

Формирование астатических систем управления объектами с неопределенными параметрами на основе модально-инвариантной подсистемы

Елисеев В.Д., Евдокимчик Е.А.*, Котельникова А.В., Чемоданов В.Б.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: obstwasser@mail.ru*

Аннотация

Рассматривается оригинальный способ формирования астатических систем управления динамическими объектами с неопределенными параметрами на основе специального класса робастных систем, называемых модально-инвариантными. Приведен пример синтеза астатической системы и показана возможность уменьшения ее чувствительности к неопределенности параметров объекта.

Ключевые слова: астатическое управление, модально-инвариантные системы.

Введение

Известен способ формирования статических систем управления динамическими объектами с неопределенными параметрами на основе теории модально-инвариантных систем управления [1-3]. Основными признаками этих систем в отличие от традиционных, например [4], являются:

1. Представление разомкнутой системы в виде двух составляющих: астатического исполнительного устройства, спроектированного заранее и более некорректируемого, и объекта управления.

2. Наличие математической эталонной модели движения объекта (виртуального объекта с приближенно известными параметрами), реализуемой в вычислительном устройстве системы аналогично наблюдающему устройству.

3. Наличие эталонного контура управления моделью движения объекта с матрицей M обратных связей.

4. Использование разностных сигналов датчиков координат объекта и соответствующих координат его модели с матрицей N для коррекции движения объекта и с матрицей коррекции модели IN для сохранения (инвариантности) доминирующих мод эталонного контура при параметрических возмущениях объекта.

Модально-инвариантные системы предназначены для определенного класса задач управления, например, угловыми движениями летательных аппаратов с датчиками всех переменных состояния (или координат объекта), с относительно низким уровнем измерительных шумов (измерение может быть осуществлено, например, с помощью средств, описанных в работе [5]).

Уравнение объекта имеет вид

$$dy/dt = Ay + B\delta, \quad (1)$$

где A и B – матрицы параметров объекта n -го порядка, δ – отклонение управляющего органа. Пусть астатическое исполнительное устройство имеет передаточную функцию

$$\delta = W(p)u, \quad (2)$$

где u – управляющий сигнал. Будем полагать, что все переменные состояния измеряются безынерционными датчиками, т.е. вектор измерений равен вектору переменных состояния объекта y .

Закон управления формируется в виде

$$u = -My_m - N(y - y_m) + Gx,$$

где y_m – вектор переменных состояния модели объекта с приближенно известными матрицами параметров объекта A_m и B_m

$$dy_m/dt = A_m y_m + B_m \delta + lN(y - y_m). \quad (3)$$

Динамика системы определяется тремя матрицами-строками коэффициентов усиления, для расчета которых известны матричные формулы [1-3]:

$$M = -[W^{-1}(\lambda_1), \dots, W^{-1}(\lambda_n)] [(\lambda_1 E - A_m)^{-1} B_m, \dots, (\lambda_n E - A_m)^{-1} B_m]^{-1}; \quad (4)$$

$$l^T = -[1, \dots, 1] \left\{ [(\lambda_1 E - A_m)^{-1}]^T M^T, \dots, [(\lambda_n E - A_m)^{-1}]^T M^T \right\}^{-1}; \quad (5)$$

$$N = -[1, \dots, 1] [(\lambda_{n+1} E - A_m)^{-1} l, \dots, (\lambda_{n+n} E - A_m)^{-1} l]^{-1}; \quad (6)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – желаемые доминирующие корни характеристического уравнения эталонного контура с матрицей M , $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+n}$ – желаемые корни

характеристического уравнения невязки (контура коррекции модели), т.е. собственные значения матрицы $(A_m - IN)$. Этим формулам соответствуют характеристические уравнения, с помощью которых они получены методом подстановки желаемых корней, определяющих качество системы

$$\begin{aligned}W^{-1}(\lambda) + M(\lambda E - A_m)^{-1} B_m &= 0, \\1 + M(\lambda E - A_m)^{-1} l &= 0, \\1 + N(\lambda E - A_m)^{-1} l &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Постановка задачи

Рассмотренное во введении решение задачи модально-инвариантного управления позволяет получить статическую систему с негарантированным установившимся значением управляемой координаты при параметрических ошибках и постоянных возмущениях объекта. Поэтому возникает задача формирования астатической системы [6] без традиционного добавления интегрирующего звена на основе модально-инвариантной подсистемы с интегрирующим свойством, позволяющим не повышать порядок системы, что представляет практический интерес особенно при ручном управлении без изменения образа объекта. Далее будем рассматривать этот вариант. Под неопределенностью параметров объекта будем понимать возможность их вариации относительно некоторых расчетных значений.

Решение задачи

Структурное решение поставленной задачи состоит в предварительном формировании модально-инвариантной подсистемы с интегрирующим свойством. Это позволит путем ее замыкания обратной связью по управляемой координате получить астатическую систему, как по отношению к управляющему, так и по отношению к возмущающим внешним и параметрическим воздействиям.

Для формирования линейной модально-инвариантной подсистемы с интегрирующим свойством достаточно обеспечить в характеристическом уравнении подсистемы нулевой корень. Это означает, что при расчете матрицы-строки M подсистемы один из задаваемых желаемых корней должен быть равен нулю. Если бы были известны и остальные желаемые корни подсистемы, то задача была бы в основном принципиально решена.

Однако остальные желаемые корни подсистемы могут быть вычислены после определения матрицы-строки $M_{\text{ж}}$ желаемой статической системы. Тогда, если найдены элементы матрицы $M_{\text{ж}} = [M_1, \dots, M_n]$, можно найти желаемые корни подсистемы следующим путем.

Коэффициент M_n представим в виде суммы

$$M_n = M_{\text{разм}} + M_{\text{зам}}, \quad (8)$$

где $M_{\text{разм}}$ определим путем замены в характеристическом многочлене статической системы (см. первое уравнение (7)) коэффициента M_n на коэффициент $M_{\text{разм}}$ и подстановке нулевого корня, т.е. из уравнения

$$1 + [M_1, \dots, M_{n-1}, M_{\text{разм}}] (-A_M)^{-1} B_M = 0,$$

где коэффициенты M_1, \dots, M_{n-1} известны из предыдущего расчета.

Коэффициент $M_{\text{разм}}$ приведет к выделению интеграла в эталонном контуре и получению интегрирующего свойства формируемой подсистемы.

Характеристическое уравнение эталонного контура подсистемы окажется сформированным в виде

$$W^{-1}(\lambda) + [M_1, \dots, M_{n-1}, M_{\text{разм}}] (\lambda E - A_M)^{-1} B_M = 0.$$

Корни этого уравнения необходимо определить для вычисления матрицы-столбца l , обеспечивающей их инвариантность, т.е. независимость от вариаций параметров объекта. Данная матрица может быть вычислена путем подстановки найденных корней во второе характеристическое уравнение (7) или непосредственно в формулу (5), полагая в них $M = [M_1, \dots, M_{n-1}, M_{\text{разм}}]$.

Для дальнейшего формирования подсистемы необходимо найти матрицу-строку N . Эта матрица используется для усиления разностных сигналов и получения сигнала коррекции объекта u_k , который подается на исполнительное устройство и на все интеграторы модели через соответствующие элементы матрицы-столбца l . Матрицу-строку N можно вычислять, задавая дополнительные корни $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+n}$ и используя уравнение (6). Выбрать ее элементы можно и методом моделирования с контролем получающихся корней контура коррекции модели и учетом допустимого уровня помех сигналов датчиков на входе исполнительного устройства. Чем больше

элементы матрицы N , тем сильнее стабилизируются переходные процессы относительно эталонного при разбросе параметров объекта, в чем проявляется пониженная чувствительность системы к неопределенности параметров объекта.

Характеристическое уравнение полученной модально-инвариантной подсистемы будет иметь вид [1]

$$\begin{aligned} & \left[W^{-1}(\lambda) - (N - M)(\lambda E - A_m + IN)^{-1} B_m \right] + \\ & + \left[M + (M - N)(\lambda E - A_m + IN)^{-1} (\lambda E - A_m) \right] (\lambda E - A)^{-1} B = 0, \end{aligned}$$

которое при выполнении условий инвариантности корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ приводится к виду

$$\begin{aligned} & \left[(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) / \det(\lambda E - A_m + IN)^{-1} \right] W_0^{-1}(\lambda) + \\ & \left[(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) / \det(\lambda E - A_m + IN)^{-1} \right] N^* (\lambda E - A)^{-1} B = 0, \end{aligned}$$

где $W_0^{-1}(\lambda)$ соответствует передаточной функции исполнительного устройства, остающейся после выделения выражения $\left[(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) / \det(\lambda E - A_m + IN)^{-1} \right]$, а N^* - матрица коэффициентов, остающаяся после выделения того же сомножителя. Это значит, что характеристический многочлен подсистемы будет иметь нулевой корень, если $\lambda_1 = 0$, а знаменатель передаточной функции подсистемы будет иметь дифференцирующее звено. Сама передаточная функция подсистемы при этом будет содержать интегрирующее звено, что обеспечит астатизм замкнутой системы.

Вычисляя рассогласование между заданным и измеряемым значениями управляемой координаты объекта и усиливая его коэффициентом $M_{\text{зам}}$, найденного по формуле (8), осуществим замыкание подсистемы обратной связью. В результате управляющий сигнал на входе исполнительного устройства (закон управления) примет вид

$$u = -My_m - N(y - y_m) + M_{\text{зам}}(x - y_n), \quad (9)$$

где x - управляющий (заданный) сигнал астатической системы, а y_n - управляемая координата объекта.

Благодаря достижению модальной инвариантности корней эталонной подсистемы синтезированная астатическая система будет обладать пониженной чувствительностью переходных процессов к неопределенности параметров объекта при допустимом увеличении коэффициентов усиления разностных сигналов.

Далее рассмотрим решение задачи на конкретном примере.

На рисунке 1 представлена структурная схема (как схема моделирования) астатической системы автоматического управления объектом 2-го порядка с неопределенными параметрами, синтезированная по предлагаемому способу с конкретными коэффициентами, рассчитанными ниже.

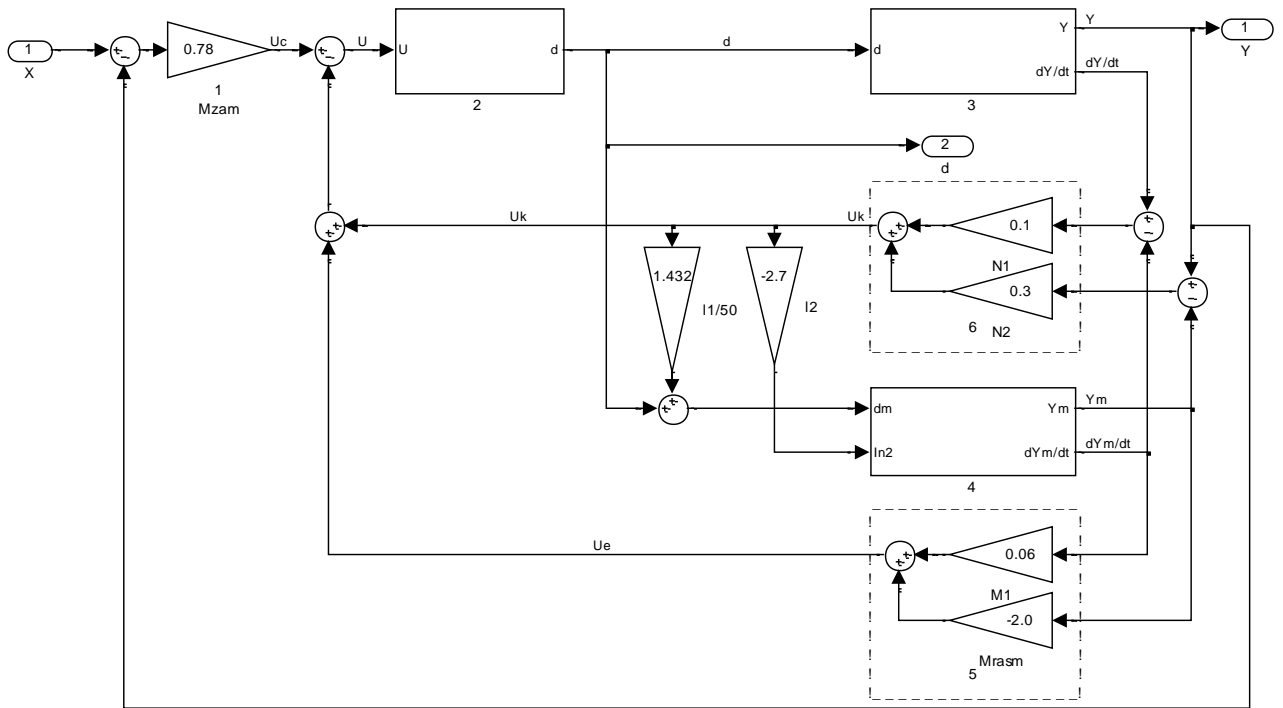


Рисунок 1 – Схема моделирования

На схеме приняты обозначения:

- 1 - усилитель сигнала разности заданной x и управляемой (выходной) координаты объекта y с коэффициентом $M_{\text{зам}}$;
- 2 - астатическое исполнительное устройство, управляющее входной координатой объекта $\delta = d$;
- 3 - объект управления;
- 4 - модель движения объекта (виртуальный объект);
- 5 - блок усиления и суммирования сигналов координат модели, формирующих эталонный контур с матрицей M (выходной сигнал u_e);
- 6 - блок усиления и суммирования разностных сигналов координат объекта и модели с матрицей N (выходной сигнал u_k);

u_c - усиленный сигнал разности заданного и измеряемого значений управляемой координаты объекта;

u - суммарный входной сигнал исполнительного устройства ($u = u_c + u_e + u_k$).

Пусть объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$d^2 y / dt^2 + a_1 dy / dt + a_0 y = bd + f ,$$

где a_1 , a_0 , b – неопределенные параметры уравнения объекта, с априорно известными значениями: $a_1 = 5$, $a_0 = 100$, $b = 50$, которые реально могут иметь до 1.5 раз большие или до 1.5 раз меньшие значения;

f – постоянное неопределенное возмущение, которое может принимать максимальные значения разных знаков, равные по величине 75.

Пусть измеряются координаты объекта dy/dt и y , y – управляемая координата объекта 3. Пусть исполнительное устройство имеет передаточную функцию вида

$$W_{ИУ}(p) = 625 / (p^2 + 32p + 625).$$

Уравнение эталонной модели берем в том же виде (3), как и уравнение объекта (1) с приближенно известными параметрами объекта, которые примем в качестве расчетных, т.е. в виде

$$d^2 y_m / dt^2 + 5 dy_m / dt + 100 y_m = 50 d .$$

Закон управления согласно (9) примем в виде

$$u = -M_1 dy_m / dt - M_{разм} y_m - N_1 (dy/dt - dy_m / dt) - N_2 (y - y_m) + M_{зам} (x - y).$$

Запишем характеристическое уравнение желаемой системы (эталонного контура статической системы) согласно первому уравнению (7)

$$(\lambda^2 + 32\lambda + 625)(\lambda^2 + 5\lambda + 100) + 625(50M_1\lambda + 50M_2) = 0. \quad (10)$$

Для расчета коэффициентов M_1 , M_2 требуется задать желаемые корни $\lambda_{1ж}$, $\lambda_{2ж}$, которые надо выбрать, обеспечивая желаемую динамику системы, в частности, с учетом близости в данном примере собственных частот исполнительного устройства и объекта. Подходящими корнями являются действительные корни, не возбуждающие колебания исполнительного устройства: $\lambda_{1ж} = -7$, $\lambda_{2ж} = -6.7$.

Подставляя эти корни в характеристическое уравнение (10), получим систему двух алгебраических уравнений, решая которую найдем $M_1 = 0.06$, $M_2 = -1.22$. Эти значения могут быть получены непосредственно по формуле (4). Как видно, коэффициент M_2 дает положительную обратную связь желаемой системы по управляемой координате. Подставляя в уравнение (10) с известным коэффициентом $M_1 = 0.06$ нулевой корень и вместо коэффициента M_2 коэффициент $M_{разм}$, найдем $M_{разм} = -2.00$.

Отрицательный знак этого коэффициента соответствует положительной обратной связи в эталонном контуре для размыкания модели объекта через исполнительное устройство для получения интегрирующего свойства подсистемы. Это означает, что сигнал эталонного контура подсистемы u_e , поступающий на исполнительное устройство, равен

$$u_e = 0.06 dy_m / dt - 2.00 y_m.$$

Характеристическое уравнение эталонного контура подсистемы примет вид

$$\lambda^4 + 37\lambda^3 + 885\lambda^2 + 8200\lambda = 0.$$

Два доминирующих корня этого уравнения равны

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -14.7.$$

Эти доминирующие корни подсистемы нужны для вычисления матрицы l , обеспечивающей их инвариантность, несмотря на изменение параметров объекта.

Характеристическое уравнение для расчета матрицы l можно получить в виде второго уравнения (7) или в раскрытом виде

$$(\lambda^2 + 5\lambda + 100) + (M_1\lambda + M_{\text{разм}})l_1 + (-100M_1 + (\lambda + 5)M_{\text{разм}})l_2 = 0.$$

При подстановке доминирующих корней подсистемы $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -14.7$ получим два уравнения относительно неизвестных элементов l_1, l_2 матрицы-столбца l , а затем и значения самих элементов $l_1 = 71.6, l_2 = -2.7$. Эти значения можно получить непосредственно по формуле (5).

Для расчета матрицы-строки $N = [N_1, N_2]$ можно использовать третье уравнение (7), записанное в раскрытом виде

$$(\lambda^2 + 5\lambda + 100) + (N_1\lambda + N_2)l_1 + (-100N_1 + (\lambda + 5)N_2)l_2 = 0.$$

Задав комплексно-сопряженные корни $\lambda_3 = -5.675 + 10.6i, \lambda_4 = -5.675 - 10.6i$ получим $N_1 = 0.1, N_2 = 0.3$.

Для окончательного формирования системы найдем замыкающий коэффициент согласно (8): $M_{\text{зам}} = M_2 - M_{\text{разм}} = -1.22 + 2.00 = 0.78$.

Моделирование сформированной системы управления проведено при расчетных значениях неопределенных параметров объекта и двух крайне неблагоприятных, меняющихся в 1.5 раза в обе стороны, коэффициент передачи объекта при этом меняется в 5 раз.

Переходные процессы разомкнутой системы (без системы управления), т.е. последовательного соединения исполнительного устройства и объекта при расчетных и крайне неблагоприятных неопределенных параметрах, приведены на рисунке 2 (заданный сигнал $x=1$ до 6-ой секунды). Эти процессы имеют недопустимые значения перерегулирования, длительности и разброса установившихся значений в 5 раз (до 4-ой секунды), что соответствует разбросу коэффициента передачи объекта тоже в 5 раз. Наличие возмущающих максимальных воздействий (с 4-ой секунды) также приводит к увеличению статических ошибок и даже к изменению знака при $f = -75$. С 6-ой секунды обнуляется входной сигнал.

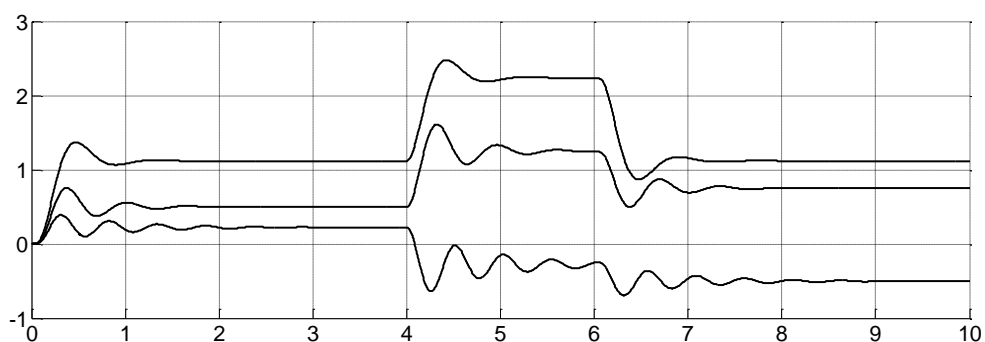


Рисунок 2 – Переходные процессы исходной системы

Результаты моделирования синтезированной системы при аналогичных условиях приведены на рисунке 3. Наиболее быстрый процесс соответствует

наибольшему коэффициенту передачи объекта, что вполне естественно, наиболее медленный процесс соответствует наименьшему коэффициенту передачи и наибольшему времени переходного процесса попадания в 5-процентную трубку точности.

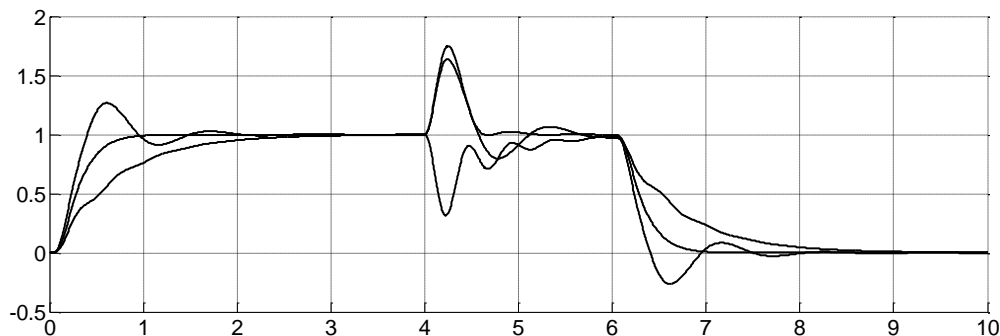


Рисунок 3 – Переходные процессы синтезированной системы

Средний процесс соответствует расчетным приближенно известным параметрам объекта. Как видно, этот процесс, как желаемый, реализован достаточно правильно, так как практически имеет минимальное время переходного процесса (0.73 с) попадания в 5-процентную трубку точности при отсутствии перерегулирования. Перерегулирование наиболее быстрого процесса составляет 25%.

На рисунке 4 приведены переходные процессы отклонения управляющего органа, которые также показывают зависимость установившихся значений от разбросов коэффициента передачи объекта в 5 раз и от возмущающих воздействий объекта. Кроме того, переходные процессы отклонений управляющего органа не имеют значительной колебательности, что свидетельствует о правильном расчете желаемого процесса системы и выборе соотношения коэффициентов усиления

разностных сигналов. Величины этих коэффициентов соизмеримы со значениями коэффициентов обратных связей статической системы.

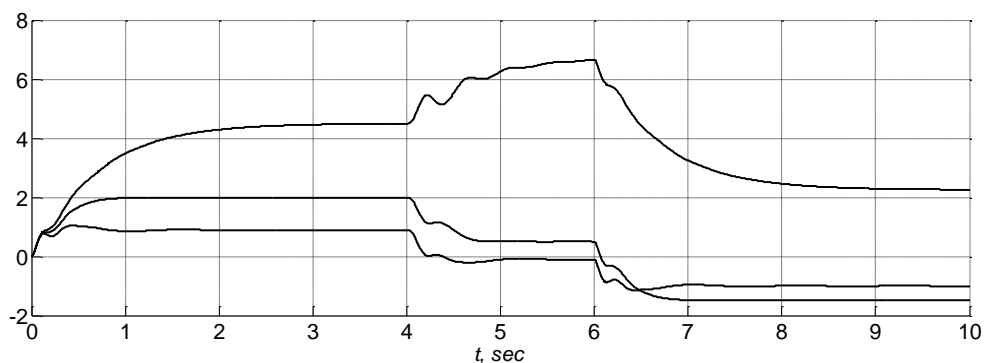


Рисунок 4 – Переходные процессы отклонения органа управления

На рисунке 5 приведены процессы при больших коэффициентах усиления разностных сигналов, когда $N_1 = 3.0$, $N_2 = 50.0$. В этом случае процессы значительно приближаются к эталонному процессу, что свидетельствует об уменьшении чувствительности переходных процессов системы к неопределенности параметров объекта при увеличении коэффициентов усиления разностных сигналов. При уменьшении этих коэффициентов до нуля система не теряет устойчивости.

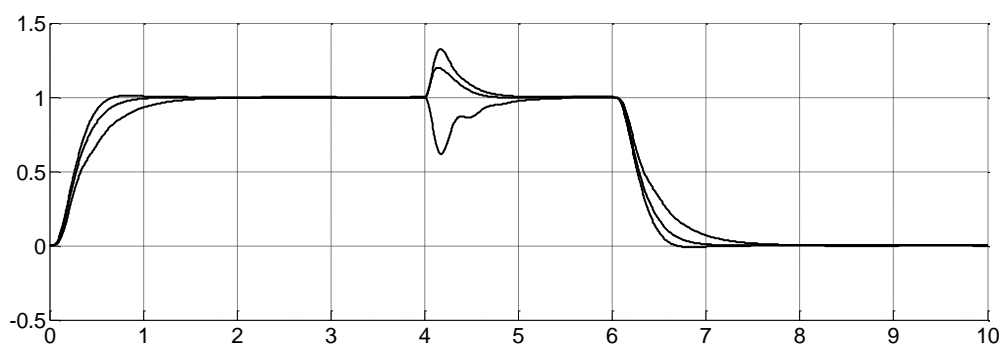


Рисунок 5 – Переходные процессы при увеличении коэффициентов усиления разностных сигналов

Рассмотренный пример подтверждает ожидаемые результаты для линейной системы. Однако, значительный интерес представляет анализ системы при учете нелинейностей исполнительного устройства таких, как ограничение скорости отклонения и самого отклонения управляющего органа объекта.

В связи с этим на рисунке 6 приведены переходные процессы при ограничении скорости перемещения выходного звена исполнительного устройства величинами 20 и минус 20, а также ограничении входного сигнала исполнительного устройства величинами 35 и минус 35. Входное воздействие увеличено до $x = 50$. На рисунке также приведены соответствующие процессы отклонения управляющего органа d .

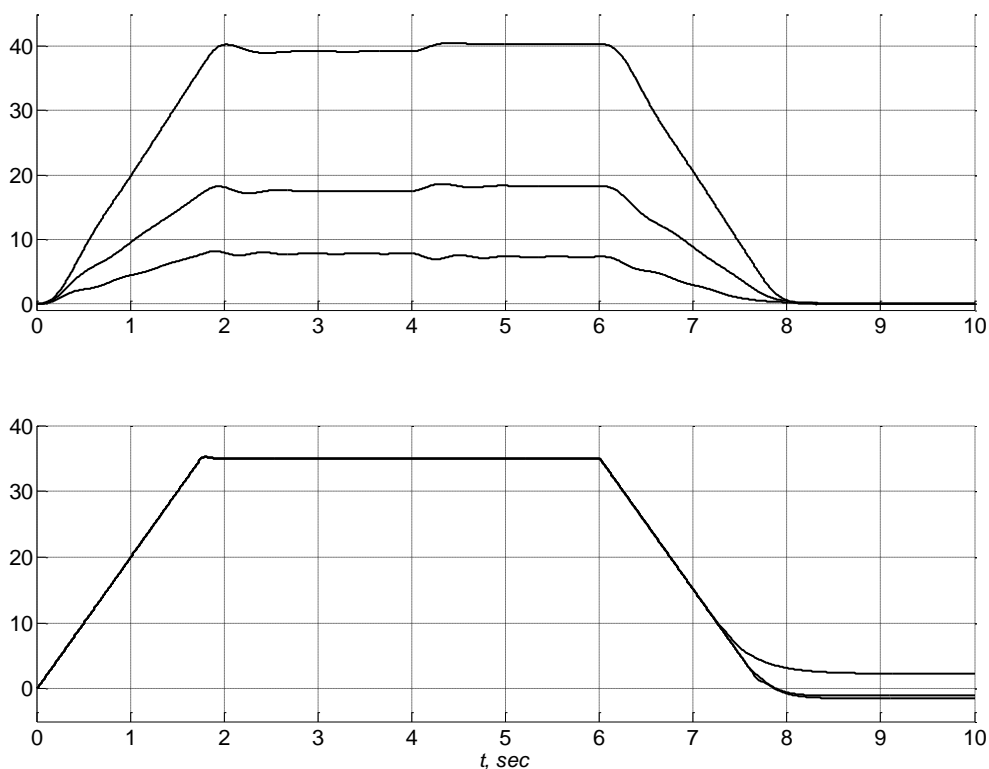


Рисунок 6 – Переходные процессы при учете нелинейности исполнительного устройства

Из переходных процессов видно, что система сохраняет устойчивость и приемлемое качество при требуемой длительности переходного процесса около двух секунд, которая при большом входном сигнале определяется максимальной скоростью отклонения управляющего органа. Несмотря на наличие нелинейностей, система, рассчитанная как линейная, не требует никакой коррекции кроме возможно необходимого увеличения максимальной скорости исполнительного устройства.

Заключение

Предложенный способ формирования линейной астатической системы с предварительным формированием структуры и параметров модально-инвариантной подсистемы с интегрирующим свойством позволяет получить астатизм по управляющим и возмущающим воздействиям, а также пониженную чувствительность к неопределенности параметров объекта управления. При этом, как показывает рассмотренный пример, учет нелинейностей исполнительного устройства не требует коррекции синтеза системы.

Библиографический список

1. Елисеев В.Д. Модально-инвариантные системы управления // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 26–34.
2. Елисеев В.Д., Комаров А.К. Модально-инвариантные системы управления. – М.: Изд-во МАИ, 1983. – 69 с.

3. Елисеев В.Д., Комаров А.К. Многомерные модально-инвариантные системы управления. – М.: Изд-во МАИ, 1989. – 32 с.

4. Афанасьев В.Н. Управление неопределенными динамическими объектами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 208 с.

5. Туктарёв Н.А., Гришин Д.В., Бусурин В.И., Ахмедова С.К. Автономное инерциально-магнитометрическое устройство определения углов ориентации летательного аппарата // Труды МАИ, 2016, № 88: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=70665>.

6. Способ формирования астатических систем управления объектами с неопределенными параметрами на основе встроенных моделей и модальной инвариантности. Патент РФ 2570127 / Котельникова А.В., Чемоданов В.Б., Елисеев В.Д., Кисин Е.Н., Евдокимчик Е.А., Похваленский В.Л. / Бюл. № 34, 2015, URL: <https://edrid.ru/rid/216.013.966b.html>