

УДК 629.7.027.2

## **Моделирование движения несвободной системы твёрдых тел на примере расчёта амортизации шасси лёгкого самолёта**

**Загидулин А.Р.\*, Подружин Е.Г.\*\*, Левин В.Е.\*\*\***

*Новосибирский государственный технический университет,  
проспект К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия*

\*e-mail: [zagidulin@corp.nstu.ru](mailto:zagidulin@corp.nstu.ru)

\*\*e-mail: [planer@craft.nstu.ru](mailto:planer@craft.nstu.ru)

\*\*\*e-mail: [levin@craft.nstu.ru](mailto:levin@craft.nstu.ru)

### **Аннотация**

В статье приводится описание математической модели опоры шасси лёгкого многоцелевого самолёта с использованием методики моделирования движения системы твёрдых тел с голономными связями на основе уравнений Лагранжа первого рода. Традиционно в расчётных практиках для расчёта амортизации шасси летательных аппаратов применяются уравнения Лагранжа второго рода в обобщённых координатах. Недостатком такой методики является то, что для каждой кинематической схемы опоры шасси необходимо составлять свою систему уравнений, что является весьма трудоёмким процессом. Для решения этой задачи целесообразно использовать методику на основе уравнений Лагранжа первого рода. Такой подход позволяет представлять модель опоры шасси в объектном виде — как совокупность объектов: твёрдых тел, силовых факторов и механических связей, что обеспечивает модульность и расширяемость моделей.

**Ключевые слова:** шасси летательного аппарата, жидкостно-газовый амортизатор, метод неопределённых множителей Лагранжа.

## Введение

Наиболее опасными режимами полёта летательного аппарата (ЛА) являются взлёт и посадка. В значительной мере шасси самолёта влияет на безопасность полета при взлёте, посадке и маневрировании на взлётно-посадочной полосе (ВПП). Шасси включает в себя такие опорные элементы, как колёса, лыжи или другие устройства, и силовые элементы, такие как стойки, траверсы, подкосы, рессоры, соединяющие опорные элементы с конструкцией ЛА. Для снижения нагрузки при посадке на шасси ЛА устанавливается амортизация, которая состоит, как правило, из амортизаторов и пневматиков колёс. На современных летательных аппаратах применяются различные конструктивные схемы шасси. Динамический расчёт шасси является одной из важнейших задач проектирования ЛА [1-3]. Для моделирования амортизации шасси различных кинематических схем целесообразно использовать методику численного моделирования движения произвольной голономной системы твёрдых тел с использованием уравнений Лагранжа первого рода [4]. Основы этой методики изложены в работах D. Baraff [5-6], M. Anitescu, F. A. Potra [7-8], M. B. Cline [9], P. Lotstedt [10]. Задача линейного дополнения в системе алгебраических уравнений, возникающая при моделировании односторонних механических связей, рассмотрена в работах R. W. Cottle, J. S. Pang, R. E. Stone [11], M. Anitescu, F. A. Potra [12] и G. M. Katta [13].

## 1 Математическая модель

В работе рассматривается движение системы твёрдых тел с голономными связями относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ . Для каждого тела задаётся подвижная система координат  $C\xi\eta\zeta$ , жёстко связанная с телом, с началом в центре масс тела и осями, совпадающими по направлению с главными осями инерции тела.

Инерционные характеристики тела задаются массой  $m_i$  и тензором инерции:

$$\mathbf{I}_{0i} = \begin{pmatrix} I_i^{(\xi)} & 0 & 0 \\ 0 & I_i^{(\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & I_i^{(\zeta)} \end{pmatrix}.$$

Положение тела в пространстве определяется радиус-вектором центра масс:

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix},$$

и кватернионом поворота [14]:

$$q_i = (\cos(\alpha_i/2), \sin(\alpha_i/2)\mathbf{u}_i),$$

где  $\alpha_i$  — угол поворота тела,  $\mathbf{u}_i$  — ось поворота (вектор единичной длины).

Угловое положение тела можно также представить в виде матрицы поворота:

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} 1 - 2b_i^2 - 2c_i^2 & 2a_i b_i - 2w_i c_i & 2a_i c_i + 2w_i b_i \\ 2a_i b_i + 2w_i c_i & 1 - 2a_i^2 - 2c_i^2 & 2b_i c_i - 2w_i a_i \\ 2a_i c_i - 2w_i b_i & 2b_i c_i + 2w_i a_i & 1 - 2a_i^2 - 2b_i^2 \end{pmatrix},$$

где  $w_i = \cos(\alpha_i/2)$  — скалярная (вещественная) часть кватерниона поворота;

$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \sin(\alpha_i/2)\mathbf{u}_i$  — векторная (мнимая) часть кватерниона поворота.

Уравнения движения центра масс тела:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{m_i}(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^c),$$

где  $\mathbf{v}_i$  — скорость центра масс;  $\mathbf{f}_i$  — суммарный вектор активных сил, действующих на тело;  $\mathbf{f}_i^c$  — суммарный вектор реакций связей, действующих на тело.

Уравнения вращательного движения (динамические уравнения Эйлера) в неподвижной системе координат:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \mathbf{I}_i^{-1}(\boldsymbol{\tau}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) + \boldsymbol{\tau}_i^c),$$

где  $\boldsymbol{\omega}_i$  — угловая скорость тела;  $\boldsymbol{\tau}_i$  — суммарный вектор моментов активных сил, действующих на тело;  $\boldsymbol{\tau}_i^c$  — суммарный вектор моментов реакций связей, действующих на тело;  $\mathbf{I}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{0i} \mathbf{R}_i^T$ .

Уравнения движения системы твёрдых тел можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^c),$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & m_n \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{I}_1 \boldsymbol{\omega}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \\ \boldsymbol{\tau}_n - \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{I}_n \boldsymbol{\omega}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^c = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ \boldsymbol{\tau}_1^c \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n^c \\ \boldsymbol{\tau}_n^c \end{pmatrix},$$

где  $n$  — число твёрдых тел в системе;  $\mathbf{E}_3$  — единичная матрица  $3 \times 3$ .

На положения тел наложены идеальные голономные связи. Одну такую связь между телами  $i$  и  $j$  можно описать скалярной функцией  $C_k(\mathbf{r}_i, q_i, \mathbf{r}_j, q_j)$ . Функции связей для системы твёрдых тел, объединяются в вектор-столбец  $\mathbf{C}$  с размерностью  $d$ , равной количеству связей в системе.

Односторонняя связь, ограничивающая перемещение только в одном направлении, задаётся как неравенство:

$$C_k(\mathbf{r}_i, q_i, \mathbf{r}_j, q_j) \geq 0.$$

Двусторонняя связь задаётся уравнением:

$$C_k(\mathbf{r}_i, q_i, \mathbf{r}_j, q_j) = 0.$$

Вектор реакций в связях определяется из уравнения:

$$\mathbf{F}^c = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda},$$

где  $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}$  — вектор неопределённых множителей Лагранжа,  $\mathbf{J}$  — матрица Якоби

для вектора функций связей  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} & \cdots & \mathbf{J}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_{d1} & \cdots & \mathbf{J}_{dn} \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{V}.$$

В работе рассматривается модель амортизации опоры шасси лёгкого многоцелевого самолёта (рисунок 1).

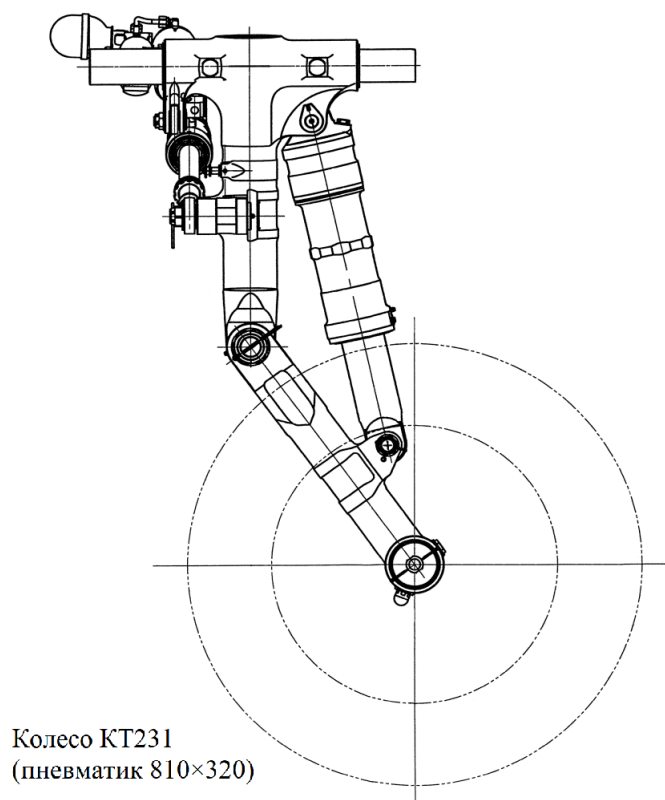


Рисунок 1 – Опора шасси лёгкого многоцелевого самолёта.

Модель опоры шасси самолёта представлена на рисунке 2. Модель состоит из 5 твёрдых тел: колеса 1, рычага 2, штока амортизатора 3, цилиндра амортизатора 4 и груза, приходящегося на опору, 5.

Соединения «а», «б» являются шаровыми шарнирами. Функция связи такого соединения векторная, т.к. ограничиваются три степени свободы системы тел:

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{p}_j$  — радиус-вектора точек в неподвижной системе координат.

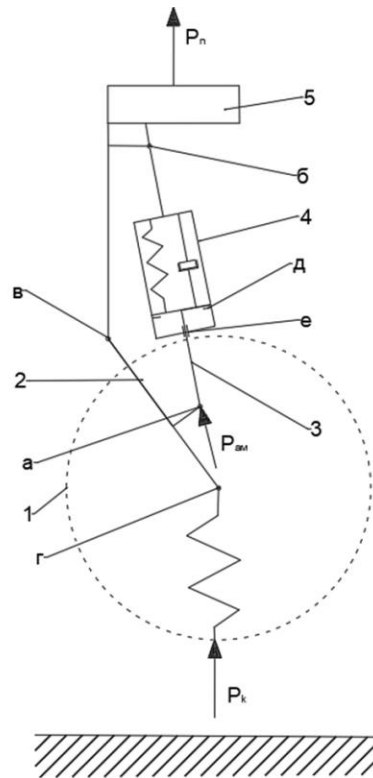


Рисунок 2 – Модель опоры шасси самолёта.

Производная функции связи по времени:

$$\frac{dC_k}{dt} = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j) - \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i),$$

$$\frac{dC_k}{dt} = \begin{pmatrix} -\mathbf{E}_3 & -[\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i]_{\times}^T & \mathbf{E}_3 & [\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j]_{\times}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{v}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{ki} = \begin{pmatrix} -\mathbf{E}_3 & -[\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i]_{\times}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{kj} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & [\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j]_{\times}^T \end{pmatrix},$$

где  $[\mathbf{a}]_{\times}$  — кососимметричная матрица.

Скользящее соединение «е», связывает шток амортизатора с цилиндром. Скользящее соединение ограничивает четыре степени свободы системы и может моделироваться четырьмя функциями связи, ограничивающими положение точки  $\mathbf{p}_i$   $i$ -го тела плоскостью  $j$ -го тела, проходящей через точку  $\mathbf{p}_j$ :

$$C_k = \mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i), \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}_j$  — нормаль к заданной плоскости  $j$ -го тела.

Производная функции связи по времени:

$$\frac{dC_k}{dt} = \mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j) - \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i)) + (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{n}_j) \cdot (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i),$$

$$\frac{dC_k}{dt} = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{v}_j + (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{n}_j \cdot \boldsymbol{\omega}_j - \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{v}_i - (\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{n}_j \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{n}_j \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_j,$$

$$\frac{dC_k}{dt} = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_j^T & -((\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{n}_j)^T & \mathbf{n}_j^T & ((\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{n}_j)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{v}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{ki} = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_j^T & -((\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{n}_j)^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{kj} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_j^T & ((\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{n}_j)^T \end{pmatrix}.$$

Соединения «в», «г» являются цилиндрическими шарнирами.

Цилиндрический шарнир ограничивает пять степеней свободы и может моделироваться одной функцией связи (1) и двумя функциями (2).

Упор «д» ограничивает одну степень свободы и моделируется односторонней связью, ограничивающей перемещение тел  $i$  и  $j$  заданным расстоянием  $L$  между двумя точками этих тел:

$$C_k = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)^2 - L^2 \right),$$

где  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$  — радиус-вектора точек в неподвижной системе координат.

Производная функции связи по времени:

$$\frac{dC_k}{dt} = (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \cdot (\mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j) - \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i)),$$



$$\frac{dC_k}{dt} = \begin{pmatrix} -\mathbf{d}^T & -((\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{d})^T & \mathbf{d}^T & ((\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{d})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{v}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{d} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$ .

$$\mathbf{J}_{ki} = \begin{pmatrix} -\mathbf{d}^T & -((\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{d})^T \end{pmatrix}, \mathbf{J}_{kj} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^T & ((\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{d})^T \end{pmatrix}.$$

Задаваемые в модели активные силы: сила обжатия пневматика  $\mathbf{P}_K$ , осевая сила в амортизаторе  $\mathbf{P}_{ам}$  и подъёмная сила  $\mathbf{P}_п$ .

На рисунке 3 представлена схема амортизатора рассматриваемой опоры шасси.

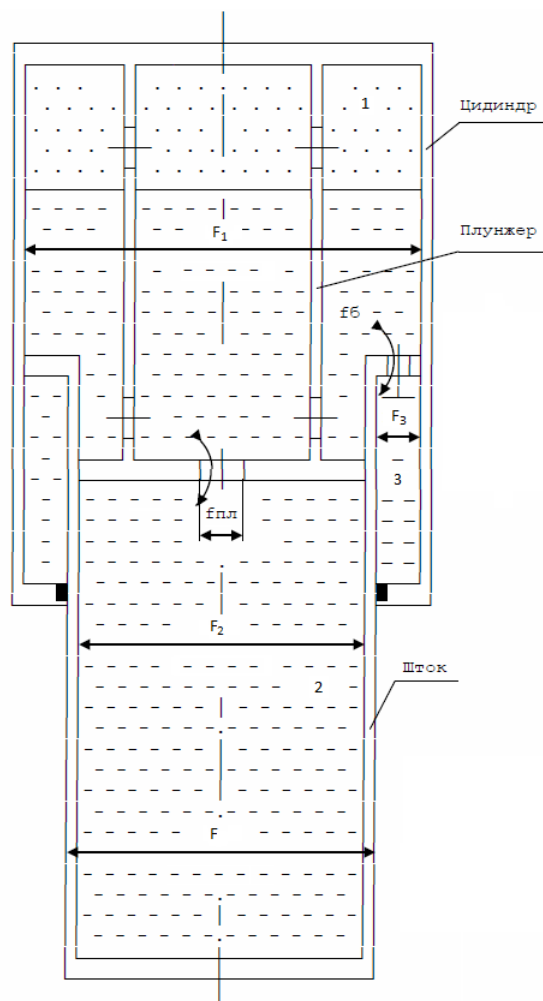


Рисунок 3 – Схема амортизатора.

Осевая сила в амортизаторе  $P_{ам}$  определяется из выражения [15-20]:

$$P_{ам}(s, s_2, s', s'_2) = (1 + \mu \operatorname{sgn}(s')) p_1 F + \xi_{пл} \rho F^3 (s')^2 \operatorname{sgn}(s') / 2 f_{пл}^2 + \\ + \xi_6 \rho F_3^3 (s')^2 \operatorname{sgn}(s') / 2 f_6^2,$$

где  $s$  — обжатие амортизатора;  $s'$  — скорость обжатия амортизатора;  $F = \pi D^2 / 4$  — площадь штока амортизатора;  $F_3 = \pi (D_2^2 - D^2) / 4$  — площадь камеры 3;  $\mu$  — суммарный коэффициент трения в буксах и уплотнениях амортизатора;  $f_{пл}$  — площадь дроссельных отверстий между камерами 1 и 2;  $f_6$  — площадь дроссельных отверстий между камерами 2 и 3;  $\xi_{пл}$  — коэффициент гидродинамического сопротивления при дросселировании перетока жидкости между камерами 1 и 2;  $\xi_6$  — коэффициент гидродинамического сопротивления при дросселировании перетока жидкости между камерами 2 и 3;  $\rho$  — массовая плотность жидкости;  $p_1$  — давление газа в камере 1:

$$p_1 = p_{01} / (1 - sF / \Omega_{01})^{z_1},$$

где  $p_{01}$  — начальное давление газа в камере 1;  $\Omega_{01}$  — начальный объём газа;  $z_1$  — показатель политропы сжатия газа в амортизаторе.

Выражение для силы обжатия пневматика приближённо можно записать в следующем виде:

$$P_k(\delta) = \frac{k\delta}{\left(1 - \frac{\delta}{\delta_{max}}\right)^\alpha},$$

где  $k$  — жесткость пневматика;  $\delta$  — обжатие пневматика;  $\delta_{max}$  — максимально допустимое обжатие пневматика;  $\alpha$  — коэффициент, учитывающий нелинейность диаграммы обжатия пневматика.

## 2 Результаты

Ниже приводятся результаты расчёта амортизации шасси. Уравнения движения — уравнения Лагранжа первого рода — решались методом численного интегрирования. Неопределённые множители Лагранжа определялись на каждом шаге интегрирования с помощью итерационного метода Гаусса-Зейделя. На рисунке 4 представлены диаграммы вертикальной нагрузки на колесо  $P_y$ , обжатия амортизатора  $s$  и вертикального перемещения опоры  $h$  по времени.

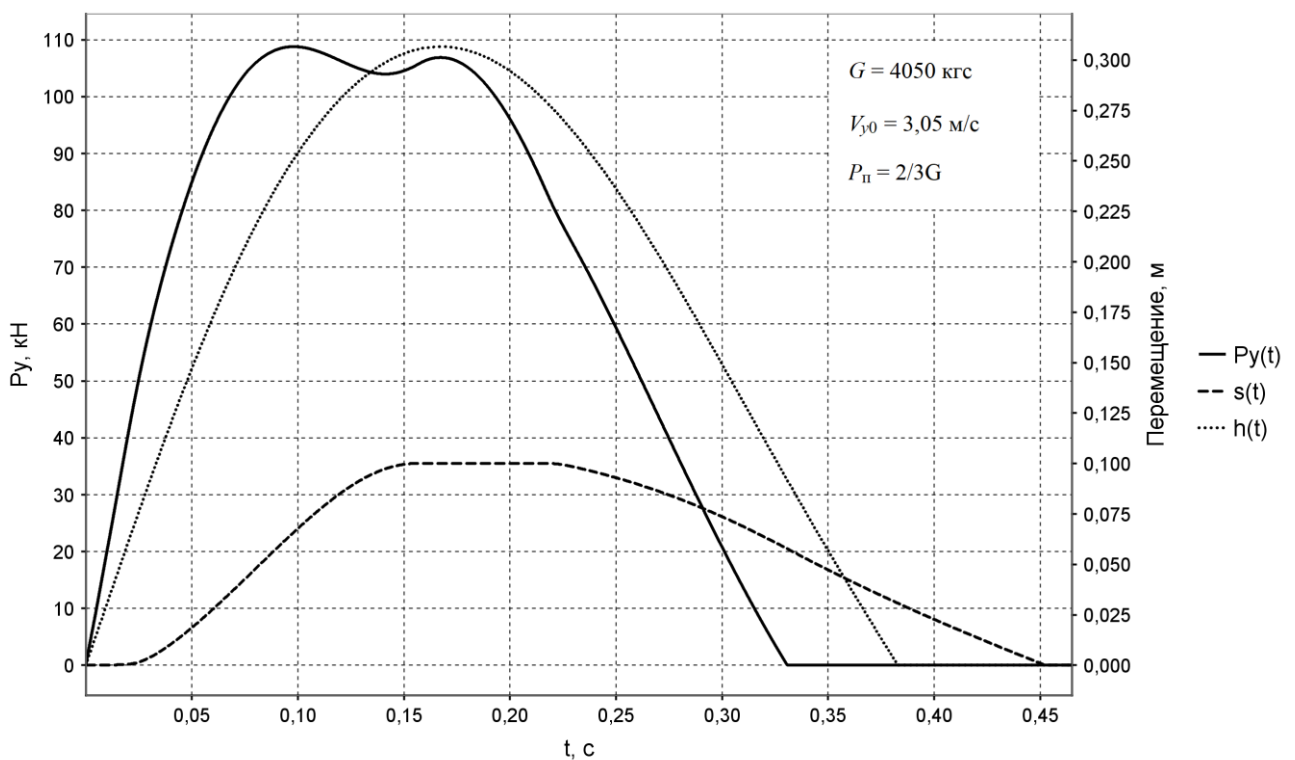


Рисунок 4 – Диаграммы  $P_y(t)$ ,  $s(t)$ ,  $h(t)$ .

$G$  – вес, приходящийся на опору,  $V_{y0}$  – скорость вертикального движения системы в начальный момент времени,  $P_{п}$  – величина подъёмной силы.

На рисунке 5 представлена диаграмма трудоёмкости амортизирующих устройств опоры шасси – зависимость вертикальной нагрузки на колесо от вертикального перемещения опоры.

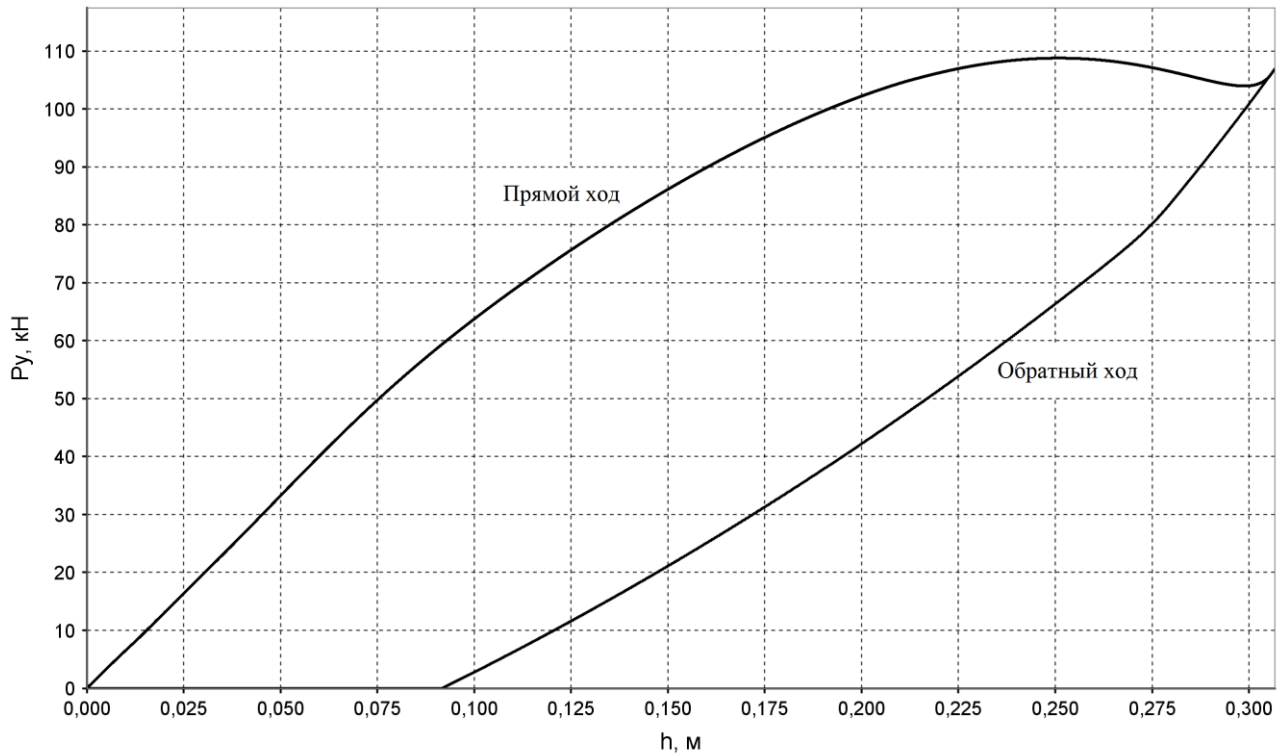


Рисунок 5 – Диаграмма трудоёмкости  $P_y(h)$

### Заключение

Использованная в работе методика расчёта амортизации шасси летательных аппаратов отличается от применявшихся ранее методов расчёта, прежде всего универсальностью. При изменении системы твёрдых тел нет необходимости заново переписывать уравнения движения в обобщенных координатах, изменяется лишь размерность системы, а вид уравнений неизменен. Такой универсальный подход более алгоритмичен и прост при численной реализации. Достоинства предлагаемой методики расчёта очевидны, что позволяет рекомендовать её для решения широкого круга задач динамики систем твёрдых тел.

## Библиографический список

1. Желонкин А.А. Построение и исследование в MSC.ADAMS динамической модели вертолѐта // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35856>
2. Рыбин А.В. Исследование динамики посадки пассажирского самолѐта // Труды МАИ. 2014. № 74. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49196>
3. Кручинин М.М., Кузьмин Д.А. Математическое моделирование копровых испытаний шасси вертолета // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=77093>
4. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. - М.: Изд-во Наука, 1966. - 300 с.
5. Baraff D. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies // SIGGRAPH '94 Proceedings of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, Orlando, FL, July 24–29, 1994. Orlando, 1994, pp. 23 – 34, doi: 10.1145/192161.192168
6. Baraff D. Linear-time dynamics using lagrange multipliers // SIGGRAPH '96 Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, New Orleans, LA, August 04–09, 1996. New Orleans, 1996, pp. 137 – 146, doi: 10.1145/237170.237226.
7. Anitescu M. Modeling rigid multi body dynamics with contact and friction, PhD thesis, University of Iowa, Iowa City, 1997, 105 p.

8. Anitescu M., Potra F.A. A time-stepping method for stiff multibody dynamics with contact and friction // Reports on computational mathematics, ANL/MCS-P884-0501, Mathematics and Computer Science division, Argonne National Laboratory, 2001.
9. Cline M.B. Rigid Body Simulation with Contact and Constraints, The University of British Columbia, 2002, 102 p.
10. Lotstedt P. Mechanical Systems of Rigid Bodies Subject to Unilateral Constraints // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1982, vol. 42, no. 2, pp. 281 - 296.
11. Cottle R.W., Pang J.S., Stone R.E. The Linear Complementarity Problem, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, 757 p.
12. Anitescu M., Potra F.A. Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems // Nonlinear Dynamics, 1997, no. 14, pp. 231 - 247.
13. Katta G.M. Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming, Helderman Verlag, 1988, 629 p.
14. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела. - М.: МФТИ, 2000. - 62 с.
15. Мелик-Заде Н.А. Работа двухкамерного гидравлического амортизатора // Машиноведение. 1971. № 2. С. 44 - 50.
16. Белоус А.А. Методы расчёта масляно-пневматической амортизации шасси самолётов. Труды ЦАГИ № 622. - М.: БНТ ЦАГИ, 1947. - 104 с.
17. Белоус А.А. Амортизация шасси с рычажной подвеской колеса. Труды ЦАГИ № 678. - М.: БНТ ЦАГИ, 1949. - 23 с.

18. Дрожжин В.Л. Исследование местных гидравлических сопротивлений амортизаторов шасси. Труды ЦАГИ № 1893. – М.: ЦАГИ, 1977. - 18 с.
19. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. - М.: Наука, 1977. - 408 с.
20. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. - М.: Машиностроение, 1982. - 326 с.