УДК 519.6

Исследование некоторых вероятностных характеристик решения задачи Коши для уравнения Бюргерса-Хаксли

Васильева О.А.

Московский государственный строительный университет, МИСИ,

Ярославское шоссе, 26, Москва, 129337, Россия

e-mail: vasiljeva.ovas@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается задача Коши для уравнения Бюргерса-Хаксли с начальным условием, являющимся стационарным нормальным случайным процессом.

Решение сформулированной задачи в каждом фиксированном сечении временной переменной будет стационарным случайным процессом. Исследуются вероятностные характеристики решения указанной задачи. При некоторых значениях параметров уравнения и ограничениях на корреляционную функцию начального процесса решение задачи будет являться эргодическим в смысле корреляционной функции случайным процессом. Для различных параметров задачи приведены примеры полученных численных результатов исследования корреляционной функции решения.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса-Хаксли, задача Коши, случайный процесс

Введение

Универсальный характер устройства и функционирования нелинейных процессов и систем различной природы часто позволяет при их математическом моделировании использовать одно и то же дифференциальное уравнение. Одним из таких уравнений является нелинейное уравнение Бюргерса-Хаксли, которое применяется для математического моделирования возмущения среднего уровня поверхности неглубокой жидкости, задач нелинейной акустики, других задач волновой физики, задач химии, техники и экологии [1, 2], поскольку оно позволяет учитывать как нелинейные, так и диффузионные (диссипативные) эффекты. Наличие случайных источников различной природы [3] вызывает необходимость исследования стохастических решений уравнения [4, 5].

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Бюргерса-Хаксли:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u + \gamma u^2 - \delta u^3 \quad , -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

с начальным условием $\xi(x)$, являющимся стационарным случайным процессом, имеющим нормальное распределение с математическим ожиданием $M\xi(x) = 0$ и корреляционной функцией $R(\tau)$,

$$u(0, x) = \xi(x). \tag{2}$$

Решение сформулированной задачи при каждом фиксированном t будет стационарным в узком смысле случайным процессом. Однако, практический интерес, как правило, представляет не само решение задачи (1), (2), а его вероятностные характеристики такие как: плотность распределения вероятности, математическое ожидание, корреляционная функция, спектральная плотность, моменты более высоких порядков.

Задача (1), (2) в общем случае не имеет точного решения [6] и является нелинейной, это вызывает необходимость численного исследования указанных характеристик решения задачи.

Численное исследование

Рассмотрим задачу (1), (2) для случая $\alpha = -1$, $D > 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$ и $\gamma = 0$. Пусть начальное условие $\xi(x)$ является стационарным нормальным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием $M\xi(x) = 0$ и корреляционной функцией $R(\tau)$, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) корреляционная функция $R(\tau)$ является непрерывной функцией;

2) несобственный интеграл от квадрата корреляционной функции

$$\int_0^{+\infty} (R(\tau))^2 d\tau < \infty$$

сходится.

В этом случае при каждом фиксированном $t > 0$, решение задачи (1), (2) будет являться эргодическим в смысле корреляционной функции процессом [5], т.е. для корреляционной функции будет выполняться равенство:

$$B_u(t,\tau) = M(u(t,x)u(t,x+\tau)) = \underset{T\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t,x)u(t,x+\tau)dx.$$

Другими словами

$$\lim_{T\to\infty} M(B_u(t,\tau) - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t,x)u(t,x+\tau)dx)^2 = 0.$$

Таким образом, математическое ожидание, корреляционную функцию $B^u(t,\tau)$, спектральную плотность при фиксированном t можно вычислить, используя единственную достаточно длинную реализацию решения задачи (1), (2) при данном фиксированном t.

Поскольку для квадрата корреляционной функции $B^u(t,\tau)$ решения задачи (1), (2) $u(t,x)$ существует несобственный интеграл

$$A(t) = \int_0^{+\infty} (B_u(t,\tau))^2 d\tau < \infty$$

[5], то для математического ожидания квадрата разности корреляционной функции и

ее приближения $I(t,\tau,T)$,

$$I(t,\tau,T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t,x)u(t,x+\tau)dx,$$

справедлива оценка

$$M(B_u(t,\tau) - I(t,\tau,T))^2 \leq \frac{4A(t)}{T},$$

где константа $A(t)$ не зависит от конкретной реализации решения задачи. Согласно неравенству Чебышева вероятность того, что точность полученного приближения будет меньше заданного значения точности ε, будет удовлетворять оценке

$$P\{|I(t,\tau,T) - B_u(t,\tau)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{4A(t)}{T\varepsilon^2}.$$

На рис.1 приведены, полученные по единственной реализации решения задачи (1) - (2) [7], значения $B^u(t,0)$ при $0 < t < 2{,}5$ (t = 0,25arg), для начального условия, имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию $R(\tau)=e^{-|\tau|}$, и значений коэффициента $D = 0{,}1$ и $D = 0{,}2$.

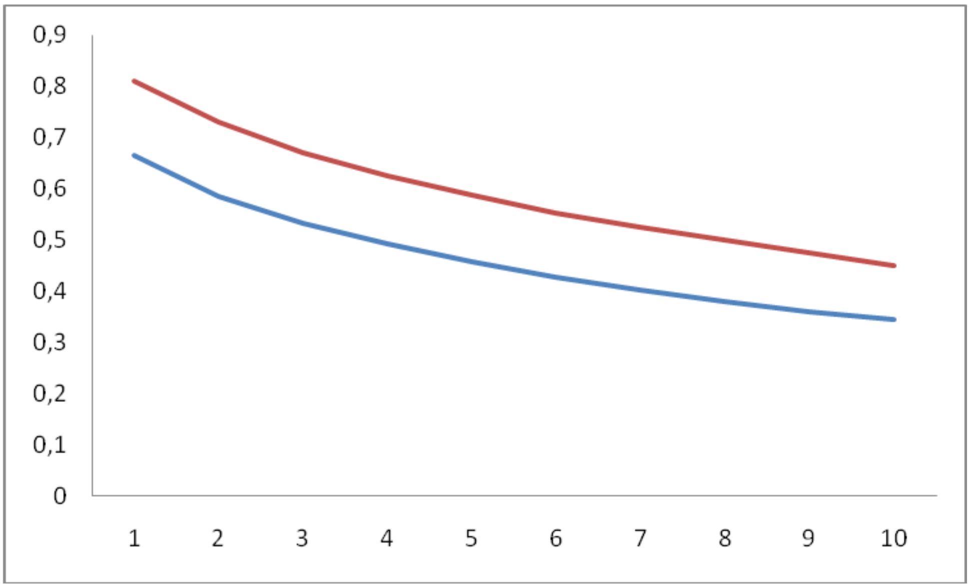

Рис. 1

На приведенном рисунке видно, что интенсивность $B^u(t,0)=\mathrm{M}u^2(t,x)$ довольно быстро уменьшается при $0 \le t \le 0{,}5$, затем при $t > 0{,}5$ происходит более медленное уменьшение интенсивности.

Рассмотрим задачу (1), (2) для случая $\alpha = -1$, $D \ne 0$, $\beta = 0$, $\delta \ne 0$ и $\gamma \ne 0$.

На рис. 2 приведен график математического ожидания квадрата решения задачи $\mathrm{M}(u(t,x))^2 = \mathrm{M}(u(t,0))^2$ при $0 < t \le 2{,}5$ ($t = 0{,}25\arg$) для начального условия, имеющего нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R(\tau)=e^{-|\tau|}$.

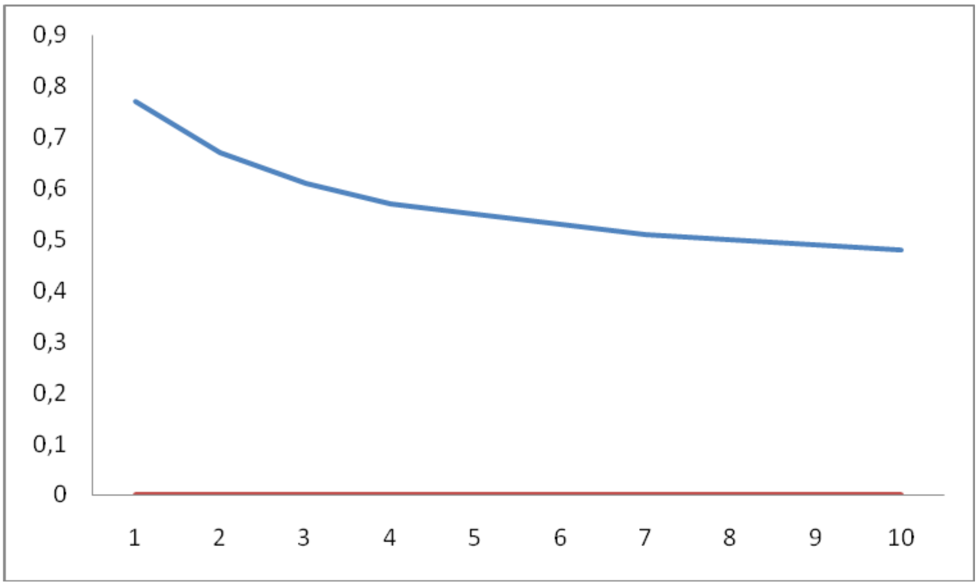

Рис. 2

В этом случае математическое ожидание квадрата решения задачи $M(u(t,x))^2$ убывает при $0 \le t \le 0{,}75$ затем при $0{,}75 < t < 2{,}5$ убывание постепенно замедляется.

Заключение

Рассматривается задача Коши для уравнения Бюргерса-Хаксли. Начальное условие задачи, является стационарным нормальным процессом с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной функцией. Решение задачи при фиксированном t является стационарным в узком смысле случайным процессом.

Численное исследование вероятностных характеристик решения задачи Коши для уравнения Бюргерса-Хаксли (математического ожидания, корреляционной функции, спектральной плотности) позволяет количественно описать моделируемую указанным нелинейным уравнением эволюцию начального случайного процесса, имеющего нормальное распределение.

Библиографический список

1. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. – М.: Наука, 1992.– 270 с.

2. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. – М.: МГУ, 1983. – 152 с.

3. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981. – 640 с.

4. Лапшин Е.А., Пшеницына Н.А. Существование и свойства статистического решения неоднородного уравнения Бюргерса.// Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. №5. С. 68-69.

5. Васильева О.А. О статистических свойствах решений уравнения Бюргерса. Численный анализ на ФОРТРАНе // Изд-во Моск. ун-та. 1980. С.47-54.

6. Ефимова О.Ю., Кудряшов Н.А. Точные решения уравнения Бюргерса-Хаксли // Прикладная математика и механика. 2004. т. 68. № 1. С. 462-469.

7. Васильева О.А. Программный модуль CORFUN 1.2.-2. Труды XV111 Международной конференции. Математика. Компьютер. Образование. Пущино, Московская область, Россия, 24–29 января 2011. - 193 с.

8.