

Труды МАИ. 2023. № 128
Trudy MAI, 2023, no. 128

Научная статья
УДК 62.752, 621.534, 629.4.015, 51-74, 517.442
DOI: [10.34759/trd-2023-128-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-05)

КАРТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ В ОЦЕНКЕ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Андрей Владимирович Елисеев¹, Николай Константинович Кузнецов² Артем Сергеевич Миронов³

^{1,2}Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

^{1,3}Иркутский государственный университет путей сообщения,
Иркутск, Россия

¹eavsh@ya.ru

²knik@istu.edu

³art.s.mironov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается проблема оценки, контроля и формирования динамических режимов колебаний технических объектов транспортного и технологического назначения. Цель исследования заключается в разработке методологии оценки динамических состояний механических колебательных систем, используемых в качестве расчётных схем технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений. Используются методы структурного математического моделирования. В рамках структурной методологии механической

колебательной системе сопоставляется схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Для оценки динамических состояний проводится регуляризация бесконечного семейства амплитудно-частотных характеристик с помощью конечного множества динамических инвариантов. Разработан метод оценки разнообразия динамических состояний параметрического множества механических колебательных систем, образованных твердым телом, находящимся в условиях вибрационного нагружения силовой природы.

Ключевые слова: механические колебательные системы, связанные возмущения, динамическая податливость, динамические инварианты

Для цитирования: Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Карты динамических инвариантов в оценке режимов движений механических колебательных систем // Труды МАИ. 2023. № 128. DOI: [10.34759/trd-2023-128-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-05)

Original article

MAPS OF DYNAMIC INVARIANTS IN THE ESTIMATION OF MODES OF MOTION OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS

Andrey V. Eliseev¹, Nikolay K. Kuznetsov², Artem S. Mironov³

^{1,2}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

^{1,3}Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

¹eavsh@ya.ru

²knik@istu.edu

³ **Abstract.** The scientific and methodological foundations for the dynamics problems solving of technological and transport facilities operating under conditions of increased vibrational dynamic loads are being developed. The purpose of the proposed research consists in developing methodological approaches for the assessment, control, formation and management of dynamic states of technical objects (machines, equipment, working bodies of vibrating technological machines), which design schemes of are being displayed in the form of mechanical oscillatory systems with several degrees of freedom.

The studies are based on employing and developing analytical apparatus of system analysis and its applications to the problems of machine dynamics, protection of equipment and devices from vibration effects, which forms the basis of approaches to ensuring safety, reliability of operation of technical means, ensuring the dynamic quality of technological machines.

The article considered the issues of the development of ideas on the generalized states of mechanical oscillatory systems formed by solids under conditions of coherent vibrational loads of a forceful nature, which dynamic state of is being determined based on the dynamic malleability of points distributed over the surface.

The authors suggest considering the so-called dynamic invariant, reflecting the essential features of the mechanical oscillating system dynamic states aggregate in the form of oriented graphs, as a generalized dynamic state. The number of its of vertices and arcs are equal to the number of resonances, frequencies of amplitudes zeroing , as well as positive and negative forms of the elements dynamic interactions.

The article shows that an infinite set of amplitude-frequency characteristics can be juxtaposed with a finite set of dynamic invariants. The general aggregate of dynamic invariants can be constructed based on the zeroing frequency functions, which can be set implicitly by zeroing the transfer function numerator, interpreted as dynamic compliance within the framework of the problem under consideration. The zeroing frequency function juxtaposes the frequency of external force disturbances with the variation parameters of the system, on which the dynamic compliance is being zeroed, assuming that the zeroing frequency does not coincide with the natural oscillation frequency of the system.

The article demonstrates that the aggregate of dynamic states corresponding to the simultaneous variation of two system parameters may be displayed by the dynamic invariants chart, splitting the plane of two variation parameters into the finite aggregate of non-intersecting areas, boundaries and planes with potentially different dynamic variables. It shows, in particular, that infinite diversity of dynamic states of mechanical oscillations may be represented in the form of finite set of generalized dynamic states.

Keywords: mechanical oscillatory systems, connected perturbations, dynamic compliance, dynamic invariants

For citation: Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. Maps of dynamic invariants in the estimation of modes of motion of mechanical oscillatory systems. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. DOI: [10.34759/trd-2023-128-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-05)

Введение

Проблемы обеспечения динамического качества, надежности, безопасности работы технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационного нагружения, определяют задачи в области машиноведения, теории механизмов и машин, динамики и прочности, теоретической механики, теории колебаний и математического моделирования [1-4].

В настоящее время получили значительное развитие математическое моделирование технических объектов, расчётные схемы которых интерпретируются в рамках теории цепей, теории графов, теории автоматического управления, теории колебаний, прикладного системного анализа [5-6]. Структурное математическое моделирование, в рамках которого расчётной схеме виде механической колебательной системы сопоставляется схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления, получило развитие в задачах оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения силовой природы. Для широкого класса задач моделирования существенных свойств технических объектов значительное распространение получили механические колебательные системы [7-15]. Оценки динамических состояний технического объекта может быть реализована на основе передаточных функции структурных схем систем автоматического управления. Использование передаточных функций, характеризующих амплитуды установившихся колебаний обобщенных координат механических колебательных систем, может быть оправдано в решении задач, в которых динамические состояния

технических объектов определяются уровнем вибрации с учетом взаимодействия элементов [6].

Для оценки динамических состояний механических колебательных систем предлагается концепция динамических инвариантов, представляющая собой метод регуляризации бесконечного семейства динамических состояний с помощью конечного набора динамических инвариантов, отражающих количество динамических особенностей в виде критических состояний и форм динамических взаимодействий. В рамках концепции динамических инвариантов для систем, находящихся в условиях связанных силовых нагружений, разнообразие динамических состояний может быть представлено интегральной характеристикой, которая каждому значению коэффициента связности силовых возмущений сопоставляет набор количественных характеристик совокупности динамических состояний [16-18].

В условиях связанных силовых нагружений для систем, образованных твердыми телами, состояния которых определяются на основе семейства динамических податливостей точек, распределённых по поверхности, совокупность обобщенных динамических состояний может быть отображено так называемой картой динамических инвариантов, представляющей собой параметрическое множество интегральных характеристик или распределение количественных характеристик обобщенных динамических состояний по плоскости параметров. Карта динамических инвариантов каждой паре коэффициента связности и координаты точки, на основе которой оценивается динамическое состояние системы,

сопоставляет совокупность динамических характеристик системы в виде числа режимов динамического гашения, числа резонансов и количества знакоопределенных форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы. В работе [18] построены границы карты динамических инвариантов для коэффициентов связности силовых возмущений и координат точек, на основе которых оценивается частичная совокупность динамических состояний системы.

Вместе с тем, режимы динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы ещё не получили должной детализации в рамках представлений о распределении по множествам карты динамических инвариантов.

Предлагаемая статья посвящена вопросам оценки динамических состояний механических колебательных систем, образованных твердым телом, на основе построения карты динамических инвариантов, охватывающей малые и большие значения коэффициента связности силовых возмущений.

I. Основные положения. Постановка задачи.

Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом массой M и моментом инерции J , совершающим малые вынужденные установившиеся колебания под воздействием связанных синфазных гармонических возмущений Q_1, Q_2 :

$$Q_2 = \gamma Q_1, \quad (1)$$

где γ – коэффициент связности возмущений Q_1, Q_2 , приложенных в точках $t.A$ и $t.B$ на расстояниях l_1, l_2 от центра тяжести в $t.O$ (рис.1а).

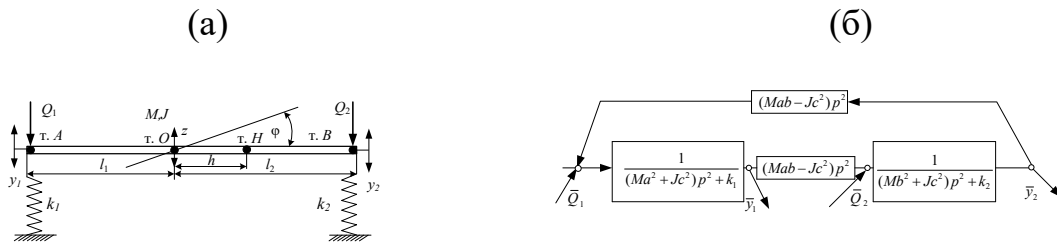


Рис. 1. Механическая колебательная система. (а) – расчетная схема, (б)

– структурная схема, где $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения, символ «-» над переменной обозначает изображение

Лапласа[19, 20]

Под воздействием связанных возмущений Q_1, Q_2 твердое тело совершает малые вынужденные колебания на частоте внешних возмущений. Динамическое состояние твердого тела может быть оценено на основе движения некоторой фиксированной точки, находящейся на линии AB . В качестве динамической характеристики движения механической колебательной системы может быть рассмотрена динамическая податливость, представляющая собой отношение амплитуды колебания фиксированной точки к амплитуде колебания внешнего возмущения Q_1 . Коэффициент связности и координата точки, на основе которой оценивается динамическое состояние твердого тела, могут рассматриваться как параметры совокупности динамических состояний. Для фиксированного коэффициента связности и для фиксированной точки твердого тела, положение которой определяется некоторой координатой, можно сопоставить множество динамических податливостей, в общем случае, зависящих от частот внешних возмущений. Вместе с тем, полная совокупность динамических податливостей, определяемых множеством

частот внешних возмущений, может быть оценена с обобщенной точки зрения путем учета существенных характеристик, отображающих количества режимов обнуления, резонансов и форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы.

Задача заключается в разработке метода оценки разнообразия обобщенных динамических состояний механической колебательной системы, образованной твердым телом, находящимся в условиях связанных вибрационных нагружений, состояния которого характеризуются динамическими податливостями, зависящими от частот внешнего возмущения, коэффициентов связности внешних силовых возмущений и координат точек, на основе которых оценивается динамическое состояние твердого тела.

II. Математическая модель.

На основе известных методов [3, 5, 19], использующих формализм Лагранжа, по расчетной схеме может быть построена система дифференциальных уравнений движения в обобщенных координатах $\{y_1, y_2\}$, где y_1, y_2 - смещения тт. A и B твердого тела относительно положения статического равновесия, или в координатах $\{\varphi, z\}$, где φ – угол поворота твердого тела относительно центра тяжести, z – величина вертикального смещения центра тяжести относительно положения статического равновесия (рис.1а). Системы координат $\{y_1, y_2\}$ и $\{\varphi, z\}$ связаны зависимостями

$$\begin{cases} z = ay_1 + by_2 \\ \varphi = c(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (2), \quad \begin{cases} y_1 = z - l_1\varphi \\ y_2 = z + l_2\varphi \end{cases}, \quad (3)$$

$$\text{где } a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}; c = \frac{1}{l_1 + l_2}.$$

В свою очередь, система дифференциальных уравнений Лапласа 2-ого рода может быть преобразована под действием интегральных преобразований Лапласа с учетом нулевых начальных условий в систему алгебраических уравнений и приведена к структурной схеме системы автоматического управления (рис.1б). По структурной схеме могут быть построены передаточные функции системы:

$$W_{11}(p, \gamma) = \left. \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} \right|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - \gamma(Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (4)$$

$$W_{21}(p, \gamma) = \left. \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} \right|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)\gamma - (Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (5)$$

где $A(p) = ((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - ((Mab - Jc^2)p^2)^2$.

Передаточные функции (4),(5) системы (рис.1) представляют собой динамические податливости, в смысле зависимости от частоты внешнего возмущения, системы в т. A и т. B . Оценка динамического состояния твердого тела в условиях вибрационного нагружения для фиксированного коэффициента связности γ может быть реализована на основе оценки динамических податливостей в точках, распределенных по твердому телу. Если зафиксировать координату h т. H , на основе которой оценивается состояние твердого тела, то соответствующая динамическая податливость может быть представлена передаточной функцией:

$$W_h(p) = (a - ch)W_{11}(p) + (b + ch)W_{21}(p), \quad (6)$$

Соответствующая амплитудно-частотная характеристика передаточной функции определяется выражением:

$$A_h(\omega, \gamma) = W_h(p) \Big|_{p=j\omega}, \quad (7)$$

представляющем собой дробно-рациональное выражение, числитель и знаменатель которого являются многочленами частоты внешнего возмущения.

Коэффициент связности γ и координата h , используемые для оценки динамических состояний, рассматриваются как параметры семейства амплитудно-частотных характеристик (7).

В свою очередь, бесконечное многообразие амплитудно-частотных характеристик (7) может быть регуляризовано с помощью разбиения на конечный набор классов, обладающих постоянным на некотором множестве существенных характеристик в виде количества частот обнуления, резонансов и знакопостоянных форм динамических взаимодействий. Такие классы, условно называемые динамическими инвариантами, могут быть определены на основе частотной функции обнуления, представляющей собой частоту, обнуляющей числитель амплитудно-частотной характеристики:

$$\omega^2(\gamma, h) = \frac{c(k_1\gamma - k_2)h + (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)h + Jc^2(\gamma + 1)}. \quad (8)$$

Частотная функция обнуления (8) для фиксированного коэффициента связности γ позволяет построить совокупность динамических инвариантов на основе определения граничных значений, которые находятся из условий совпадения

частотной функции с нулем, с собственными частотами системы и из условия обращения частотной функции в бесконечность(рис.2).

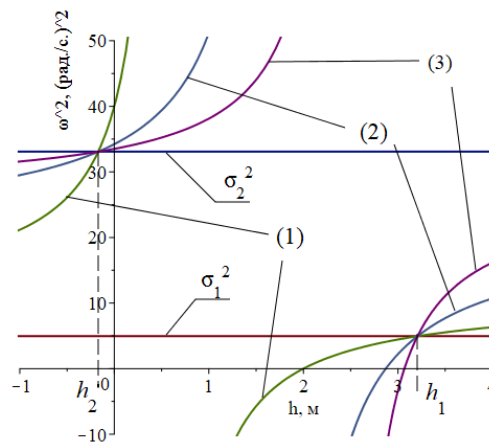


Рис. 2. Частотные функции обнуления для фиксированных значений коэффициентов связности γ : (1) – $\gamma=0$; (2) – $\gamma=0.3$; (3) – $\gamma=0.35$

Вместе с тем, для регуляризации семейства амплитудно-частотных характеристик, зависящих от не от одного, а от двух параметров на основе частотной функции обнуления могут быть построены границы областей на множестве параметров (γ, h)

$$h_0(\gamma) = -\frac{bk_1\gamma + ak_2}{c(k_1\gamma - k_2)}, \quad (9)$$

$$h_{kp}(\gamma) = -\frac{Jc^2(\gamma + 1)}{Mc(a\gamma - b)}, \quad (10)$$

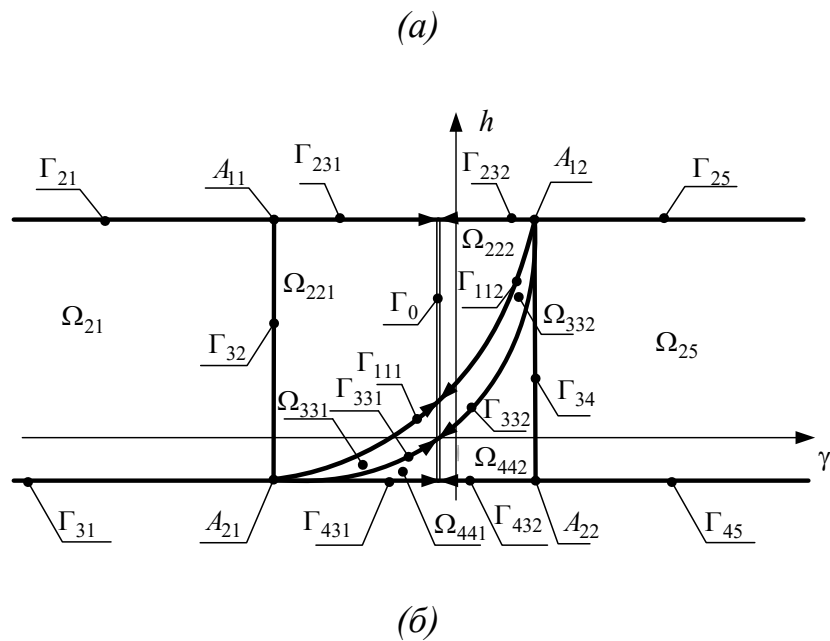
$$h_1(\gamma) = -\frac{Jc^2(\gamma + 1)\sigma_1^2 - (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)\sigma_1^2 - c(k_1\gamma - k_2)}, \quad (11)$$

$$h_2(\gamma) = -\frac{Jc^2(\gamma + 1)\sigma_2^2 - (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)\sigma_2^2 - c(k_1\gamma - k_2)}, \quad (12)$$

где σ_1, σ_2 – собственные частоты системы. Можно показать, что функции граничных значений (11),(12) представляют собой постоянные значения.

III. Построение карты динамических инвариантов.

Частотная функция обнуления позволяет границы областей параметров, в которых динамические инварианты сохраняют свои значения. Разбиение множества параметров $\Omega = [-\infty, \infty] \times [h_1, h_2]$ на множества, в которых динамические инварианты сохраняют свои значения, представляет своеобразную карту динамических инвариантов (рис.4).



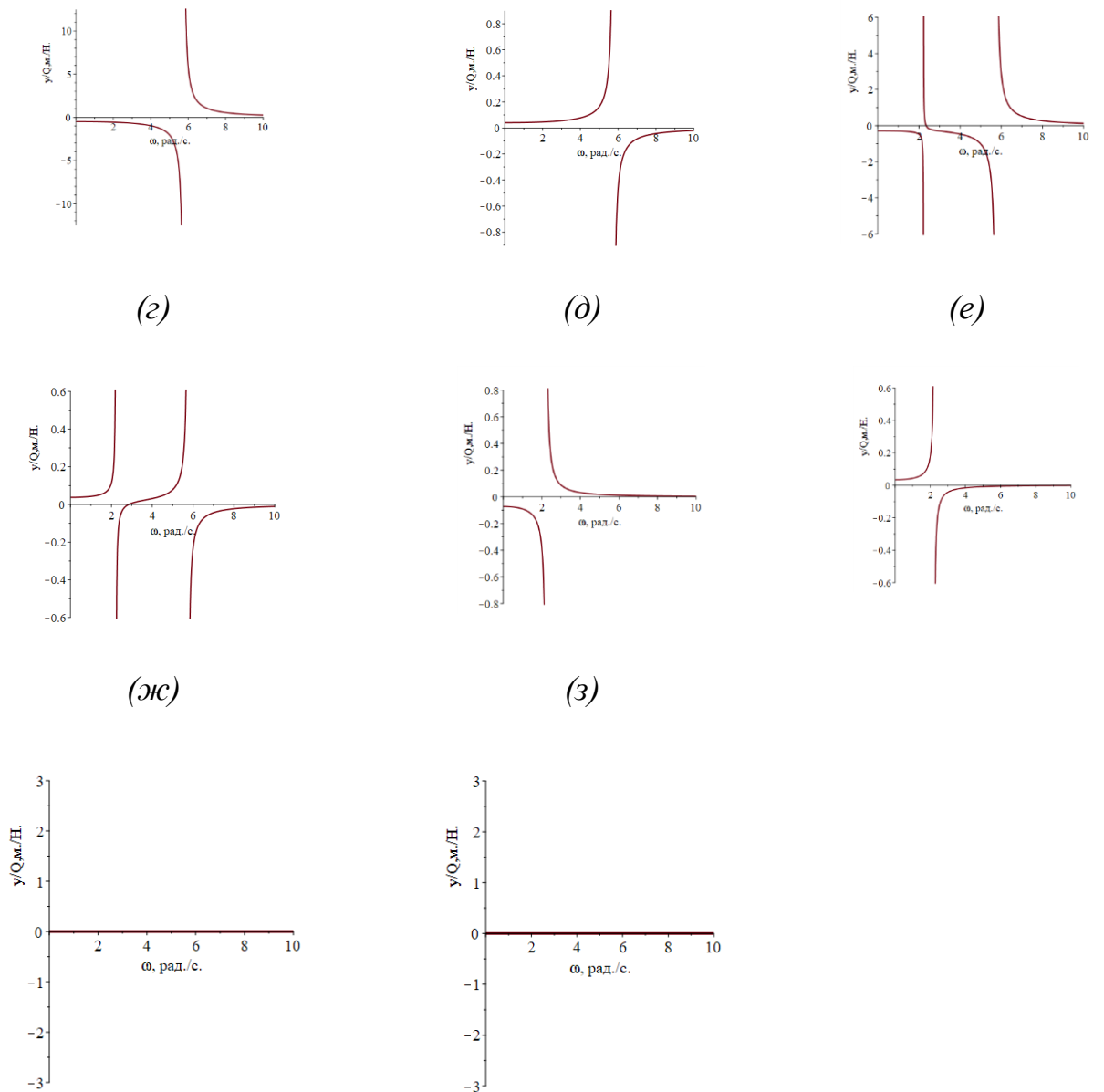


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики передаточной функции W_h

элементов разбиения: (а) $\Gamma_{21}, S_0^1 F_1^1(J_3), \gamma = -13.94, h = 3.20$; (б) $\Gamma_{25}, S_0^1 F_1^1(J_3), \gamma = 1.52, h = 3.20$; (в) $\Omega_{21}, S_1^2 F_2^2(J_7), \gamma = -13.94, h = 1.51$; (г) $\Omega_{25}, S_1^2 F_2^2(J_7), \gamma = 1.52, h = 1.51$; (д) $\Gamma_{31}, S_0^1 F_1^1(J_3), \gamma = -13.94, h = -0.17$; (е) $\Gamma_{45}, S_0^1 F_1^1(J_3), \gamma = 1.52, h = -0.17$; (ж) $A_{21}, S_\infty^0 F_0^0(J_\infty), \gamma = -3.48, h = -0.17$; (з) $A_{12}, S_\infty^0 F_0^0(J_\infty), \gamma = 0.38, h = 3.2$

Амплитудно-частотные характеристики, существенными особенностями которых является наличие единственного разрыва второго рода, отображающего

единственный резонанс, и две знакоопределенные ветви графиков, отображающие одну положительную и одну отрицательную формы динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, представляются динамическими инвариантами с набором частных характеристик в виде $S_0^1 F_1^1$ и полной характеристикой J_3 (рис.4а, рис.4б, рис.4д, рис.4е), которые сохраняются на определенных множествах карты (рис.3). В частности, на границе Γ_{21} , амплитудно-частотная характеристика с параметрами $\gamma = -13.94$, $h = 3.20$ м. отображает динамический инвариант с набором частных характеристик $S_0^1 F_1^1$. В точках A_{21} и A_{12} реализуется режим тождественного равенства амплитудно-частотной характеристики нулю (рис.4ж, рис.4з). Режим, обеспечивающий тождественное равенство нулю амплитудно-частотной характеристики, может быть интерпретирован как бесконечное количество частот обнуления амплитуды колебания координаты объекта, и поэтому может быть обозначен выражением $S_\infty^0 F_0^0$ с полной характеристикой J_∞ .

IV. Некоторые возможности интерпретации карты динамических взаимодействий.

Внешние связные силовые возмущения $\{Q_1, Q_2\}$ для коэффициента связности $\gamma \neq -1$ (рис.1а) могут быть приведены к одиночному силовому возмущению Q_0 , приложенному к т.С₀, расположенной на расстоянии l_0 от центра тяжести (рис.5).

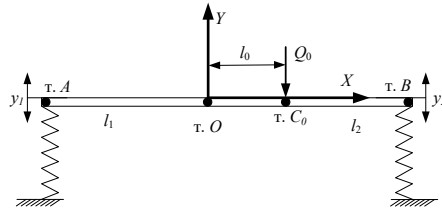


Рис. 5. Механическая колебательная система: Q_0 – приведенное к т. C_0 силовое возмущение

Силовое возмущение Q_0 и координата точки приложения силового возмущения l_0 могут быть определены из условий совпадения главного вектора и главного момента систем сил $\{Q_1, Q_2\}$ и $\{Q_0\}$ относительно центра т. O :

$$\begin{cases} Q_0 = Q_1 + Q_2 \\ -cl_0Q_0 = bQ_1 - aQ_2 \end{cases}, \quad (13)$$

где $Q_2 = \gamma Q_1$ – связанные силовые возмущения.

Одиночное силовое возмущение Q_0 , приложенным к точке т. C_0 на расстоянии l_0 от центра т. O , определяется выражением:

$$Q_0 = (\gamma + 1) Q_1, \quad (14)$$

где $l_0 = \frac{a\gamma - b}{c(1 + \gamma)}$ - представляет собой координату приложения приведенной силы.

В свою очередь, координата l_0 т. C_0 приложения приведенной силы Q_0 может рассматриваться как функция $l_0(\gamma)$ коэффициента связности, график которой терпит разрыв второго рода для значения $\gamma = -1$ (рис.6).

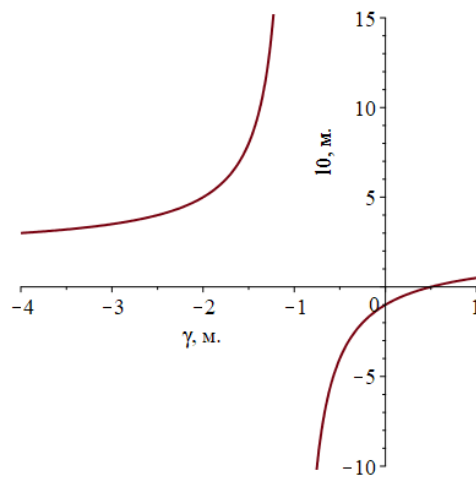


Рис. 6. Связь между параметрами l_0 и γ

График связи $l_0(\gamma)$ позволяет коэффициенту связности γ внешних силовых возмущений сопоставить координату l_0 приложения приведенного силового возмущения Q_0 (рис.6).

Связь $l_0=l_0(\gamma)$ может быть использована для преобразования карты динамических инвариантов $\gamma \in [-\infty, \infty]$, $h \in [h_1, h_2]$ (рис.4) в множество $l_0 \in [-\infty, \infty]$, $h \in [h_1, h_2]$ (рис.7). Преобразование карты динамических инвариантов предполагает отображение областей Ω_{ij} в области Ω'_{ij} , границ Γ_{ij} в Γ'_{ij} и точек A_{ij} в A'_{ij} (рис.5, рис.7).

Вместе с тем, необходимо отметить, что результат преобразования карты динамических инвариантов, заданных на множестве параметров $(\gamma, h) \in [-\infty, \infty] \times [h_1, h_2]$, в разбиение, заданное на множестве $(l_0, h) \in [-\infty, \infty] \times [h_1, h_2]$, не является в полном смысле картой динамических инвариантов, так как не учитывается коэффициент $(\gamma+1)$.

(a)

Анализ исходной карты динамических инвариантов и преобразованной карты динамических инвариантов позволяет обнаружить специфические режимы динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем и определить их особенности.

**V. Оценка специфических динамических режимов движения
механической колебательной системы на основе преобразованной карты
динамических инвариантов.**

В качестве первичного анализа могут быть оценены специфические динамические режимы, которые соответствуют точкам A'_{12} и A'_{21} преобразованной карты динамических инвариантов (рис.7). В точках A'_{12} и A'_{21} реализуются режимы тождественного равенства нулю динамической податливости. Тождество нулю амплитудно-частотной характеристики (рис.4ж, рис.4з) означает, что на поверхности твердого тела существует точка с фиксированной координатой, амплитуда которой равна нулю для любой частоты внешнего возмущения при условии, что возмущающее силовое воздействие приложено к определенной точке. Движение системы для динамического инварианта J_∞ может быть интерпретировано, как приведение одного из упругих элементов с конечной податливостью к упругому элементу с нулевой податливостью (рис.8а, рис.8б).

(а)

(б)



Рис. 8. Приведенные системы, обладающие динамическим инвариантом J_∞ . (а)

- для точки A'_{21} , (б) - для точки A'_{12}

Особенностью режима движения при условии реализации динамического инварианта J_∞ является тот факт, что узел колебания твердого тела не зависит от частоты внешнего возмущения.

Дополнительно следует отметить, что на карте динамических инвариантов реализуются совокупности динамических состояний $S_0^1 F_1^1$, $S_0^2 F_1^2$, исключающих обнуление амплитуд колебания, и $S_1^2 F_2^2$, $S_1^2 F_1^2$, допускающие обнуления амплитуд колебания.

Вместе с тем, можно полагать, что наравне с режимом обнуления амплитуды фиксированной точки, координата которой не зависит от частоты внешнего возмущения, существуют режимы, когда координата точки, в которой реализуется режим обнуления амплитуды колебания, зависит от частоты внешнего возмущения.

Заключение.

В рамках методологии структурного математического моделирования разработана концепция динамических инвариантов с целью оценки обобщенных состояний механических колебательных систем, находящихся в условиях связанных вибрационных возмущений силовой природы, динамическое состояния которых

определяется на основе динамических податливостей точек, распределенных по поверхности твердого тела. Концепция динамических инвариантов предполагает, что состояние механических колебательных систем может быть оценено в терминах динамических инвариантов, отображающих существенные особенности динамических состояний в виде количества режимов обнуления амплитуд, резонансов и знакоопределенных форм динамических взаимодействий. Для оценки разнообразия обобщенных динамических состояний строится карта динамических инвариантов, представляющая собой совокупность множеств, на которых динамические инварианты сохраняют свои значения. Основными элементами карты динамических инвариантов являются области, границы областей и точки пересечения границ, в которых совокупности динамических особенностей сохраняются. Показано, что карта динамических инвариантов может быть преобразована в результате перехода от коэффициента связности внешних силовых возмущений к координате приложения одиночного силового возмущения. Показано, что существуют специфические динамические состояния механических колебательных систем, отличающиеся тем, что координата точки, в которой реализуются режимы обнуление амплитуды колебания, не зависит от частот внешнего возмущения.

Таким образом, разработан системный подход к оценке обобщенных динамических состояний механических колебательных систем, образованных твердым телом, находящимся в условиях связанных вибрационных нагружений, динамическое состояние которого оценивается на основе совокупности динамических податливостей точек, распределенных по поверхности.

Список источников

1. Clarence W. de Silva. *Vibration: Fundamentals and Practice*. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006, 1064 p.
2. Karnovsky I.A., Lebed E. *Theory of Vibration Protection*, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, 708 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. *Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects*. Series: Studies in Systems, Decision and Control, vol. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
4. Доронин С.В., Шокин Ю.И., Лепихин А.М., Москвичев В.В. *Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем*. - Новосибирск: Наука, 2005. – 249 с.
5. Елисеев С.В. *Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография*. - Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.
6. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. *Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин*. – Новосибирск: Наука, 2021. - 679 с.
7. Banakh L., Kempner M. *Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 262 p.

8. Harris S.M., Srede E. Shock and Vibration Handbook, New York, McGraw - Hill Book So, 2009, 1168 p.
9. Iwnicki Simon. Handbook of railway vehicle dynamics, CRC Press Taylor amp, Francis Group, 2006, 527 p.
10. Большаков Р.С. Особенности вибрационных состояний транспортных и технологических машин. Динамические реакции и формы взаимодействия элементов. - Новосибирск: Наука, 2020. – 411 с.
11. Хохлов А.А. Динамика сложных механических систем. - М.: МИИТ, 2002. – 172 с.
12. Галиев И.И., Нехаев В.А., Николаев В.А. Методы и средства виброзащиты железнодорожных экипажей. - М.: Изд-во Учебно-методический центр по образованию на ж.-д. транспорте, 2010. – 340 с.
13. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Механический аналог малых колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168991>. DOI: 10.34759/trd-2022-126-05
14. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=119888>. DOI: 10.34759/trd-2020-115-01
15. Асланов В.С. Пикалов Р.С. Безударное сближение космического мусора с буксиром при использовании тросовой системы // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=76750>

16. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Системные подходы к оценке динамических состояний технических объектов при вибрационных нагружениях: частотные функции, динамические инварианты, методы регуляризации // Системы. Методы. Технологии. 2022. № 4 (56). С. 7-15. DOI: 10.18324/2077-5415-2022-4-7-15
17. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2022. № 15. С. 18-30. DOI: 10.26160/2658-3305-2022-15-18-30
18. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of the set of dynamic features of mechanical oscillatory systems based on the map of dynamic invariants // Journal of Advanced Research in Technical Science, 2022, no. 32, pp. 62-69.
19. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties, Irkutsk, Publishing Irkutsk State University, 2006, 316 p.
20. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях – М.: Наука, 1959. – 368 с.

References

1. Clarence W. de Silva. *Vibration: Fundamentals and Practice*. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006, 1064 p.
2. Karnovsky I.A., Lebed E. *Theory of Vibration Protection*, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, 708 p.

3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. *Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020, 521 p.
4. Doronin S.V., Shokin Yu.I., Lepikhin A.M., Moskvichev V.V. *Modelirovanie prochnosti i razrusheniya nesushchikh konstruktssii tekhnicheskikh sistem* (Modeling of strength and fracture of load-bearing structures of technical systems), Novosibirsk, Nauka, 2005, 249 p.
5. Eliseev S.V. *Prikladnoi sistemnyi analiz i strukturnoe matematicheskoe modelirovanie (dinamika transportnykh i tekhnologicheskikh mashin: svyaznost' dvizhenii, vibratsionnye vzaimodeistviya, rychazhnye svyazi)* ((Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections)), Irkutsk, IrGUPS, 2018, 692 p.
6. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bol'shakov R.S., Khomenko A.P. *Metodologiya sistemnogo analiza v zadachakh otsenki, formirovaniya i upravleniya dinamicheskim sostoyaniem tekhnologicheskikh i transportnykh mashin* (Methodology of system analysis in the tasks of assessment, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines), Novosibirsk, Nauka, 2021, 679 p.
7. Banakh L., Kempner M. *Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 262 p.
8. Harris S.M., Sreede E. *Shock and Vibration Handbook*, New York, McGraw - Hill Book So, 2009, 1168 p.
9. Iwnicki Simon. *Handbook of railway vehicle dynamics*, CRC Press Taylor amp, Francis Group, 2006, 527 p.

10. Bol'shakov R.S. *Osobennosti vibratsionnykh sostoyanii transportnykh i tekhnologicheskikh mashin. Dinamicheskie reaktsii i formy vzaimodeistviya elementov* (Features of vibration states of transport and technological machines. Dynamic reactions and forms of interaction of elements), Novosibirsk, Nauka, 2020, 411 p.
11. Khokhlov A.A. *Dinamika slozhnykh mekhanicheskikh system* (Dynamics of complex mechanical systems), Moscow, MIIT, 2002, 172 p.
12. Galiev I.I., Nekhaev V.A., Nikolaev V.A. *Metody i sredstva vibrozashchity zheleznodorozhnykh ekipazhei* (Methods and means of vibration protection of railway crews), Moscow, Izd-vo Uchebno-metodicheskii tsentr po obrazovaniyu na zh.-d. transporte, 2010, 340 p.
13. Yui Chzhaokai, Temnov A.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168991>. DOI: 10.34759/trd-2022-126-05
14. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119888>. DOI: 10.34759/trd-2020-115-01
15. Aslanov V.S., Pikalov R.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76750>
16. Eliseev A.V., Sitov I.S., Kuznetsov N.K. *Sistemy. Metody. Tekhnologii*, 2022, no. 4 (56), pp. 7-15. DOI: [10.18324/2077-5415-2022-4-7-15](https://doi.org/10.18324/2077-5415-2022-4-7-15)
17. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Nikolaev A.V. *Transportnoe, gornoe i stroitel'noe mashinostroenie: nauka i proizvodstvo*, 2022, no. 15, pp. 18-30. DOI: 10.26160/2658-3305-2022-15-18-30

8. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of the set of dynamic features of mechanical oscillatory systems based on the map of dynamic invariants, *Journal of Advanced Research in Technical Science*, 2022, no. 32, pp. 62-69.
19. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. *Dynamics of mechanical systems with additional ties*, Irkutsk, Publishing Irkutsk State University, 2006, 316 p.
20. Lur'e A.I. *Operatsionnoe ischislenie i primeneniye v tekhnicheskikh prilozheniyakh* (Operational calculus and its application in technical applications), Moscow, Nauka, 1959, 368 p.

Статья поступила в редакцию 14.12.2022

Одобрена после рецензирования 08.01.2023

Принята к публикации 27.02.2023

The article was submitted on 14.12.2022; approved after reviewing on 08.01.2023; accepted for publication on 27.02.2023