2(1 - \bar{\xi}), \quad \chi(\bar{\xi}) = 16\bar{\xi}^2(1 - \bar{\xi})^2; & \bar{\xi} &= \frac{\xi}{l_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Аппроксимация (4) достаточно точно описывает формы и критические значения потери устойчивости сжатого стержня при следующих граничных условиях: шарнир – шарнир; шарнир – заделка; заделка – заделка, а также – при условиях упругого шарнирного закрепления с произвольным коэффициентом угловой жесткости от 0 до  $\infty$ .

Потенциальная энергия растяжения и изгиба  $n$ -го стержня:

$$\Pi_n = \frac{1}{2} EF_n l_n \varepsilon_n^2 + \frac{1}{2} EI_n \int_0^{l_n} v_n''^2 d\xi,$$

где  $EI_n$  – жесткость  $n$ -го стержня на изгиб. С учетом (3) и (4) после вычислений получим:

$$\Pi_n = \frac{1}{2} \frac{l_n}{EF_n} N_n^2 + \frac{1}{2} 4 \frac{EI_n}{l_n} [\vartheta_{n,k}^2 + \vartheta_{n,p}^2 + \vartheta_{n,k} \vartheta_{n,p} + \frac{16^2}{5} f_n^2]; \quad (5)$$

$$\frac{N_n}{EF_n} = \left[ \left( \frac{\bar{l}_n}{l_n} - 1 \right) - \alpha_n t_n^\circ + \frac{1}{15} \langle \vartheta_{n,k}^2 + \vartheta_{n,p}^2 - \frac{1}{2} \vartheta_{n,k} \vartheta_{n,p} + \frac{16^2}{7} f_n^2 + 8(\vartheta_{n,k} - \vartheta_{n,p}) f_n \rangle \right]. \quad (6)$$

Так как нагрузка приложена только к узлам, то обобщенную координату  $f_n$  можно определить, используя уравнение равновесия  $\partial \Pi_n / \partial f_n = 0$ . Получим:

$$f_n = \frac{\kappa_n}{4} (\vartheta_{n,k} - \vartheta_{n,p}); \quad \kappa_n = \frac{7}{16} \frac{N_n}{N_n + P_n^*}, \quad P_n^* = 42 \frac{EI_n}{l_n^2}. \quad (7)$$

Здесь  $P_n^*$  представляет критическую силу сжатия стержня с жестко защемленными краями по форме  $\chi(\xi)$ ; точное решение для этого случая дает  $P^* = 4\pi^2 EI / l^2 = 39.48 EI / l^2$ . Необходимо, чтобы для всех стержней фермы выполнялось условие  $N_n + P_n^* > 0$  наряду с условиями отсутствия пластических деформаций и умеренности конечных углов поворота за счет изгиба ( $\max \vartheta \leq 0.5$  рад).

После исключения обобщенной координаты  $f_n$  с использованием (7) выражения (5), (6) записываются в виде

$$\Pi_n = \frac{1}{2} 4 \frac{EI_n}{l_n} \left[ \left( 1 + \frac{16}{5} \kappa_n^2 \right) (\vartheta_{n,p} - \vartheta_{n,k})^2 + 3 \vartheta_{n,k} \vartheta_{n,p} \right]; \quad (8)$$

$$\frac{N_n}{EF_n} = \left[ \left( \frac{\bar{l}_n}{l_n} - 1 \right) - \alpha_n t_n^\circ + \frac{1}{15} \left\langle (1 - 2\kappa_n + \frac{16}{7}\kappa_n^2) (\vartheta_{n,p} - \vartheta_{n,k})^2 + \frac{3}{2} \vartheta_{n,k} \vartheta_{n,p} \right\rangle \right]. \quad (9)$$

При этом изгибающие моменты на краях  $n$ -го стержня и поперечная сила (рис. 2) будут:

$$\begin{aligned} -M_{n,k} &= d_n \vartheta_{n,k} + e_n \vartheta_{n,p}, & M_{n,p} &= e_n \vartheta_{n,k} + d_n \vartheta_{n,p}, \\ Q_n &= \frac{1}{\bar{l}_n} (M_{n,p} - M_{n,k}) = \frac{1}{\bar{l}_n} (d_n + e_n) (\vartheta_{n,k} + \vartheta_{n,p}); \\ d_n &= 4 \frac{EI_n}{l_n} + \frac{2}{15} N_n l_n (1 - \kappa_n), & e_n &= 2 \frac{EI_n}{l_n} + \frac{2}{15} N_n l_n \left( \kappa_n - \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через  $\psi_k$  и  $\psi_p$  полные углы поворота  $k$ -го и  $p$ -го узлов при деформировании фермы. Тогда из условий жесткого соединения концов  $n$ -го стержня с этими узлами  $\Delta\varphi_n + \vartheta_{n,k} = \psi_k$ ,  $\Delta\varphi_n + \vartheta_{n,p} = \psi_p$  получим

$$\vartheta_{n,k} = \psi_k - \Delta\varphi_n, \quad \vartheta_{n,p} = \psi_p - \Delta\varphi_n; \quad \Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_n^0. \quad (11)$$

Здесь  $\Delta\varphi_n$  зависит от неизвестных координат  $x_k$ ,  $y_k$  и  $x_p$ ,  $y_p$  согласно соотношениям (2). Поэтому углы  $\vartheta_{n,k}$  и  $\vartheta_{n,p}$  выражаются через эти координаты и углы  $\psi_k$  и  $\psi_p$ ; при этом  $\vartheta_{n,p} - \vartheta_{n,k} = \psi_p - \psi_k$ .

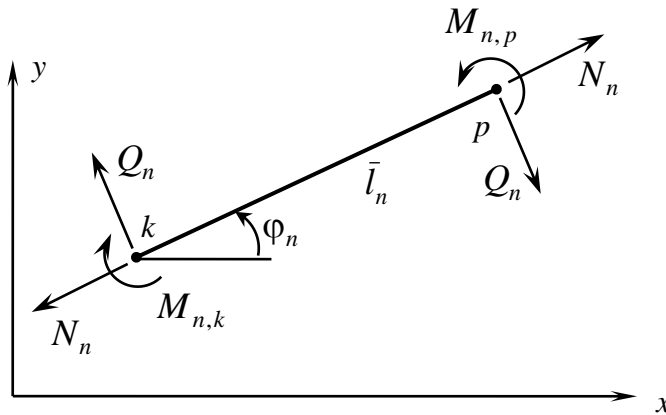


Рис. 2 – Силовые факторы, действующие на  $n$ -й стержень

Вариация работы сил  $X_k, Y_k$ , направленных вдоль координатных осей  $x, y$ , и моментов  $H_k$ , приложенных в  $s$  узлах  $k = 1, 2, 3, \dots, s$ :

$$\delta A = \sum_k (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + H_k \delta \psi_k). \quad (12)$$

Система уравнений равновесия узлов фермы в деформированном состоянии получается на основании принципа возможных перемещений  $\delta \Pi = \delta A$ , где

$$\Pi = \sum_n \Pi_n :$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} = X_k, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} = Y_k, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_k} = H_k, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (13)$$

С учетом (2), (8), (10), (11) эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} - \sum_n (N_n \cos \varphi_n + Q_n \sin \varphi_n) &= X_k, \\ \sum_n (N_n \sin \varphi_n - Q_n \cos \varphi_n) &= Y_k, \\ \sum_n M_{n,k} &= H_k; \quad (k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь суммирование по  $n$  производится по стержням, соединенным с узлом  $k$ .

Для решения полученной системы  $3s$  нелинейных алгебраических уравнений могут быть использованы различные подходы и численные методы: метод итераций; метод Ньютона; метод последовательных нагружений с увеличением нагрузки на каждом шаге; сведение к начальной задаче интегрирования по времени квазистатических дифференциальных уравнений для  $x_k(t), y_k(t), \psi_k(t)$ , полученных из (14) путем введения условного демпфирования ( $X_k \rightarrow X_k(t) - v_k \dot{x}_k$ ,  $Y_k \rightarrow Y_k(t) - v_k \dot{y}_k$ ,  $H_k \rightarrow H_k(t) - \mu_k \dot{\psi}_k$ ), где  $v_k, \mu_k$  – некоторые заданные



коэффициенты демпфирования. Для численной реализации указанных подходов могут быть использованы известные вычислительные программы.

### Пример расчета

В качестве примера рассмотрим ферму, состоящая из 4-х одинаковых секций с одинаковыми площадями  $F$  и моментами инерции  $I$  поперечных сечений всей стержней при следующих исходных данных:  $a = 1$  м,  $E = 7 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $F = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>,  $I = (1/3) \cdot 10^{-9}$  м<sup>4</sup>, рис. 3. Ферма нагружается силой  $Y_7 = -P$ , приложенной в узле 7.

Решения системы нелинейных алгебраических уравнений (14) было получены по методу Ньютона.

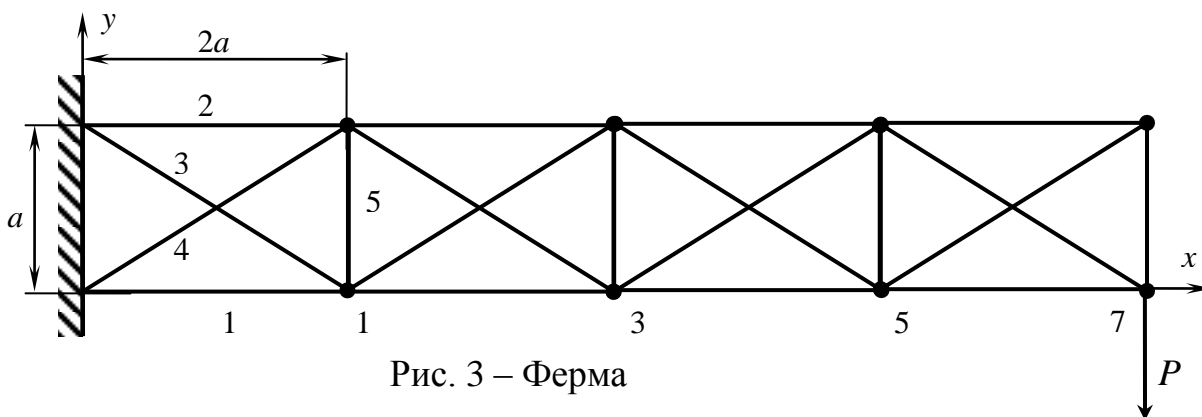


Рис. 3 – Ферма

На рис. 4 и 5 приведены графики перемещений 7-го узла относительно исходного положения вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Сплошными линиями показаны результаты, полученные без учета обобщенных координат  $f_n$ , представляющих формы потери устойчивости стержней, а пунктирными – полученные с учетом  $f_n$ .

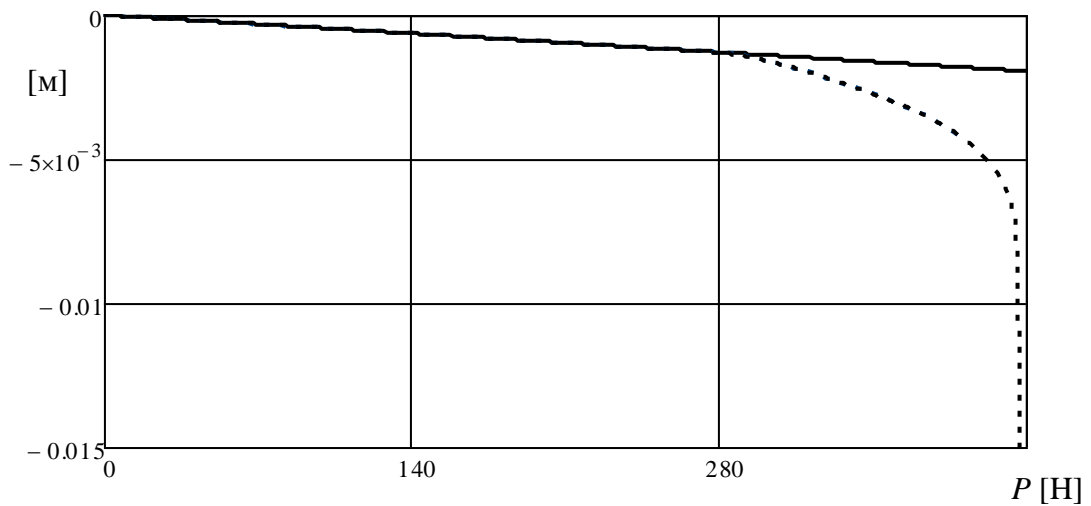


Рис. 4 – График перемещения 7-го узла вдоль оси  $x$

На рис. 6 и 7 изображены графики усилий, возникающих в стержнях 2, 3 и в сжатых стержнях 1, 4, 5, соответственно, при увеличении силы  $P$ . Сплошными линиями показаны результаты, полученные при  $f_n = 0$ , а пунктирными линиями – с учетом  $f_n$ , т.е. с учетом потери устойчивости стержней.

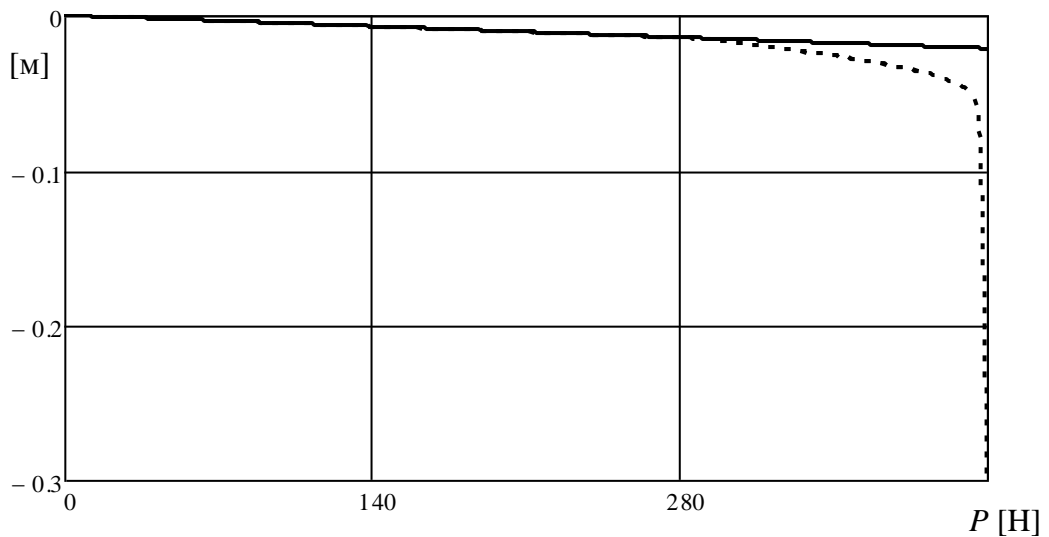


Рис. 5 – График перемещения 7-го узла вдоль оси  $y$

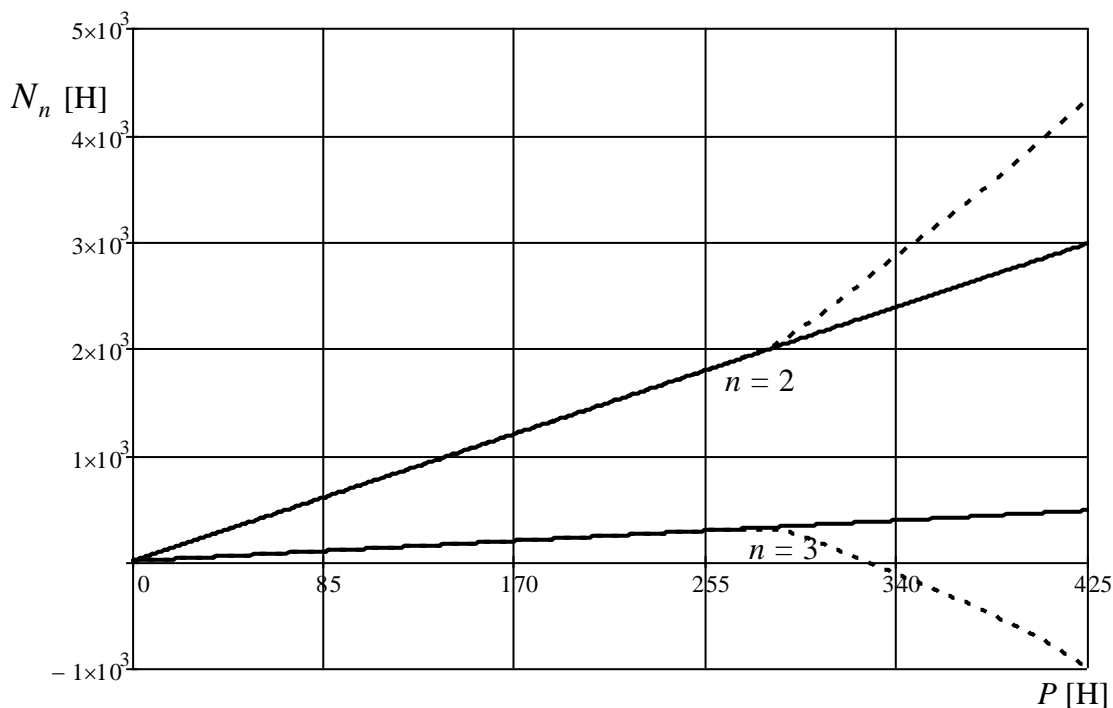


Рис. 6 – Графики усилий в стержнях 2 и 3

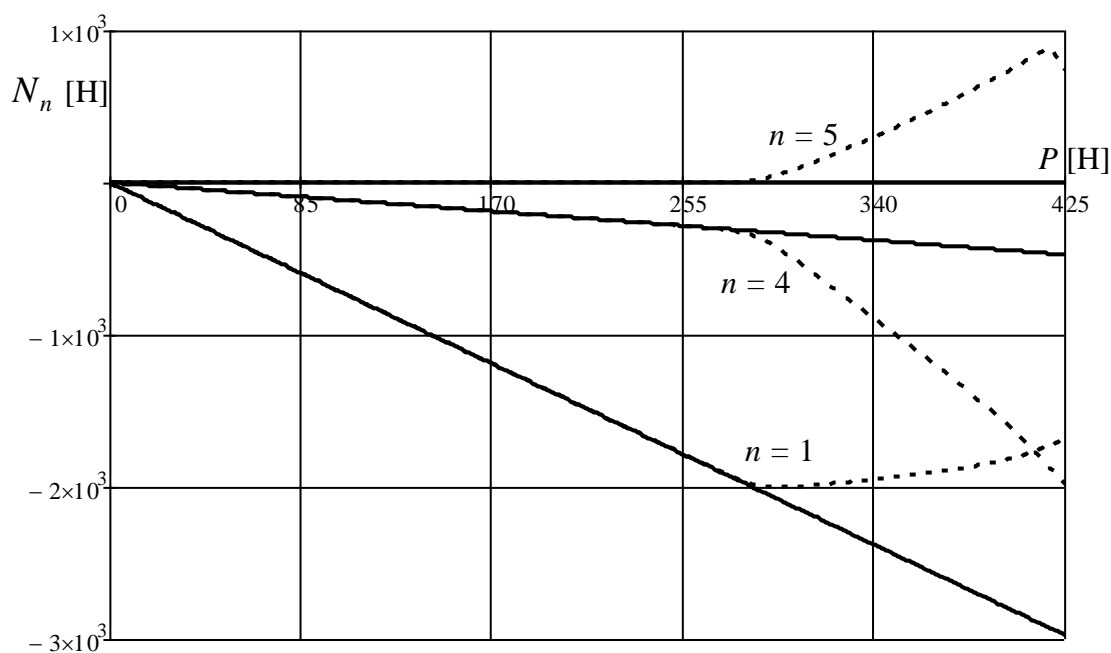


Рис. 7 – Графики усилий в стержнях 1, 4, 5

В рассмотренном примере сначала теряет устойчивость стержень 1, а затем при малом увеличении силы  $P$  происходит потеря устойчивости диагонального

стержня 4, которая сопровождается потерей несущей способности системы в целом. При других параметрах системы возможны последовательные неустойчивости различных сжатых стержней при увеличении нагрузки.

### **Выводы**

Представленный новый подход для решения геометрически нелинейной задачи статического деформирования плоской стержневой системы, позволяет получить решение для стержневой системы с учетом потери устойчивости отдельных её элементов.

### **Библиографический список**

1. Воронцов Г.В., Петров И.А., Алексеев С.А. Матрицы жесткости пространственно загруженных нелинейно деформируемых стержней. Часть 1 // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2008. № 2. С. 15-17.
2. Воронцов Г.В., Петров И.А., Алексеев С.А. Матрицы жесткости пространственно загруженных нелинейно деформируемых стержней. Часть 2 // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2008. № 4. С. 68-72.
3. Воронцов Г.В., Кабельков А.Н. Алгоритмы расчета напряженного состояния геометрически нелинейно деформируемых тонкостенных стержней // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2008. № 3. С. 41-45.
4. Ефрюшин С.В., Викулов М.А. Исследование несущей способности стержневых систем, применяемых в мостостроении по методу предельного равновесия // Строительная механика и конструкции. 2010. № 1. С. 9-17.

5. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832>

6. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. для вузов. Статика. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.

7. Шклярчук Ф.Н. Упругодинамические континуальные модели длинных ферм регулярной структуры // Известия РАН. Механика твердого тела. 1994. № 1. С. 156-163.

8. Шклярчук Ф.Н. К расчету деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 140-146.

9. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и параметрические колебания упругих системю. - М.: Изд-во МАИ, 1993. – 68 с.