

УДК 539.3

## **Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика**

**Карпов В.В.\*, Семенов А. А.\*\*, Холод Д. В. \*\*\***

*Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, СПбГАСУ,*

*2-я Красноармейская ул., 4, Санкт-Петербург, 190005, Россия*

*\*e-mail:vvkarpov@lan.spbgasu.ru*

*\*\*e-mail:sw.semenov@gmail.com*

*\*\*\*e-mail:darina\_holod@mail.ru*

### **Аннотация**

Тонкостенные оболочки являются важнейшими элементами многих современных конструкций в различных областях техники. Быстрое развитие технологий создания композиционных материалов позволило использовать их уникальные свойства при создании оболочечных конструкций. Для расчета оболочек, выполненных из композиционных материалов, часто используется теория ортотропных оболочек. Возобновление интереса к исследованию таких конструкций вызвано не только появлением новых перспективных материалов, но и, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила применять достаточно точные, но трудоемкие численные методы и вычислительные алгоритмы, а также реалистичные и наглядные технологии визуализации результатов расчетов. Целью данной работы является исследование прочности тонких пологих ортотропных оболочек, а также анализ полученных результатов. Рассматриваются геометрически линейные варианты пологих ортотропных

оболочек, находящихся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру. Расчеты проводились для четырех видов углепластика. Приводятся графики «нагрузка – прогиб в центре», поля прогибов и компонент напряжений, а также их максимальные числовые значения.

**Ключевые слова:** оболочка, ортотропия, углепластик, прочность, пологие оболочки.

## Введение

Тонкостенные оболочки являются важнейшими элементами многих современных конструкций в авиационной и ракетно-космической технике, судо-и автомобилестроении, энергетическом и химическом машиностроении, жилищном и промышленном строительстве [1–7]. В тонкостенных ортотропных оболочках механизмы разрушения при растягивающих и сжимающих напряжениях могут быть существенно различными. Если в условиях растяжения предельно допустимое состояние возникает при достижении определенной меры эквивалентного напряжения – предела прочности или предела упругого сопротивления, то при сжимающих напряжениях разрушение конструкции может проявиться задолго до достижения этого уровня нагрузок вследствие появления других опасных механизмов разрушения, вызванных общей или местной потерей устойчивости.

## Обзор литературы

Основы теории анизотропных пластин и оболочек, и, в частности – ортотропных, можно найти в работах [8, 9]. Обширное исследование проблем

устойчивости ортотропных оболочек приводится в монографии Р.Б. Рикардса и Г.А. Тетерса [10]. Текущее положение дел в данной области показано в обзорных работах [11, 12]. Однако, напряженно-деформированное состояние анализируется на модели оболочки, не учитывающей поперечные сдвиги. В работе [13] отмечается, что для оболочек из армированных материалов, которые представляют собой ортотропные оболочки с низкой сдвиговой жесткостью, поперечные сдвиги учитывать необходимо.

Быстрое развитие технологий создания композиционных материалов позволило использовать их уникальные свойства при создании оболочечных конструкций [14–16]: наделить их высокой прочностью, огнестойкостью, низкой коррозионностью, легкостью и др. Возобновление интереса к исследованию таких конструкций вызвано не только появлением новых перспективных материалов, но и, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила применять достаточно точные, но трудоемкие численные методы и вычислительные алгоритмы [17–18], а также реалистичные и наглядные технологии визуализации результатов расчетов [19]. Поэтому проведение исследований в данной области является достаточно актуальной и оправданной работой.

## **Постановка задачи**

Целью данной работы является исследование прочности тонких пологих ортотропных оболочек на основе математической модели, учитывающей поперечные сдвиги, а также анализ полученных результатов.

## **Описание исследования**

Современные материалы (боропластики, углепластики, стеклопластики, железобетон и др.) обладают ярко выраженным свойством ортотропии, т.е. свойства материала вдоль разных направлений осей координат разные. Таким образом, для расчета оболочек, выполненных из композиционных материалов, часто используется теория ортотропных оболочек [20].

Для покрытий большепролетных строительных сооружений чаще всего применяются железобетонные оболочки, которыми покрыты в России свыше 1 млн м<sup>2</sup>. При рациональном выборе подкрепления оболочки ребрами жесткости, толщина таких оболочек может быть 10–15 см. Недостатком таких оболочек является большой их вес. С появлением новых конструкционных материалов, обладающих достаточно высокой жесткостью и сравнительно малым весом появляется возможность использования более легких конструкций, для чего необходимо при конструировании таких оболочек проводить исследования их прочности. При исследовании прочности изотропных железобетонных оболочек используется один критерий (критерий Кулона–Мора), а при исследовании ортотропных оболочек необходимо сравнивать все компоненты вектора напряжений с предельно допустимыми значениями. При этом, следует учитывать, что для ортотропных

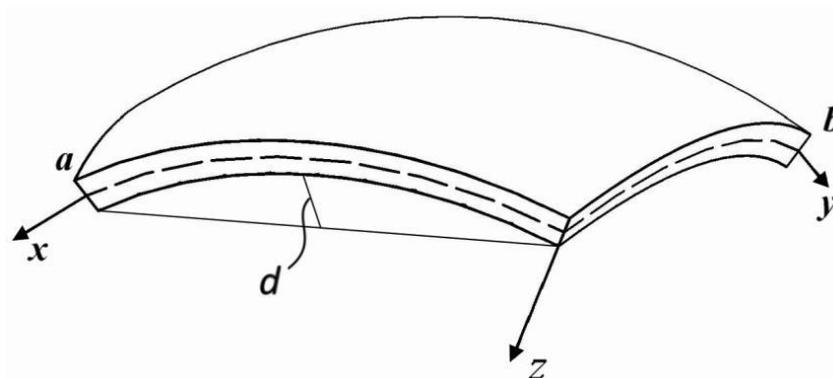
материалов значения предела прочности в разных направлениях, а также на растяжение и на сжатие, различны, что усложняет исследования.

Для исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения, изготовленных из ортотропных материалов была разработана математическая модель их деформирования в виде функционала полной энергии деформации с учетом геометрической нелинейности с учетом поперечных сдвигов и сдвиговой и крутильной жесткости ребер [21]. Была применена методика, описанная в работе [20] для исследования физически нелинейных задач и деформаций ползучести. Были разработаны вычислительные алгоритмы исследования прочности и устойчивости оболочек на основе метода Ритца и итерационных процессов [18], метода продолжения решения по наилучшему параметру [22–24] и градиентного метода с учетом различных свойств материала. Для геометрически линейного варианта была составлена программа исследования прочности пологих оболочек [25] на основе критериев, разработанных для ортотропных оболочек и проведены расчеты для конкретных конструкций из углепластика и стеклопластика. В данной работе показаны результаты, полученные при использовании геометрически линейного варианта данной математической модели оболочки с использованием алгоритма, основанного на методе Ритца и итерационных процессах.

Чтобы исследовать прочность оболочки, необходимо на каждом шаге нагружения анализировать напряженно-деформированное состояние конструкции. Если для изотропной конструкции достаточно оценивать интенсивность

напряжений, то для ортотропной и анизотропной необходимо сравнивать значения всех компонент вектора напряжений с предельно допустимыми значениями.

Рассматриваются геометрически линейные варианты пологих ортотропных оболочек, находящихся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки  $q$  и шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру (Рисунок 1).



**Рисунок 1. Общий вид полой оболочки прямоугольного плана**

Расчеты проводились для четырех видов углепластика [26, 27], их физические характеристики показаны в Таблице 1. Также в Таблице 1 приводятся предельные значения напряжений  $F_1^+, F_1^-, F_2^+, F_2^-$  – вдоль осей  $x$  и  $y$  (индексы 1 и 2 соответственно) и сдвиговых  $F_{12}$  в плоскости  $ХОУ$ . Знак «+» соответствует растяжению, знак «-» сжатию.

**Таблица 1. Механические характеристики углепластиков**

Характеристика	Углепластик			
	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	<i>T300/Ероху</i>	<i>M60J/Ероху</i>	<i>T300/976</i>
$E_1$ (МПа)	$1.4 \cdot 10^5$	$1.25 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^5$
$\mu_1$	0.3	0.34	0.32	0.29
$E_2$ (МПа)	$0.97 \cdot 10^4$	$0.78 \cdot 10^4$	$0.59 \cdot 10^4$	$0.97 \cdot 10^4$
$G_{12}$ (МПа)	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.55 \cdot 10^4$
$G_{13}$ (МПа)	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.55 \cdot 10^4$
$G_{23}$ (МПа)	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.33 \cdot 10^4$

$F_1^+$ (МПа)	700	1760	1760	1517
$F_1^-$ (МПа)	-600	-1570	-780	-1599
$F_2^+$ (МПа)	27	80	30	46
$F_2^-$ (МПа)	-184	-168	-168	-253
$F_{12}$ (МПа)	55	98	39	41.4

Здесь  $E_1, E_2$  – модули упругости в направлениях  $x$  и  $y$ ,  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона,  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модули сдвига в плоскостях  $XOY, XOZ, YOZ$  соответственно. В силу условия симметрии упругих постоянных верно равенство  $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$ .

Из Таблицы 1 интуитивно можно понять, какой из материалов наиболее прочный, однако, при проектировании оболочек из конкретных материалов, необходимо знать не качественные характеристики деформирования, а количественные. Поэтому необходимо проведение соответствующих расчетов.

В Таблице 2 показаны геометрические параметры оболочек. Рассматриваемые варианты конструкций можно характеризовать обобщенным параметром кривизны

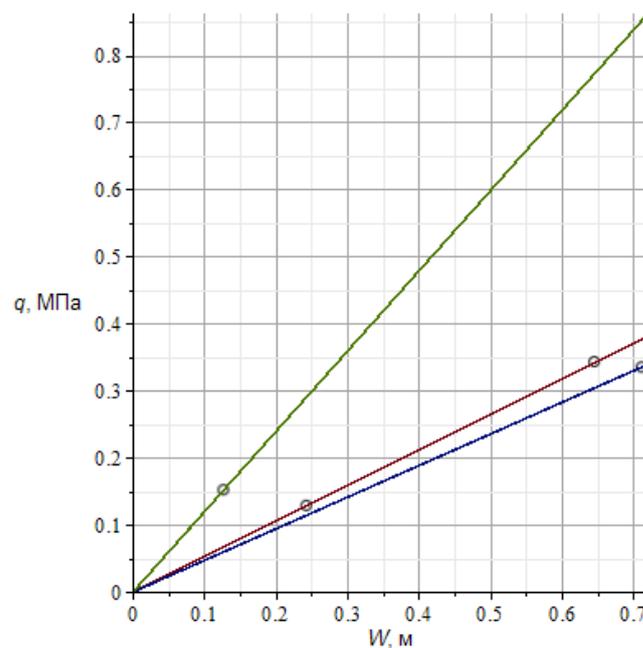
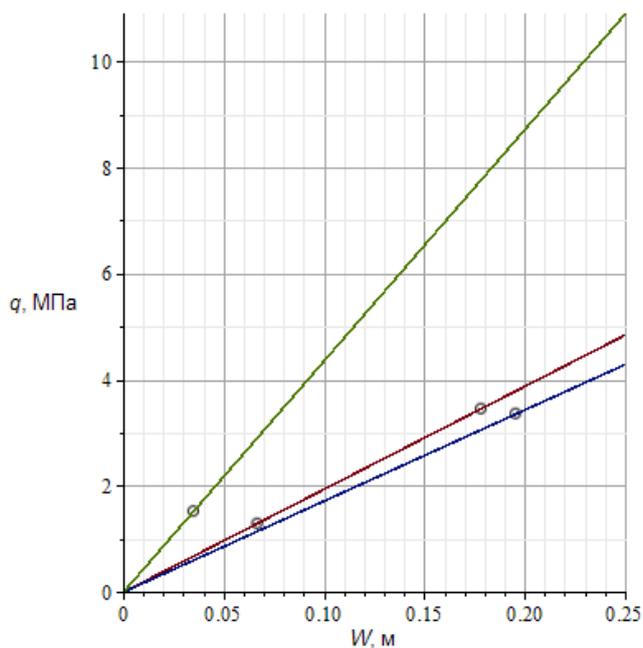
$k_\xi = \frac{a^2}{h \cdot R}$  и безразмерным параметром  $\bar{a} = \frac{a}{h}$ . Таким образом, для оболочек с

разными линейными параметрами, но одинаковыми  $\bar{a}$  и  $k_\xi$ , результаты исследования будут одинаковыми, т.е. одним расчетом исследуется целая серия подобных оболочек.

**Таблица 2. Геометрические параметры конструкций**

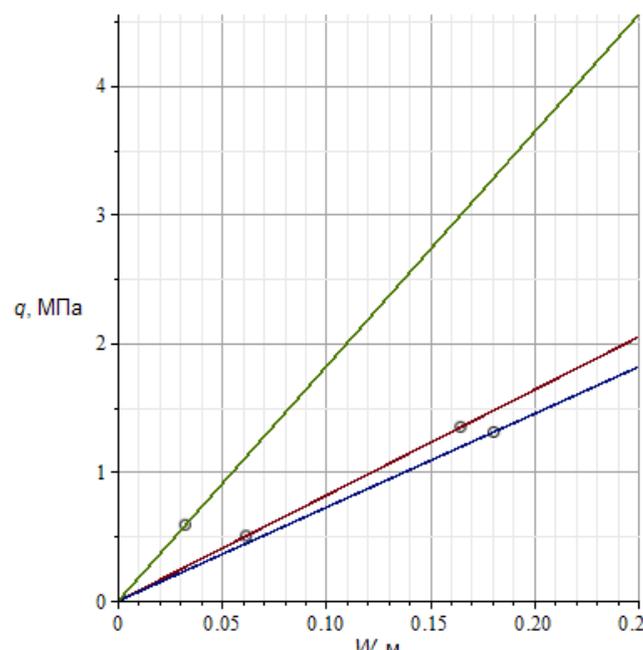
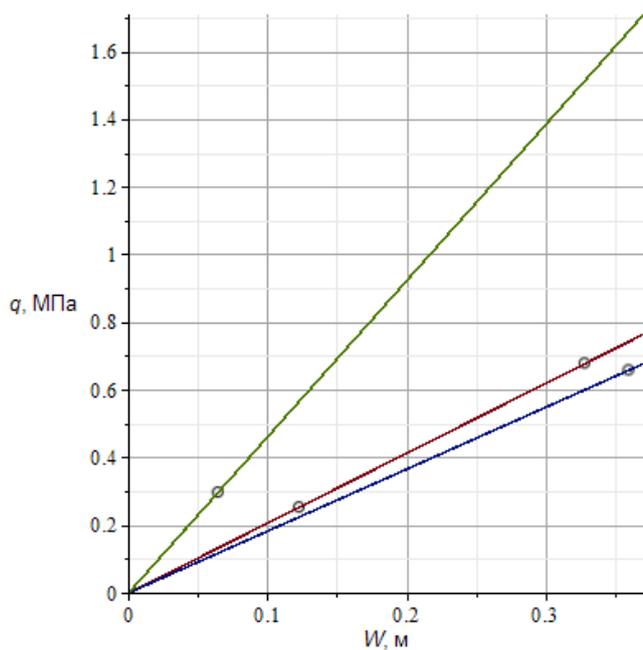
Вариант оболочки	Линейные размеры $a = b, (м)$	Радиусы главных кривизн $R = R_1 = R_2, (м)$	Толщина оболочки $h, (м)$	Безразмерный параметр $\bar{a}$	Обобщенный параметр кривизны $k_\xi$
1	5.4 10.8	20.25 40.5	0.09 0.18	60	16
2	54 36 27 18	34 22.65 17 11.325	0.09 0.06 0.045 0.03	600	953
3	54 36 27 18	67.95 45.3 34 22.65	0.09 0.06 0.045 0.03	600	477
4	54 36 27 18	135.9 90.6 67.95 45.3	0.09 0.06 0.045 0.03	600	238.4

Показанные далее решения получены при удержании в разложении искомым функций 16-ти членов по методу Ритца. Значения напряжений вычислялись на внешней стороне оболочки при  $z = -\frac{h}{2}$ . На Рисунке 2 приводятся графики зависимости «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для рассматриваемых вариантов оболочек с указанием значений нагрузки, при которых происходит достижение напряжениями предельных значений (отмечены на графике точками). Значения прогибов вычислялись в центре конструкции. Так как для углепластиков ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/976 данные зависимости практически «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » совпадают, они показаны одной линией с указанием двух значений предельных нагрузок (точные значения см. в Таблице 3).



а)  $k_{\xi} = 16$

б)  $k_{\xi} = 238.4$



в)  $k_{\xi} = 477$

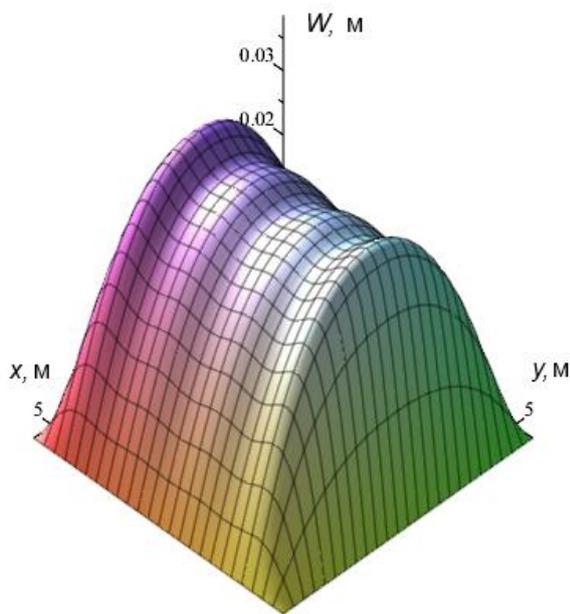
г)  $k_{\xi} = 953$

○ Достижение предела прочности — ЛУ-П/ЭНФБ, Т300/976 — Т300/Ероху — М60J/Ероху

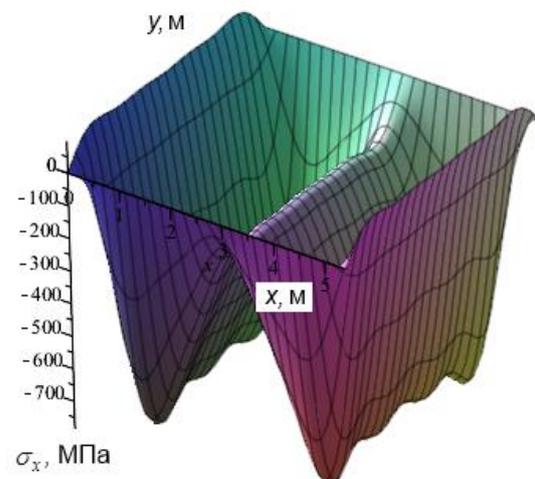
**Рисунок 2. Графики «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для рассматриваемых вариантов оболочек**

В Таблице 3 приводятся значения компонент напряжений и нагрузки при достижении одной из компонент вектора напряжений первого предельного значения. Во всех рассмотренных случаях первым было достигнуто предельное значение напряжения на сжатие вдоль оси  $x$ , столбец с соответствующими значениями в таблице выделен.

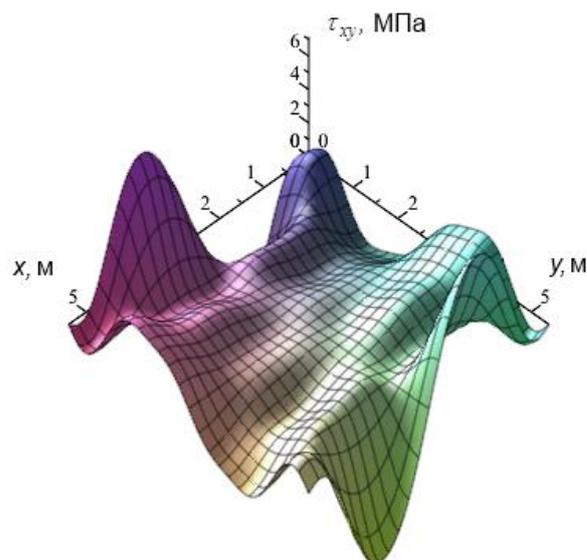
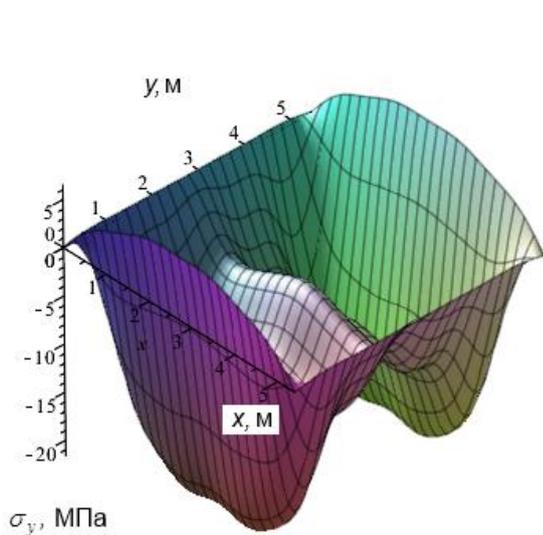
Рассмотрим более подробно оболочку варианта 1, выполненную из углепластика *M60J/Ероху*. На Рисунке 3а показано поле прогибов  $W$  конструкции при нагрузке 1.52 МПа, а на Рисунках 3б,3в,3г поля напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  соответственно.



а) Поле прогибов  $W$



б) Поле напряжений  $\sigma_x$

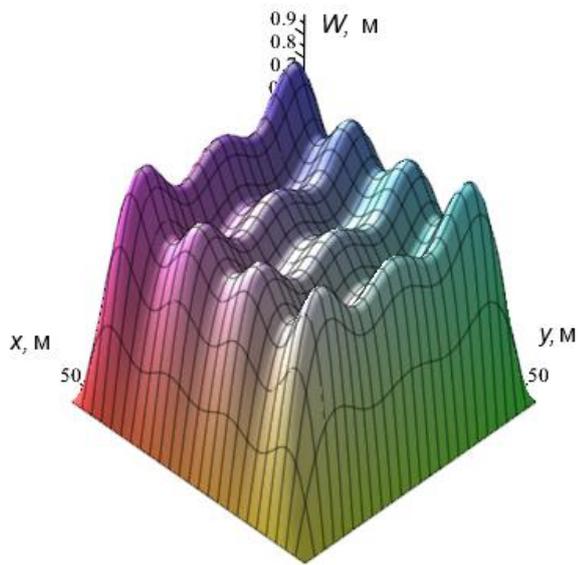


в) Поле напряжений  $\sigma_y$

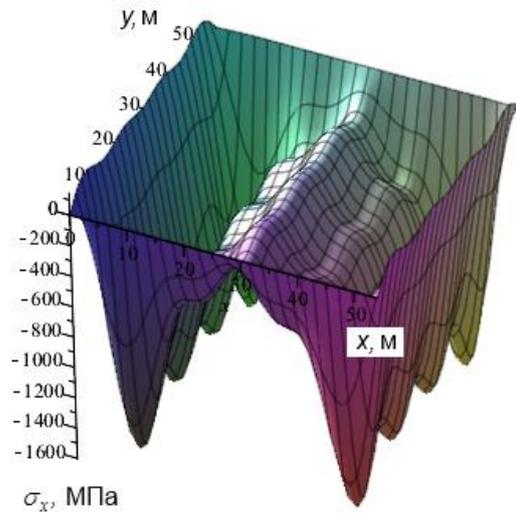
г) Поле напряжений  $\tau_{xy}$

**Рисунок 3. Поля прогибов и напряжений для оболочки варианта 1 из углепластика *M60J/Ероху***

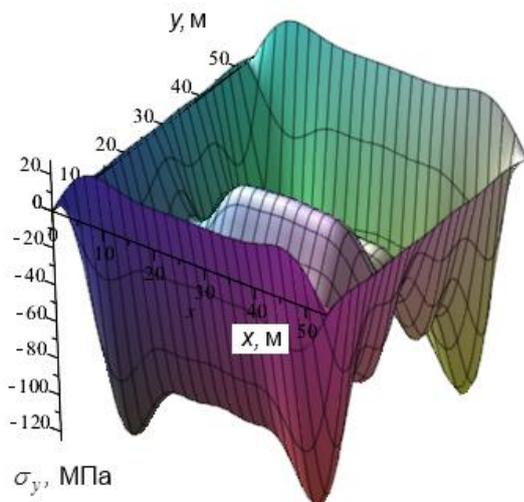
Далее рассмотрим более подробно оболочку варианта 2, выполненную из углепластика *T300/Ероху*. На Рисунке 4а показано поле прогибов  $W$  конструкции при нагрузке 0.335 МПа, а на Рисунках 4б,4в,4г поля напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  соответственно.



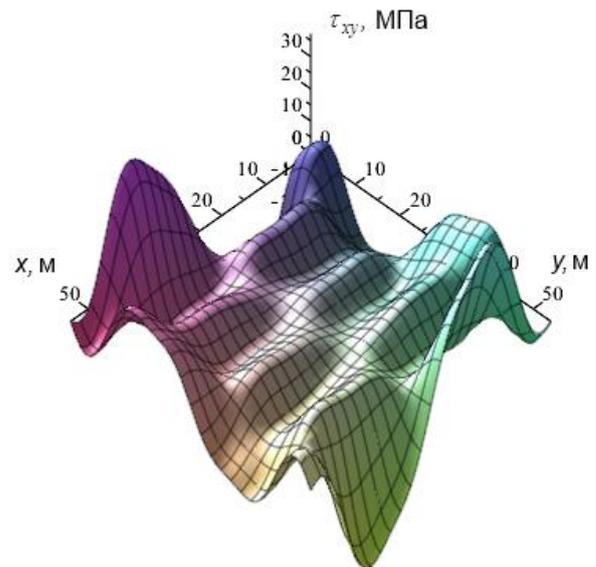
а) Поле прогибов  $W$



б) Поле напряжений  $\sigma_x$



в) Поле напряжений  $\sigma_y$



г) Поле напряжений  $\tau_{xy}$

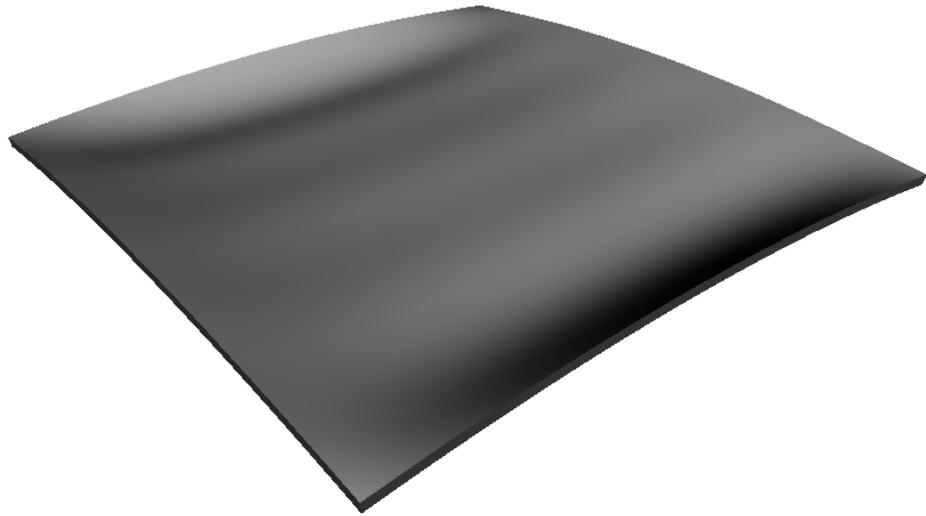
**Рисунок 4. Поля прогибов и напряжений для оболочки варианта 2 из углепластика *T300/Ероху***

Зная распределение напряжений по полю оболочки, проектировщик для снижения концентрации напряжений может подкрепить оболочки ребрами жесткости.

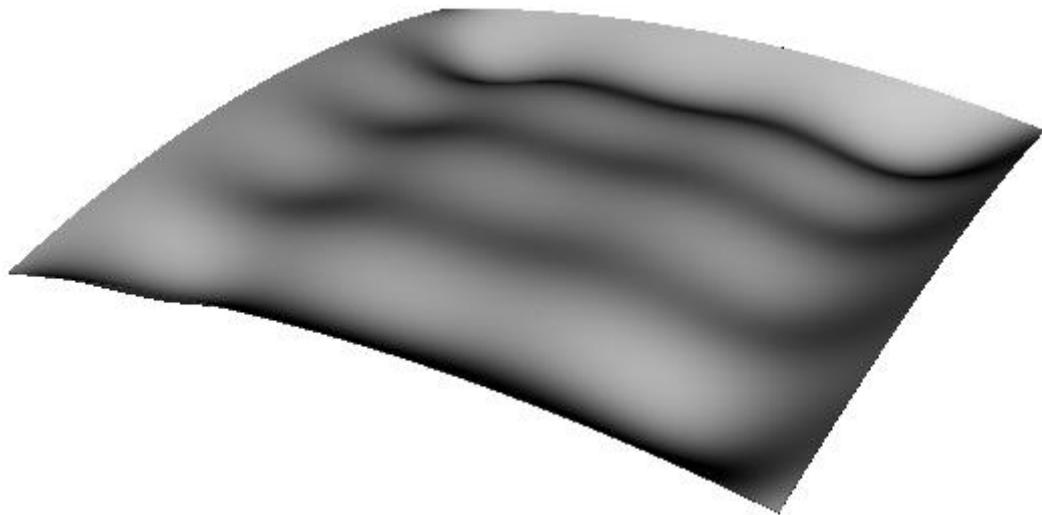
Так как поле прогибов, отложенное от плоскости в системе Maple (Рисунки 3а, 4а), не достаточно наглядно отражает поведение реальной конструкции, желательно откладывать значения прогибов от поверхности оболочки [19]. На Рисунках 5а,б показаны те же поля прогибов, что и на Рисунках 3а, 4а, но отложенные от поверхности оболочки. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба  $k = 10$  и  $k = 5$  соответственно. Рисунки 5а,б были получены с помощью программного модуля визуализации GraphicLibrary, разработанного в соответствии с заданием по гранту «Математическое и программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения» АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» тема № 2.1.2/10824 на 2011 год.

**Таблица 3. Значения компонент напряжений и нагрузки при достижении одной из компонент первого предельного значения**

Оболочка	Углепластик	$q_{max}$ (МПа)	$\sigma_x^+$ (МПа)	$\sigma_x^-$ (МПа)	$\sigma_y^+$ (МПа)	$\sigma_y^-$ (МПа)	$\tau_{xy}^+$ (МПа)
Вариант 1 $k_\xi = 16$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	1.290	78.879	<b>-600.256</b>	15.160	-62.092	11.768
	<i>T300/Ероху</i>	3.362	208.705	<b>-1570.102</b>	40.467	-149.451	33.544
	<i>M60J/Ероху</i>	1.520	98.704	<b>-780.952</b>	6.575	-21.763	7.174
	<i>T300/976</i>	3.454	214.852	<b>-1599.131</b>	34.343	-160.884	37.200
Вариант 2 $k_\xi = 238.4$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.129	54.909	<b>-600.364</b>	10.293	-50.728	13.278
	<i>T300/Ероху</i>	0.335	148.559	<b>-1571.395</b>	27.594	-123.475	37.092
	<i>M60J/Ероху</i>	0.152	58.117	<b>-782.603</b>	4.401	-17.138	6.922
	<i>T300/976</i>	0.343	156.435	<b>-1590.724</b>	22.366	-130.649	41.404
Вариант 3 $k_\xi = 477$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.253	53.547	<b>-600.029</b>	10.324	-50.838	13.075
	<i>T300/Ероху</i>	0.659	145.068	<b>-1570.026</b>	27.648	-123.683	36.474
	<i>M60J/Ероху</i>	0.297	56.146	<b>-780.239</b>	4.387	-17.125	6.746
	<i>T300/976</i>	0.679	153.876	<b>-1599.154</b>	22.532	-131.676	40.996
Вариант 4 $k_\xi = 953$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.504	53.325	<b>-600.588</b>	10.343	-50.923	13.020
	<i>T300/Ероху</i>	1.310	144.467	<b>-1570.595</b>	27.674	-123.811	36.286
	<i>M60J/Ероху</i>	0.589	55.846	<b>-780.046</b>	4.387	-17.130	6.692
	<i>T300/976</i>	1.350	153.238	<b>-1599.555</b>	22.552	-131.799	40.790



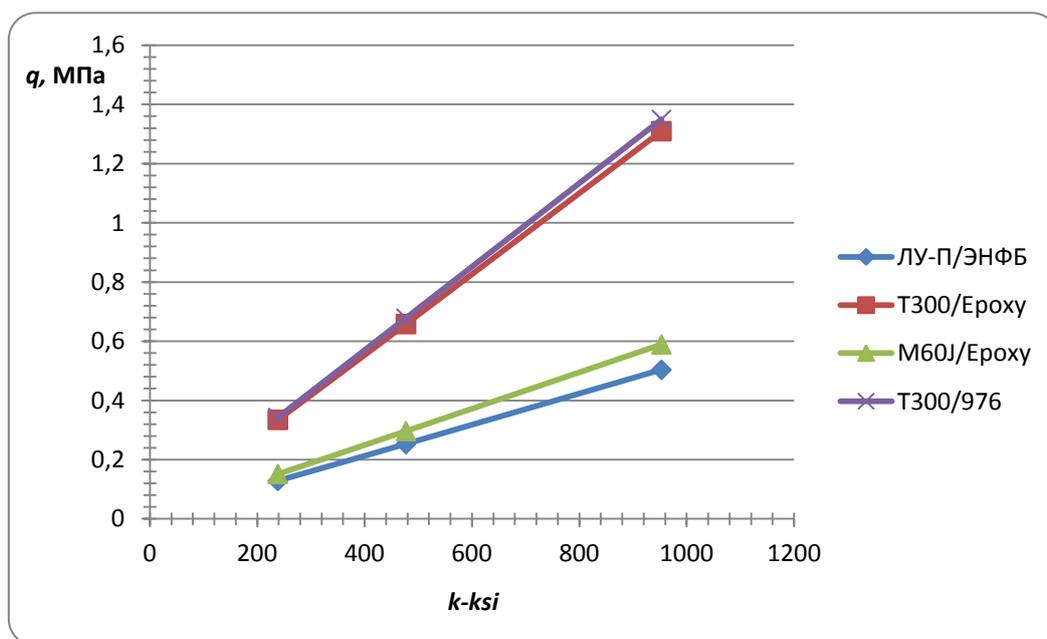
а)



б)

**Рисунок 5. Поля прогибов, отложенные от поверхности оболочки**

На основе полученных данных можно провести сравнение исследуемых конструкций. Для этого рассмотрим оболочки с линейным размером  $a = b = 54$  м (варианты 2, 3 и 4): построим график зависимости нагрузки, при которой происходит потеря прочности, от обобщенного параметра кривизны  $k_{\xi}$  (Рисунок 6).



**Рисунок 6. Зависимость нагрузки потери прочности от обобщенного параметра кривизны  $k_{\xi}$**

С ростом обобщенного параметра кривизны оболочки  $k_{\xi}$  уменьшается радиус кривизны, поэтому происходит уменьшение прогибов и напряжений и, как следствие, увеличение допустимой нагрузки.

### Заключение

Таким образом, для различных оболочечных конструкций, выполненных из различных материалов, получены количественные характеристики прочности и, как следствие, предельно допустимые нагрузки, необходимые при проектировании таких конструкций. Результаты получены при использовании наиболее точной математической модели деформирования ортотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов. Для рассмотренных конструкций потеря прочности происходит при достижении предельных значений напряжений на сжатие вдоль оси  $x$ .

Работа выполнена в рамках гранта Министерства образования и науки РФ «Математическое и программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения» АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” тема № 8.1046.2011 на 2013 год

### **Библиографический список**

1. Пикуль В.В. К расчету устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки прочного корпуса подводного аппарата // Вестник Дальневосточного государственного технического университета. 2009. №2(2). С. 98–105.
2. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве / Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. №1. С. 51–56.
3. Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells // Engineering Structures. 2010. No.32. P.1650–1658.
4. Pimenta P.M., Wriggers P. New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems // CISM International Centre for Mechanical Sciences, Vol. 519. Springer, 2010. 228 p.
5. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, FL, 2004. 856 p.
6. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 248 с.

7. Carrera E., Brischetto S., Nali P. Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis, First Edition. // John Wiley & Sons, Ltd., 2011. 322 p.
8. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Физматлит, 1957. 463 с.
9. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
- 10.Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
- 11.Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Composite Structures. 2010. No.93. Pp.14–31.
- 12.Максимюк V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // International Applied Mechanics. 2012. Volume 48, Issue 6. Pp. 613–687. DOI: 10.1007/s10778-012-0544-8
- 13.Болотин В.В., Москаленко В.Н. Пластины и оболочки из армированных материалов. Основные уравнения, количественные результаты. – Докл. научно-техн. конф. по итогам научно-исслед. работ МЭИ за 1966–67 гг., секция энергомаш. М., 1967.
- 14.Максимюк V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // International Applied Mechanics. 2013. Volume 49, Issue 6. Pp. 685–692. DOI: 10.1007/s10778-013-0602-x

15. Trach V.M. Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry // *International Applied Mechanics*. 2007. Volume 43, Issue 6. Pp. 662–669. DOI: 10.1007/s10778-007-0065-z
16. Lindgaard E., Lund E. A unified approach to nonlinear buckling optimization of composite structures // *Computers & Structures*. 2011. Vol. 89, issues 3–4. Pp. 357–370.
17. Karpov V.V., Maslennikov A.M. Methods for Solving Non-Linear Tasks for Calculating Construction Structures // *World Applied Sciences Journal*, 23 (Problems of Architecture and Construction). 2013. Pp: 178–183.  
<http://idosi.org/wasj/wasj23%28pac%2913/35.pdf> DOI:  
10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035
18. Атисков А.Ю., Баранова Д.А., Карпов В.В., Москаленко Л.П., Семенов А.А. Компьютерные технологии расчета оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2012. 184 с.
19. Асеев А.В., Макаров А.А., Семенов А.А. Визуализация напряженно-деформированного состояния тонкостенных ребристых оболочек // *Вестник гражданских инженеров*. 2013. № 38(3). С. 226–232.
20. Максимюк В.А., Чернышенко И.С. Смешанные функционалы в теории нелинейно-упругого деформирования оболочек // *Прикладная механика*. Киев, Т.40. 2004. №11. С. 45–83.
21. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения // *Инженерно-строительный журнал*. 2013. №5. С. 100–106.

22. Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 160 с.
23. Трушин С.И., Михайлов А.В. Устойчивость и бифуркации гибких пологих сетчатых оболочек // Вестник НИЦ Строительство. 2010. №2. С. 150–158.
24. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. №1.
25. LinShell: linear calculation of shallow shells / Карпов В.В., Семенов А.А., Холод Д.В. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013660432, РФ от 06.11.2013 г.
26. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. №8. С. 70–77.
27. Цепенников М.В., Повышев И.А., Сметанников О.Ю. Верификация численной методики расчета разрушения конструкций из композиционных материалов // Вестник ПНИПУ. Прикладная математика и механика. 2012. №10. С. 225–241.