

УДК 539.3

## **Влияние формы набегающей волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины сложной структуры**

**Локтева Н.А.\*, Сердюк Д.О.\*\*, Тарлаковский Д.В.\*\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: [nlok@rambler.ru](mailto:nlok@rambler.ru)*

*\*\*e-mail: [d.serduk55@gmail.com](mailto:d.serduk55@gmail.com)*

*\*\*\*e-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)*

### **Аннотация**

Исследуются звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины, окруженной с двух сторон акустическими средами. Пластина имеет сложную трехслойную структуру (несущие слои упругие изотропные, а наполнитель анизотропный). Рассматриваются варианты воздействия на пластину плоской, цилиндрической или сферической гармонических волн. Для решения используются разложения искомых функций в тригонометрические ряды. Приведены примеры расчетов.

**Ключевые слова:** звукоизоляция, сотовый наполнитель, трехслойная пластина, поперечное обжатие, тригонометрические ряды.

### **Введение**

В настоящее время уровень и динамика развития новых перспективных летательных аппаратов предъявляет все более высокие требования к повышению степени шумо- и виброзащиты. Эти же проблемы возникают в других отраслях новой техники (машиностроение, транспорт, автомобилестроение и др.), где необходимо обеспечить эффективную шумовиброизоляцию.

В последнее время во всех этих отраслях появляется все больший интерес к использованию новых функциональных материалов, которые позволяют получать требуемый уровень шумо- и виброзащиты создаваемых элементов конструкции путем организации нужного вида их внутреннего строения. Это приводит к необходимости разработки новых усложненных математических моделей, позволяющих описывать поведение элементов конструкций с учетом особенностей их строения. Одна из таких моделей использована в настоящей работе.

На данный момент имеется большое количество публикаций по исследованию звукоизоляционных свойств различных элементов конструкций, в которых наиболее полно рассмотрены задачи о свойствах однородных звукопоглощающих препятствий [1-5]. При рассмотрении трехслойных элементов, как правило, не учитываются поперечное обжатие и сдвиг слоев [6], что не позволяет достаточно полно отразить истинную картину их деформированного состояния. Также практически не изучено влияние геометрии набегающей волны на акустические свойства препятствия. Оценка влияния всех этих параметров на характер поведения упругой волны при прохождении ее через трехслойное препятствие с практической точки зрения является важной задачей. В настоящей

работе предполагается с использованием уточненных моделей трехслойных пластин учесть влияние вышеназванных параметров.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается упругая пластина, окруженная с двух сторон акустическими средами «1» и «2» с одинаковыми свойствами (рис. 1). Пластина является прямоугольной с линейными размерами  $l_1$  и  $l_2$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$ , начало которой расположено в угловой точке, а ось  $Oz$  направлена вглубь среды «2».

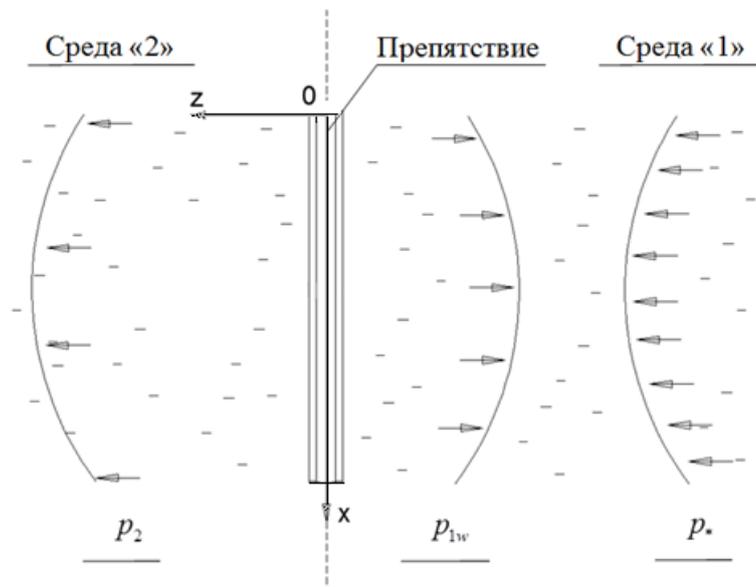


Рис. 1. Тонкостенное препятствие сложной структуры, окруженное акустическими средами.

Пластина имеет симметричную трехслойную структуру, состоящую из двух несущих слоев (их нумерация соответствует нумерации соприкасающимся с ними средам) и заполнителя между ними (рис. 2). Несущие слои являются упругими изотропными с модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Заполнитель имеет сотовую конфигурацию и моделируется упругой ортотропной средой [7-9] с

осредненными модулями обжатия  $E_3$  и сдвига  $G_1$  и  $G_2$  соответственно в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$ . Далее рассматриваем частный случай трансверсально-мягкого заполнителя (модули сдвига заполнителя равны между собой:  $G_1 = G_2 = G$ ).

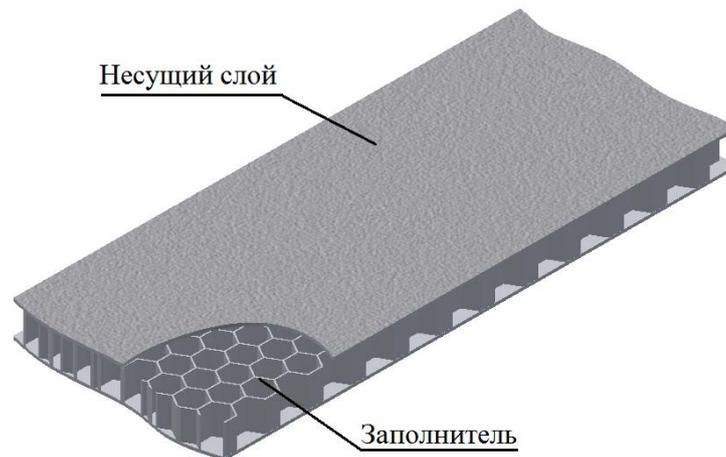


Рис. 2. Структура пластины.

На пластину набегают гармоническая волна с амплитудой давления на фронте  $p_*$  и частотой  $\omega$ . В результате ее взаимодействия с препятствием в средах «1» и «2» возбуждается отраженная и проходящая волны с амплитудами  $p_{1w}$  и  $p_2$  соответственно. При этом амплитуда полного давления в среде «1» определяется так:

$$p_1 = p_{1w} + p_*. \quad (1)$$

В качестве звукоизоляционных характеристик пластины принимаем коэффициент звукоизоляции  $\eta$  и измеряемый в децибелах показатель звукоизоляции  $R_p$ :

$$\eta = |p_2/p_*|_{z=0}, \quad R_p = -20 \lg \eta. \quad (2)$$

## 2. Связанная краевая задача

Для описания гармонических колебаний пластины по закону  $\exp(i\omega t)$ , где  $i$  – мнимая единица, используем уравнения, полученные в [7,8] (наличие координаты после запятой соответствует дифференцированию по ней):

$$\begin{aligned}
 L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c) + \rho_c \omega^2 u_1^c &= 0, \quad L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1 + \rho_a \omega^2 u_1^a = 0, \\
 L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c) + \rho_c \omega^2 u_2^c &= 0, \quad L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2 + \rho_a \omega^2 u_2^a = 0, \\
 -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + p_1|_{z=0} - p_2|_{z=0} + \rho_c \omega^2 w_c &= 0, \\
 -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1|_{z=0} + p_2|_{z=0} + \rho_{aw} \omega^2 w_a &= 0, \\
 u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\
 u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_3 q^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$u_l^c = u_l^{(1)} + u_l^{(2)}, \quad u_l^a = u_l^{(1)} - u_l^{(2)} \quad (l=1,2), \quad w_c = w^{(1)} + w^{(2)}, \quad w_a = w^{(1)} - w^{(2)};$$

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= B \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad L_{12} = L_{21} = B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
 L_{22} &= B \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};
 \end{aligned}$$

$$\rho_a = 2\rho_b t, \quad \rho_c = \rho_a + \rho h, \quad \rho_{aw} = \rho_a + \frac{\rho h}{3}, \quad B = \frac{2Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Bt^2}{3},$$

$$c_3 = \frac{E_3}{2h}, \quad k_1 = t + h, \quad k_2 = \frac{h^2}{3c_3}, \quad k_3 = \frac{2h}{G}.$$

Здесь  $u_1^{(j)}$  и  $u_2^{(j)}$  - амплитуды тангенциальных перемещений вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  в  $j$ -м несущем слое;  $w^{(j)}$  - амплитуда прогиба в  $j$ -м несущем слое;  $q^1$  и  $q^2$  - амплитуды постоянных по толщине поперечных касательных напряжений в заполнителе, направленным по осям  $Ox$  и  $Oy$ ;  $2t$  и  $2h$  - толщины несущих слоев и заполнителя;  $\rho$  и  $\rho_b$  - плотности материалов заполнителя и внешних слоев;  $B$  и  $D$  - жесткости несущих слоев на растяжение-сжатие и изгиб.

Полагаем, что пластина шарнирно оперта, что соответствует следующим граничным условиям [7,8]:

$$\begin{aligned} u_2^c \Big|_{x=0,l_1} = u_2^a \Big|_{x=0,l_1} = w_c \Big|_{x=0,l_1} = w_a \Big|_{x=0,l_1} = 0, \\ (u_{1,x}^c + \nu u_{2,y}^c) \Big|_{x=0,l_1} = (u_{1,x}^a + \nu u_{2,y}^a) \Big|_{x=0,l_1} = 0, (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_{x=0,l_1} = 0, \\ [\nu \Delta w_c + (1-\nu) w_{c,xx}] \Big|_{x=0,l_1} = [\nu \Delta w_a + (1-\nu) w_{a,xx}] \Big|_{x=0,l_1} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_1^c \Big|_{y=0,l_2} = u_1^a \Big|_{y=0,l_2} = w_c \Big|_{y=0,l_2} = w_a \Big|_{y=0,l_2} = 0, \\ [u_{2,y}^c + \nu u_{1,x}^c] \Big|_{y=0,l_2} = [u_{2,y}^a + \nu u_{1,x}^a] \Big|_{y=0,l_2} = 0, (q_{,x}^1 + q_{,y}^2) \Big|_{y=0,l_2} = 0, \\ [\nu \Delta w_c + (1-\nu) w_{c,yy}] \Big|_{y=0,l_2} = [\nu \Delta w_a + (1-\nu) w_{a,yy}] \Big|_{y=0,l_2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Возмущенное движение  $j$ -й акустической среды описывается уравнением относительно амплитуды  $\Phi_j$  потенциала скоростей [10]:

$$\Delta \Phi_j + k^2 \Phi_j = 0, \quad k = \omega/c, \quad \Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где  $k$  - волновое число;  $c$  - скорость звука в среде.

При этом соответствующие амплитуды давления  $p_{1w}$ ,  $p_2$  и координаты  $v_{j1}$ ,  $v_{j2}$ ,  $v_{j3}$  векторов скоростей определяются следующими равенствами:

$$p_{1w} = -i\omega\rho_0\Phi_1, p_2 = -i\omega\rho_0\Phi_2, v_{j1} = \Phi_{j,x}, v_{j2} = \Phi_{j,y}, v_{j3} = \Phi_{j,z}, \dots \quad (7)$$

где  $\rho_0$  - плотность акустических сред.

В областях соприкосновения окружающих сред с пластиной выполняются условия не протекания:

$$\Phi_{j,z} \Big|_{z=0} = i\omega w^{(j)}, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2. \quad (8)$$

На бесконечности должны выполняться условия Зоммерфельда ( $r$  – длина радиуса-вектора) [10]:

$$\Phi_{j,r} + ik\Phi_j = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Вне зоны контакта сред с пластиной давления совпадают:

$$p_1 \Big|_{z=0} = p_2 \Big|_{z=0}, \quad x < 0, \quad x > l_1, \quad y < 0, \quad y > l_2. \quad (10)$$

Связанная краевая задача (3) – (9) замыкается зависимостями  $p_{1w}(w^{(1)})$  и  $p_2(w^{(2)})$ , которые будут установлены далее.

### 3. Решение краевой задачи

Искомые функции, давления, потенциалы скоростей и координаты векторов скоростей в средах представим в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющих граничным условиям (4) и (5):

$$\begin{aligned}
u_1^{a,c} &= \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{1nm}^{a,c} \cos \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \quad u_2^{a,c} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{2nm}^{a,c} \sin \lambda_{1n} x \cos \lambda_{2m} y, \\
w_{a,c} &= \sum_{n,m=1}^{\infty} w_{a,cnm} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \quad w^{(j)} = \sum_{n,m=1}^{\infty} w_{nm}^{(j)} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \\
q^1 &= \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{nm}^1 \cos \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \quad q^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{nm}^2 \sin \lambda_{1n} x \cos \lambda_{2m} y, \\
w_{nm}^{(1)} &= \frac{w_{cnm} + w_{anm}}{2}, \quad w_{nm}^{(2)} = \frac{w_{cnm} - w_{anm}}{2}, \quad \lambda_{1n} = \frac{\pi n}{l_1}, \quad \lambda_{2m} = \frac{\pi m}{l_2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
p_j &= \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{jnm} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \quad \Phi_j = \sum_{n,m=1}^{\infty} \Phi_{jnm} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \\
v_{j1} &= \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{j1nm} \cos \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \quad v_{j2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{j2nm} \sin \lambda_{1n} x \cos \lambda_{2m} y, \\
v_{j3} &= \sum_{n,m=1}^{\infty} v_{j3nm} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \quad p_{1w} = \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{1wnm} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \\
p_* &= \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{*nm} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y, \quad p_{*nm} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p_* \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y dx dy.
\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда уравнения (3) переходят в алгебраические равенства относительно коэффициентов рядов:

$$\begin{aligned}
(b_{11nm} - \rho_c \omega^2) u_{1nm}^c + b_{12nm} u_{2nm}^c &= 0, \quad (b_{11nm} - \rho_c \omega^2) u_{1nm}^a + b_{12nm} u_{2nm}^a - 2q_{nm}^1 = 0, \\
b_{21nm} u_{1nm}^c + (b_{22nm} - \rho_c \omega^2) u_{2nm}^c &= 0, \quad b_{21nm} u_{1nm}^a + (b_{22nm} - \rho_c \omega^2) u_{2nm}^a - 2q_{nm}^2 = 0, \\
(D\mu_{nm}^4 - \rho_c \omega^2) w_{cnm} + 2k_1 (\lambda_{1n} q_{nm}^1 + \lambda_{2m} q_{nm}^2) &= p_{1nm}|_{z=0} - p_{2nm}|_{z=0}, \\
(D\mu_{nm}^4 + 2c_3 - \rho_{aw} \omega^2) w_{anm} &= p_{1nm}|_{z=0} + p_{2nm}|_{z=0}, \\
u_{1nm}^a - k_1 \lambda_{1n} w_{cnm} + (k_2 \lambda_{1n}^2 + k_3) q_{nm}^1 + k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m} q_{nm}^2 &= 0, \\
u_{2nm}^c - k_1 \lambda_{2m} w_{cnm} + k_2 \lambda_{1n} \lambda_{2m} q_{nm}^1 + (k_2 \lambda_{2m}^2 + k_3) q_{nm}^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11nm} &= B \left( \lambda_{1n}^2 + \frac{1-\nu}{2} \lambda_{2m}^2 \right), \quad b_{12nm} = b_{21nm} = \frac{1+\nu}{2} B \lambda_{1n} \lambda_{2m}, \\
b_{22nm} &= B \left( \frac{1-\nu}{2} \lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2 \right), \quad \mu_{nm} = \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2}.
\end{aligned}$$

А уравнение (6) и соотношения (7) приобретают следующий вид:

$$\Phi_{jnm,z} + \text{sign}(k - \mu_{nm}) \beta_{nm}^2 \Phi_{jnm} = 0, \beta_{nm} = \sqrt{|k^2 - \mu_{nm}^2|}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} p_{1wnm} &= -i\omega\rho_0 \Phi_{1nm}, \quad p_{2nm} = -i\omega\rho_0 \Phi_{2nm}, \\ v_{j1nm} &= \lambda_{1n} \Phi_{jnm}, \quad v_{j2nm} = \lambda_{2m} \Phi_{jnm}, \quad v_{jnm} = \Phi_{jnm,z}. \end{aligned} \quad (15)$$

Условие (8) заменяем следующим равенством относительно коэффициентов рядов:

$$\Phi_{jnm,z} \Big|_{z=0} = i\omega w_{nm}^{(j)}. \quad (16)$$

Вместо же равенства (9) полагаем, что при  $k > \mu_{nm}$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} -\Phi_{1nm,z} + i\beta_{nm} \Phi_{1nm} &= o\left(\frac{1}{-z}\right), \quad z \rightarrow -\infty \quad (r = -z), \\ \Phi_{2nm,z} + i\beta_{nm} \Phi_{2nm} &= o\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow +\infty \quad (r = z), \end{aligned} \quad (17)$$

а при  $k \leq \mu_{nm}$  функция  $\Phi_{1nm}(z)$  ограничена при  $z \leq 0$ , а функция  $\Phi_{2nm}(z)$  ограничена при  $z \geq 0$ .

Такой подход является приближенным. При этом фактически рассматривается периодическая в плоскости  $z = 0$  система пластин и не учитывается дифракция волн на кромках пластины. Использование этого подхода вызвано значительными сложностями при точном решении задачи. С другой стороны, следует ожидать, что приближенное решение будет мало отличаться от точного вне окрестностей кромок препятствия.

Далее находим решение краевой задачи (14), (16), (17). При  $k > \mu_{nm}$  общее решение уравнения (14) имеет вид ( $C_{1j}$  и  $C_{2j}$  - произвольные постоянные):

$$\Phi_{jnm} = C_{1j}e^{-i\beta_{nm}z} + C_{2j}e^{i\beta_{nm}z}. \quad (18)$$

Удовлетворяя условиям (16) и (17) приходим к следующим результатам:

$$\Phi_{1nm} = \frac{\omega W_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}} e^{i\beta_{nm}z}, \quad \Phi_{2nm} = -\frac{\omega W_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}} e^{-i\beta_{nm}z}. \quad (19)$$

При  $k < \mu_{nm}$  общее решение уравнения (14) имеет вид ( $C_{1j}$  и  $C_{2j}$  - произвольные постоянные):

$$\Phi_{jnm} = C_{1j}e^{-\beta_{nm}z} + C_{2j}e^{\beta_{nm}z}.$$

Удовлетворяя опять условиям (16) и (17) приходим к таким равенствам:

$$\Phi_{1nm} = \frac{i\omega W_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}} e^{\beta_{nm}z}, \quad \Phi_{2nm} = -\frac{i\omega W_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}} e^{-\beta_{nm}z}. \quad (20)$$

Объединение формул (19) и (20) дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Phi_{1nm} &= \frac{\omega W_{nm}^{(1)}}{\beta_{nm}} \left[ e^{i\beta_{nm}z} H(k - \mu_{nm}) + ie^{\beta_{nm}z} H(\mu_{nm} - k) \right], \\ \Phi_{2nm} &= -\frac{\omega W_{nm}^{(2)}}{\beta_{nm}} \left[ e^{-i\beta_{nm}z} H(k - \mu_{nm}) + ie^{-\beta_{nm}z} H(\mu_{nm} - k) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где  $H(x)$  - функция Хевисайда.

Подставляя теперь (21) в (15) и учитывая (1) и (11), получаем следующие равенства для коэффициентов давлений, входящих в уравнения (13):

$$\begin{aligned} p_{*0nm} &= p_{*nm} \Big|_{z=0}, \quad p_{*0} = p_{*} \Big|_{z=0}, \\ p_{1nm} \Big|_{z=0} - p_{2nm} \Big|_{z=0} &= p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm}(k) w_{cnn}, \\ p_{1nm} \Big|_{z=0} + p_{2nm} \Big|_{z=0} &= p_{*0nm} - \rho_0 \omega^2 \Gamma_{nm}(k) w_{ann}. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Gamma_{nm}(k) = \frac{\varepsilon(k, \mu_{nm})}{\beta_{nm}}, \quad \varepsilon(k, \mu_{nm}) = \begin{cases} i & \text{при } k > \mu_{nm}, \\ -1 & \text{при } k \leq \mu_{nm} \end{cases}$$

Соотношения (22) вместе с (13) при известных коэффициентах  $p_{*0nm}$  образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, решение которой проведено на ПК при помощи программного пакета, системы компьютерной алгебры Maple.

#### 4. Типы набегающих волн

Для исследования влияния на параметры звукоизоляции в (2) формы набегающей волны рассмотрим три ее типа: плоская, сферическая и цилиндрическая.

А. *Плоская волна*, распространяющаяся вдоль положительного направления оси  $Oz$ . Как следует из уравнения (6), амплитуда  $\Phi_* = \Phi_*(z)$  ее потенциала скоростей удовлетворяет следующему уравнению (здесь штрихами обозначена производная по  $z$ ):

$$\Phi_*'' + k^2 \Phi_* = 0. \quad (23)$$

Его решение, удовлетворяющее условию (9), где следует положить  $r = z$ , имеет вид ( $A_\Phi$  - произвольная постоянная):

$$\Phi_* = A_\Phi e^{-ikz}. \quad (24)$$

Отсюда с использованием (7) и обозначения в (22) находим амплитуду давления и ее значение на препятствии:

$$p_* = \Delta p e^{-ikz}, \quad p_{*0} = \Delta p = -i\omega\rho_0 A_\Phi. \quad (25)$$

Здесь и далее  $\Delta p$  - амплитуда давления на фронте волны при ее касании препятствия.

Соответствующие коэффициенты рядов определяем с помощью (12):

$$P_{*0nm} = \frac{4\Delta p}{\pi^2 nm} \left[ 1 - (-1)^n \right] \left[ 1 - (-1)^m \right]. \quad (26)$$

Б. *Сферическая волна*, распространяющаяся от источника, расположенного в точке  $O_1(x_c, y_c, -d)$ ,  $d > 0$ . Вводим сферическую систему координат с центром в  $O_1$  и радиусом

$$r_1 = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z + d)^2}. \quad (27)$$

Считая,  $\Phi_* = \Phi_*(r_1)$ , из (6) получаем следующее уравнение относительно этой функции (здесь штрихами обозначена производная по  $r_1$ ):

$$r_1^{-2} \left( r_1^2 \Phi_*' \right)' + k^2 \Phi_* = 0. \quad (28)$$

Его общее решение находится с помощью введения новой функции  $r_1 \Phi_*$  и имеет вид ( $A_\Phi$  и  $B_\Phi$  - произвольные постоянные):

$$\Phi_* = r_1^{-1} \left( A_\Phi e^{-ikr_1} + B_\Phi e^{-ikr_1} \right).$$

Отсюда получаем, что условию излучения (9), где следует положить  $r = r_1$ , удовлетворяет решение:

$$\Phi_* = r_1^{-1} A_\Phi e^{-ikr_1}. \quad (29)$$

Отсюда аналогично (25) приходим к следующим равенствам для амплитуды давления и ее значения на препятствии:

$$p_* = -i\omega\rho_0 r_1^{-1} A_\Phi e^{-ikr_1} = \Delta p \frac{d}{r_1} e^{-ik(r_1-d)},$$

$$p_{*0} = \Delta p \frac{d}{r_{10}} e^{-ik(r_{10}-d)}, \quad r_{10} = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + d^2}.$$
(30)

Соответствующие коэффициенты рядов определяем с помощью (12):

$$p_{*0nm} = \frac{4\Delta p d}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{e^{-ik(r_{10}-d)}}{r_{10}} \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y dx dy.$$
(31)

Для его вычисления используем теорему сложения [11, 12]:

$$\frac{e^{-imR}}{R} = -\frac{\pi i}{2\sqrt{r\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{k+1/2}(m\rho) H_{k+1/2}^{(2)}(mr) P_k(\cos\varphi),$$

$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi}; \quad r, \rho, \varphi > 0.$$

С ее помощью формулу (31) преобразовываем следующим образом:

$$p_{*0nm} = -2\pi i \Delta p \sqrt{\delta_1 \delta_2} e^{ikd} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(4l+1)(2l-1)!!}{2^l l!} I_{1ln}(k) I_{2lm}(k)$$
(32)

где

$$I_{1ln}(k) = \int_0^1 \frac{H_{2l+1/2}^{(2)}(kl_1\rho_{10})}{\sqrt{\rho_{10}}} \sin \pi n \xi d\xi, \quad I_{2lm}(k) = \frac{1}{\sqrt{l_2}} \int_0^1 \frac{J_{2l+1/2}(kl_2|\zeta - \zeta_c|)}{\sqrt{|\zeta - \zeta_c|}} \sin \pi m \zeta d\zeta,$$

$$x_c = l_1 \xi_c, \quad y_c = l_1 \zeta_c, \quad d = l_1 \delta_1 = l_2 \delta_2, \quad \rho_{10} = \sqrt{(\xi - \xi_c)^2 + \delta_1^2}.$$

Интегралы  $I_{1ln}(k)$  и  $I_{2lm}(k)$  могут быть найдены численно.

**В. Цилиндрическая волна,** распространяющаяся от источника, расположенного в точке  $O_1(x_c, 0, -d)$ ,  $d > 0$ . Вводим цилиндрическую систему координат с центром в  $O_1$ , параллельной  $Oz$  осью и радиусом:

$$r_2 = \sqrt{(x-x_c)^2 + (z+d)^2}.$$
(33)

Считая, что  $\Phi_* = \Phi_*(r_2)$ , из (6) получаем следующее уравнение относительно этой функции (здесь штрихами обозначена производная по  $r_2$ ):

$$r_2^{-1} (r_2 \Phi_*')' + k^2 \Phi_* = 0. \quad (34)$$

В этом варианте (плоская задача) вместо (9) необходимо использовать следующее условие излучения [10]:

$$\Phi_*' + ik\Phi_* = o\left(\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right), \quad r_2 \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Его общее решение имеет вид [11]:

$$\Phi_* = A_\Phi H_0^{(2)}(kr_2) + B_\Phi H_0^{(1)}(kr_2), \quad (36)$$

где  $H_\nu^{(1)}(\zeta)$  и  $H_\nu^{(2)}(\zeta)$  - функции Ханкеля порядка  $\nu$ ;  $A_\Phi$  и  $B_\Phi$  - произвольные постоянные.

Учитывая равенства [11]:

$$H_0^{(j)'}(\zeta) = -H_1^{(j)}(\zeta) \quad (j=1,2),$$

$$H_\nu^{(1)}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(\zeta-\mu)\pi}, \quad H_\nu^{(2)}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(\zeta-\mu)\pi} \quad (\zeta \rightarrow +\infty), \quad \mu = \frac{2\nu+1}{4},$$

получаем, что условию (31), где следует положить  $r = r_2$ , удовлетворяет решение:

$$\Phi_* = A_\Phi H_0^{(2)}(kr_2). \quad (37)$$

Отсюда приходим к следующим равенствам для потенциала и давления:

$$p_* = -i\omega\rho_0 A_\Phi H_0^{(2)}(kr_2) = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_2)}{H_0^{(2)}(kd)},$$

$$p_{*0} = \Delta p \frac{H_0^{(2)}(kr_{20})}{H_0^{(2)}(kd)}, r_{20} = \sqrt{(x - x_c)^2 + d^2}.$$
(38)

Соответствующие коэффициенты рядов так же, как и ранее, определяем с помощью (12):

$$p_{*0nm} = \frac{4\Delta p}{l_1 l_2 H_0^{(2)}(kd)} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} H_0^{(2)}(kr_{20}) \sin \lambda_{1n} x \sin \lambda_{2m} y dx dy = \frac{4\Delta p [1 - (-1)^m]}{\pi m H_0^{(2)}(kd)} I_{3n}(k),$$
(39)

где

$$I_{3n}(k) = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} H_0^{(2)}(kr_{20}) \sin \lambda_{1n} x dx = \int_0^1 H_0^{(2)}(kl_1 \rho_{20}) \sin \pi n \xi d\xi$$

Последний интеграл может быть найден численно.

## 5. Пример

Рассмотрим пластину со следующими параметрами:  $l_1 = 1.2$  м,  $l_2 = 0.4$  м,  $t = 0.3$  мм,  $h = 2$  мм. Материал несущих слоев и заполнителя – сплав АМц:  $E = 70$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_b = 2730$  кг/м<sup>3</sup>. Осредненные характеристики сотового заполнителя из сплава АМц с длиной и толщиной стенки  $d_1 = 6.3$  мм и  $d_2 = 0.005$  мм, а также углом между стенками  $\alpha = 120^\circ$  определяются на основании работы [8]:  $E_3 = 940$  МПа,  $G = 210$  МПа.

Соответствующие коэффициенты в системе уравнений (3) имеют следующие значения:

$$\rho_a = 2.73, \rho_c = 2.88, \rho_{av} = 2.78, B = 7.69 \times 10^7, D = 6.41,$$

$$c_3 = 10^{11}, k_1 = 0.005, k_2 = 6.46 \times 10^{-17}, k_3 = 4.78 \times 10^{-11}.$$

Для сферической и цилиндрической набегающих звуковых волн принимаются следующие значения геометрических параметров:  $x_c = 0.6$ ,  $y_c = 0.2$ ,  $d = 0.5$  м.

На рис. 3 представлен график зависимости показателя звукоизоляции  $R_p$  от частоты при сферическом типе набегающей волны. Для цилиндрической и плоской типов волн зависимости выглядят аналогичным образом. На рис. 4 продемонстрировано распределение той же величины по поверхности пластины при сферическом типе набегающей с частотой 1000 Гц волны. Эти графики иллюстрируют неравномерность распределения параметра звукопоглощения. На краях пластина лучше поглощает звук, чем в центре. Наиболее слабым местом в данных условиях с точки зрения звукоизоляции является центр пластины.

Все результаты получены при учете четырех трех рядов (11) по каждому из индексов. Больше их количество приводит к уточнению решения менее чем на 2%.

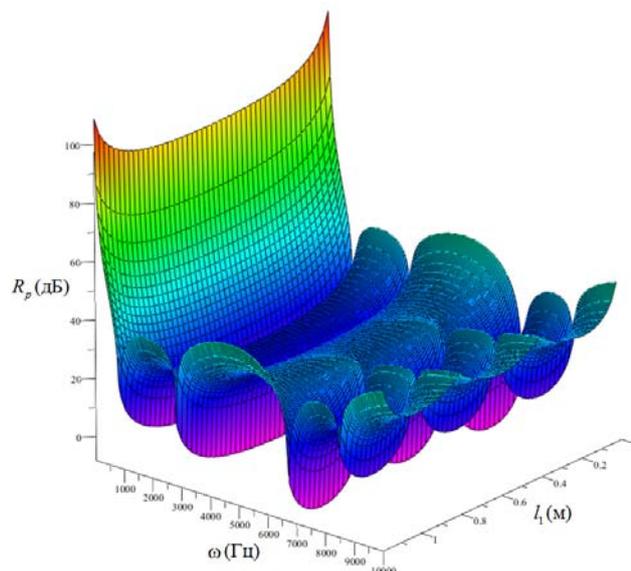


Рис. 3. Показатель  $R_p$  при набегающей сферической волне.

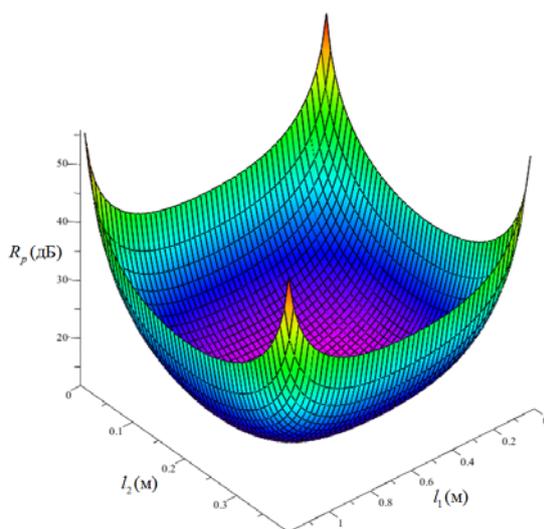


Рис. 4. Распределение показателя  $R_p$  по поверхности пластины.

На рис. 5 представлены результаты расчета минимального по пластине показателя звукоизоляции для цилиндрической и сферической набегающих волны с частотой 1000 Гц в зависимости от расстояния между источником звука и пластиной. Прямая линия для плоской волны изображена для сравнения.



Рис. 5. Зависимость показателя звукоизоляции от расстояния между источником звука и пластиной.

По представленным на рис. 5 результатам можно сделать следующие выводы. До тех пор, пока фронт волны приходящий на поверхность пластины имеет выраженную геометрию сферы или цилиндра, ранжирование эффективности следующее: наиболее эффективно происходит поглощение сферической волны, менее эффективно поглощается цилиндрическая, плоская волна проходит через преграду лучше всего. При этом по мере удаления источника звука от пластины, фронт сферической и цилиндрической волны становится менее выраженным, и эффективность их поглощения снижается до уровня поглощения плоской набегающей волны.

### **Выводы**

Разработан метод моделирования процесса поглощения колебаний в звуковом диапазоне при различных параметрах пластины и различных типах волн, воздействующих на преграду. Данный метод может быть использован в задачах по выбору оптимальных параметров трехслойного звукопоглотителя.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-08-00787) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.*

### **Библиографический список**

1. Алумяэ Н. А. Теория упругих оболочек и пластинок. Механика в СССР за 50 лет / Под ред. Л. И. Седова. Т. 3. – М.: Наука, 1972. –480 С.

2. Park J., Mongeau L. Vibration and sound radiation of viscoelastically supported Mindlin plates // *J. Sound Vib.* – 2008. – 318, No. 4-5. – P. 1230–1249.
3. Picó R., Gautier F. The vibroacoustics of slightly distorted cylindrical shells: A model of the acoustic input impedance // *J. Sound Vib.* – 2007. – 302, No. 1-2. – P. 18–38.
4. Plaut R. H., Cotton S. A. Two-dimensional vibrations of air-filled geomembrane tubes resting on rigid or deformable foundations // *J. Sound Vib.* – 2005. – 282, No. 1-2. – P. 265–276.
5. Ruzzene M. Vibration and sound radiation of sandwich beams with honeycomb truss core // *J. Sound Vib.* – 2004. – 277, No. 4-5. – P. 741–763.
6. Stamm K., Witte H. Sandwichkonstruktionen. Berechnung, Fertigung, Ausführung. – Wien–New York: Springer-Verlag, 1974. – 337 s.
7. Иванов В.А., Паймушин В.Н. Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем численно-аналитический метод их решения // *Прикладная механика и техническая физика.* 1995. Т. 36. №4. С. 147-151.
8. Иванов В.А., Паймушин В.Н. Уточнение уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 1995. №3. С. 142-152.
9. Акишев Н. И., Закиров И. И., Паймушин В. Н., Шишов М. А. Теоретико-экспериментальный метод определения осредненных упругих и прочностных характеристик сотового наполнителя трехслойных конструкций // *Механика композитных материалов.* 2011. Т. 47. № 4. С. 543–556.

10. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит-ры, 1971. - 1108 с.