

Труды МАИ. 2025. № 141  
Trudy MAI. 2025. No. 141. (In Russ.)

Научная статья

УДК 536:52-17

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184497>

EDN: <https://www.elibrary.ru/GNDPQW>

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ГОРЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В МЕТОДЕ ГОДУНОВА

Мария Равилевна Королева<sup>1✉</sup>, Валентин Алексеевич Тененев<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН,

Ижевск, Российская Федерация

<sup>1</sup>[koroleva@udman.ru](mailto:koroleva@udman.ru) ✉

<sup>2</sup>[v.tenenev@gmail.ru](mailto:v.tenenev@gmail.ru)

**Аннотация.** В работе приводится математическая постановка граничных условий на горячей поверхности в методе Годунова. Скорость оттока продуктов сгорания определяется исходя из давления, которое реализуется на границе топливо/газ и находится в результате точного решения задачи Римана. Приведено три алгоритма решения, удовлетворяющие уравнениям состояния Дюпре и ван дер Ваальса. Приведены результаты решения модельной задачи о движении инертного тела, к торцу которого прикреплен горящий элемент. Первичные оценки, сделанные на временном интервале 8 мс, показали, что существует небольшое расхождение в скорости движения тела, которое имеет тенденцию к увеличению в случае более длительного временного интервала.

**Ключевые слова:** граничные условия, горящая поверхность, метод Годунова, задача Римана, уравнение состояния Дюпре, уравнение состояния ван дер Ваальса

**Финансирование:** работа выполнена в рамках темы госзадания УдмФИЦ УрО РАН «Разработка и развитие новых методов исследований в естественно-научных, технических и социогуманитарных направлениях на основе технологий глубоких

нейронных сетей, машинного обучения и математического моделирования» (тема №22040700011-4).

*Для цитирования:* Королева М.Р., Тененев В.А. Математическая постановка граничных условий на горячей поверхности в методе Годунова // Труды МАИ. 2025. № 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184497>

Original article

## MATHEMATICAL STATEMENT OF BOUNDARY CONDITIONS ON A BURNING SURFACE IN THE GODUNOV METHOD

**Maria R. Koroleva**<sup>1✉</sup>, **Valentin A. Tenenev**<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russian Federation

<sup>1</sup>[koroleva@udman.ru](mailto:koroleva@udman.ru)<sup>✉</sup>

<sup>2</sup>[v.tenenev@gmail.ru](mailto:v.tenenev@gmail.ru)

**Abstract.** The work is devoted to the formulation of boundary conditions on the surface of a burning material when solving a problem using the Godunov method. The purpose of the work is to obtain the basic mathematical relationships that allow estimating the parameters on the combustion surface taking into account gas-dynamic processes in the flow. Most often, for determining the combustion rate of a material, the pressure in the boundary cell of the mesh is used. This is done in order to reduce the numerical complexity of the applied numerical algorithms. In the proposed approach, the numerical solution is based on the exact solution of the Riemann problem. When setting the boundary conditions, this problem is implemented in the opposite direction. Partially knowing the parameters on the contact discontinuity, the values in the fictitious cell of the mesh are restored and the missing values on the decay are determined. In this case, the equations of state of real gases are used. They more accurately describe the physicochemical properties of media at high pressures compared to the equation of state of a perfect gas, but lead to a

complication of the mathematical model of the problem. As a result of the conducted research, the basic mathematical equations were obtained, which allow solving the problem of setting boundary conditions using two equations of state – Dupre-Abel and van der Waals. Algorithms for finding all the parameters in the Riemann problem are presented step by step. The described approach was used to solve a model problem of the motion of an inert body, to the end of which a burning element is attached. The problem was solved in a one-dimensional statement on a moving calculation mesh. The combustion rate obtained within the framework of the proposed approach is lower than the combustion rate obtained using a simplified boundary condition by 2.5%. This difference tends to increase in the case of a longer time interval. The obtained relations can be used in the numerical solution of practical problems with burning surfaces and make the use of equations of state of real gases more accessible for solving such problems.

**Keywords:** boundary conditions, burning surface, Godunov method, Riemann problem, Dupre's equation of state, van-der-Waals's equation of state

**Funding:** The work was performed as part the research project of the Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences "Development and evolution of new research methods in natural, engineering, and socio-humanitarian science based on the technologies of ancient neural networks, machine learning and mathematical modeling" (No. 22040700011-4)

**For citation:** Koroleva M.R., Tenenev V.A. Mathematical statement of boundary conditions on a burning surface in the Godunov method. *Trudy MAI*. 2025. No. 141. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184497>

## Введение

Численное моделирование процессов горения твердых веществ используется для решения многих практических задач. В ракетно-космической технике это прежде всего горение твердого топлива в камере двигателя, определяющее расходные и тяговые характеристики двигателя [1-3]. Например, в задачах внутренней баллистики горение пороха, рассматривается при моделировании выстрела и динамики движения снаряда [4,5]. Изучение процессов горения твердых

материалов актуально в области пожарной безопасности, проводится моделирование процессов воспламенения, распространения пламени, тушения, формирования состава продуктов сгорания и их распространения [6-9]. Математическое моделирование обеспечивает безопасный способ изучения этих сложных по физико-химическому и газодинамическому содержанию процессов, и позволяет определяя нестационарные пространственные распределения основных газодинамических параметров потоков.

Вместе с тем качество определяющих уравнений напрямую влияет на результаты моделирования. Применение современных подходов, основанных на сложных математических моделях, позволят повысить точность исследований процессов горения. Поскольку газообразные продукты сгорания по своим физико-химическим свойствам являются реальными газами, то их движение рассматривается с привлечением уравнений состояния (УС) специального вида [10-12]. Чаще всего отток газа с горячей поверхности моделируется с использованием уравнения Дюпре-Абеля [13], которое не учитывает силы взаимодействия молекул на расстоянии, но принимает во внимание объем самих молекул. Однако это уравнение является лишь частным случаем уравнения состояния ван дер Ваальса, которое учитывает оба этих фактора. Данные УС используются также при анализе пневмосистем [14,15] и на ряду с уравнениями Редлиха-Квонга и Дитеричи, как показано в работе [16], являются наиболее перспективными для построения математических моделей рабочих процессов. Кроме этого, данная группа уравнений состояния может быть расширена для повышения точности моделирования, например, уравнением Соаве-Редлиха-Квонга [17]. Эти уравнения применимы для процессов, характеризующихся высокими давлениями газа. Уточнение в УС может существенно повлиять на результаты математического моделирования и в случае моделирования процессов горения твердых веществ.

Исследование механизмов горения связано напрямую с газодинамическими процессами, определяемыми уравнениями сохранения, записанными в дифференциальной форме. Численные методы решения этих уравнений предполагают формулировку условий однозначности решения в виде граничных

условий (ГУ), в том числе на горячей поверхности материала. При этом требуется определение двух видов ГУ: физического и вычислительного. В качестве физических условий может использоваться, например, скорость оттока или расход продуктов сгорания с поверхности, теплота сгорания, полная энтальпия или энтропия [18,19]. Для моделирования нестационарных процессов граничные условия на поверхности газоприхода должны быть основаны, в том числе, и на информации о распределении параметров газового потока в каждый момент времени.

Численная реализация ГУ определяется расчетной схемой, используемой для интегрирования законов сохранения. В случае использования метода Годунова [20,21] задача определения динамически изменяющихся параметров газа на границе горячей поверхности не является тривиальной и зависит во многом от уравнения состояния, используемого для описания газодинамических процессов. Данная работа посвящена вопросам постановке граничных условий на горячей поверхности в методе Годунова с использованием УС Дюпре и ван дер Ваальса. Проводится сравнение двух подходов к построению решения. Первый подход заключается в использовании метода локальной аппроксимации для приведения уравнения состояния к виду двучленного УС [20]. Данный подход использован для обоих рассматриваемых УС. Второй подход основан на использовании исходного уравнения для УС ван дер Ваальса.

### **Постановка задачи**

Рассматривается задача постановки ГУ на горячей поверхности в методе Годунова. Согласно данному методу при определении параметров на границе двух внутренних ячеек сетки решается задача Римана о распаде разрыва. На границах используется метод фиктивных ячеек, значения газодинамических величин в которых определяются исходя из вида границы с целью получения определенных величин на распаде. Метода фиктивных ячеек позволяет реализовать непрерывное численное решение задачи, не выделяя при этом приграничные сеточные объемы.

Схема к задаче постановки ГУ приведена на рисунке 1. Положение горячей поверхности  $AB$  соответствует границе между расчетной ячейкой (на рисунке 1 слева) и фиктивной ячейкой (на рисунке 1 справа). Основными исходными данными для задачи являются  $u$  - скорость,  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $e$  - внутренняя энергия. Нижний индекс «1» у величин относится к параметрам слева от границы  $AB$ , а индекс «2» к параметрам справа в фиктивной ячейке расчетной сетки (рисунок 1). На границе из решения задачи Римана находятся параметры  $U$ ,  $P$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ , определяющие скорость, давление, два значения плотности и энергии на контактном разрыве. Для непроницаемых поверхностей при использовании метода Годунова обычно задают условие равенства давлений и плотностей, для скоростей равенство по модулю с противоположными знаками. Для поверхности с заданной скоростью инертного вдува  $u_0$  для скоростей ГУ имеет вид  $u_2 = -u_1 + 2u_0$ .

Для горячей поверхности параметры на границе определяются значениями параметров газа слева, скоростью горения величиной теплоты сгорания, определяющей количество выделившейся теплоты при полном сгорании единицы массы вещества.

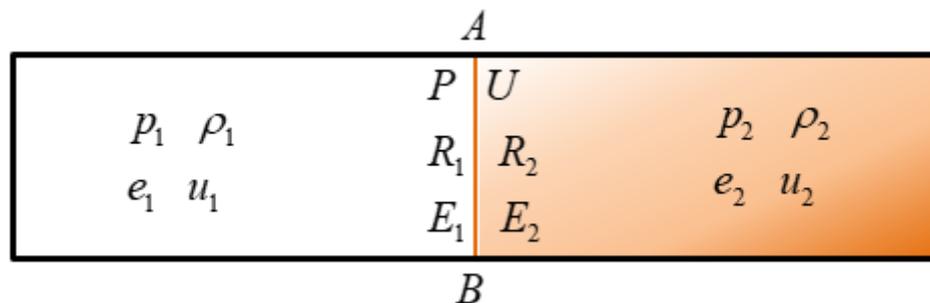


Рисунок 1. Схема к задаче определения граничных условий на горячей поверхности в методе Годунова

Линейная скорость горения поверхности зависит от давления газа по формуле  $v = v_k p$ , где  $v_k$  - константа скорости горения. В этом случае скорость оттока газообразных продуктов сгорания соответствует скорости на контактном разрыве в задаче Римана и определяется по формуле

$$U = v_k P \frac{\rho_k}{R_2} = \beta \frac{P}{R_2}, \quad (1)$$

где  $\rho_k$  - плотность горящего вещества,  $\beta = v_k \rho_k$ .

Исходя из физической постановки граничных условий, теплота сгорания вещества определяет энергию справа от контактного разрыва (рис. 1):

$$Q = E_2. \quad (2)$$

Самым простым способом связать параметры горения топлива с газодинамическими процессами, использовать значение давления в приграничной ячейке при расчете скорости горения. Для более точной постановки ГУ необходимо использовать значение давления на границе, которое соответствует давлению на контактном разрыве в задаче Римана. Однако, для этого необходимо знать значения параметров фиктивной ячейке (на рисунке 2 справа), относительно которых решается задача о распаде разрыва. Они определяются либо условиями Рэнкина-Гюгонио для ударной волны, либо изэнтропичностью процесса и условием постоянства инвариантов Римана для волны разрежения.

Для ударной волны изменение скорости, плотности и энергии находится по формулам Рэнкина-Гюгонио

$$[u] = \pm \frac{[p]}{m}, \quad \left[ \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{[p]}{m^2}, \quad [e] = -\frac{1}{2}(P+p) \left[ \frac{1}{\rho} \right], \quad (3)$$

где  $[u] = U - u$ ,  $[p] = P - p$ ,  $[e] = E - e$ ,  $[1/\rho] = 1/R - 1/\rho$ ,  $m$  - массовая скорость.

Для волны разрежения эти формулы запишутся следующим образом

$$[u] = \pm \frac{[p]}{m}, \quad [u] \pm \frac{2}{\gamma-1} [c] = 0, \quad [\sigma(s)] = 0, \quad \sigma(s) = \gamma \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad (4)$$

где  $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$  - скорость звука, а  $\sigma(s)$  - энтропийная функция,  $\gamma$  - показатель адиабаты, соответствующий в общем случае двучленному уравнению состояния [20].

Так как, на контактном разрыве давление непрерывно, то можно записать равенство

$$p_2 = p_1 = p \quad (5)$$

С учетом уравнения (5) возможны только две конфигурации распада разрыва: либо две ударные волны, либо две волны разрежения справа и слева от контактного разрыва. Если выполняется условие  $p \leq P$  - реализуются две ударные волны, а если  $p > P$  - волны разрежения.

Решение задачи связано с необходимостью нахождения в общем случае восьми неизвестных величин задачи Римана -  $P, U, R_1, R_2, E_1, u_2, \rho_2, e_2$ , которые определяются уравнением состояния газа.

### Уравнение состояния Дюпре, локальная аппроксимация

Уравнение состояния Дюпре имеет вид

$$e = \frac{p}{\rho} \frac{1 - b\rho}{k - 1}, \quad (6)$$

где  $b$  - коволюм,  $k$  - показатель адиабаты продуктов сгорания.

Уравнение (6) с использованием локальной аппроксимации на распаде разрыва преобразуется к виду

$$e = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (7)$$

где параметр перехода для уравнения Дюпре определяются выражениями

$$\gamma = \frac{k - b\rho}{1 - b\rho}, \text{ или } \gamma - 1 = \frac{k - 1}{1 - b\rho}.$$

Теплота сгорания справа от разрыва находится в соответствии уравнением (2) и УС (7) по формуле

$$E_2 = Q = \frac{P}{(\gamma - 1)R_2}. \quad (8)$$

Тогда из соотношений (1) и (2) можно явно выразить скорость контактного разрыва в виде

$$U = -\beta(\gamma - 1)Q. \quad (9)$$

Рассмотрим нахождение неизвестных величин задачи Римана для случая формирования **двух ударных волн**.

Соотношения (3) с учетом равенства  $U - u_1 + \frac{P-p}{m_1} = 0$  позволяют получить

квадратное уравнение относительно давления на контактном разрыве

$$P^2 + BP + C = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты уравнения (10) определяются следующим образом

$$B = -\left(2p + \frac{\gamma+1}{2} \rho_1 \Delta u^2\right), \quad C = p^2 - \frac{\gamma-1}{2} \rho_1 \Delta u^2 p,$$

где  $\Delta u = U - u_1$ .

Решая уравнение (10) наряду с уравнением (3), можно получить выражение для контактных значений давления, плотности и энергии слева от разрыва в виде

$$P = -\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} - C}, \quad R_1 = \frac{\rho_1 m_1}{m_1 + \rho_1 \Delta u}, \quad E_1 = \frac{P}{(\gamma-1)R_1}, \quad (11)$$

где  $m_1 = \sqrt{\rho_1 \left( \frac{\gamma+1}{2} P + \frac{\gamma-1}{2} p \right)}$ .

Из уравнений (3) для правой ударной волны можно выразить плотность и энергию в виде

$$\rho_2 = \left( \frac{P}{\gamma-1} + \frac{P^2 - p^2}{2 \left( P \frac{\gamma+1}{2} + p \frac{\gamma-1}{2} \right)} \right) \frac{1}{Q}, \quad e_2 = \frac{P}{(\gamma-1)\rho_2}, \quad (12)$$

а также найти скорость, плотность справа от контактного разрыва

$$u_2 = U - \frac{P-p}{m_2}, \quad R_2 = \frac{P}{(\gamma-1)Q}. \quad (13)$$

Таким образом, соотношения (5), (8), (9), (11), (13) позволяют вычислить все 8 неизвестных величин задачи Римана в случае формирования двух ударных волн.

Рассмотрим нахождение неизвестных величин задачи Римана для случая формирования двух **волн разрежения**. Для этого перепишем уравнения (4) для левой волны разрежения в виде

$$U - u_1 = \Delta u = -\frac{2}{\gamma - 1}(c_1^* - c_1), \quad \frac{p}{\rho_1^\gamma} = \frac{P}{R_1^\gamma}, \quad (16)$$

где  $c_1^* = \sqrt{\gamma \frac{P}{R_1}}$  - скорость звука слева от контактного разрыва.

Выражения (16) легко разрешаются относительно давления, плотности и внутренней энергии через известные значения слева от горячей поверхности:

$$P = p \left( 1 - \frac{c_1 \rho_1 \Delta u}{p} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, \quad R_1 = \rho_1 \left( \frac{P}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad E_1 = \frac{P}{(\gamma - 1)R_1}. \quad (17)$$

Уравнения (4) записанные для правой волны разрежения позволяют найти неизвестные значения  $\rho_2$ ,  $e_2$  и  $u_2$  по формулам:

$$\rho_2 = \frac{\mathcal{P}}{(c_2^*)^2} \left( \frac{P}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}, \quad e_2 = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho_2}, \quad u_2 = U - \frac{2}{\gamma - 1}(c_2^* - c_2), \quad (18)$$

где  $c_2^* = \sqrt{\gamma \frac{P}{R_2}}$  скорость звука справа от контактного разрыва.

Внутренняя энергия за правой волной разрежения определяется по уравнению теплоты сгорания, тогда  $R_2$  можно найти из любого из соотношений

$$R_2 = \rho_2 \left( \frac{P}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{P}{(\gamma - 1)Q}. \quad (19)$$

Таким образом, уравнения (5), (10), (16), (19) позволяют вычислить все неизвестные величины задачи Римана в случае формирования двух волн разрежения или ударных волн согласно алгоритмам, представленным в таблице 1. Алгоритмы легко реализуемы, так как содержат только алгебраические соотношения и не требуют привлечения итерационных методов нахождения решения.

Таблица 1

Этапы решения для локальной аппроксимации УС Дюпре

№	Две ударные волны		Две волны разрежения	
	Определяемые	Формула	Определяемые	Формула

	величины		величины	
1.	$U$	(9)	$U$	(9)
2.	$P, R_1, E_1$	(11)	$P, R_1, E_1$	(17)
3.	$\rho_2, e_2$	(12)	$\rho_2, e_2, u_2$	(18)
4.	$u_2, R_2$	(13)	$R_2$	(19)

### Уравнение состояния ван дер Ваальса, локальная аппроксимация

Приведенные выше соотношения частично могут быть применены для постановки граничных условий на горячей поверхности в методе Годунова и в случае применения УС ван дер Ваальса:

$$e = (p + a\rho^2) \frac{1 - b\rho}{\delta\rho} - a\rho, \quad (20)$$

где  $a, b$ , размерные параметры, характеризующие исследуемое вещество,  $\delta = R/c_v$ , безразмерный параметр, определяемый удельной газовой постоянной  $R$  и теплоемкостью при постоянном объеме  $c_v$ . Уравнение (20) с использованием локальной аппроксимации на распаде разрыва преобразуется к виду

$$e = \frac{p + p_0}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}$$

с параметрами перехода в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1 - b\rho + \delta}{1 - b\rho}, \quad \gamma - 1 = \frac{\delta}{1 - b\rho}, \\ p_0 &= \frac{b\rho(p + 2a\rho^2) + a\rho^2(\delta - 1)}{1 - b\rho + \delta}, \\ c_0^2 &= \frac{bp + 2a\rho(\delta - 1) + 3ab\rho^2}{1 - b\rho}. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим нахождение неизвестных величин задачи Римана для случая формирования **двух ударных волн**.

Теплота сгорания справа от разрыва находится в соответствии уравнением (2) и уравнением состояния (7) по формуле

$$E_2 = Q = \frac{P + p_0}{(\gamma - 1)R_2} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}.$$

В этом случае не удастся явно выразить скорость движения контактного разрыва:

$$U(R_2) = \beta(\gamma - 1)Q + \beta c_0^2 - \frac{p_0}{R_2} \quad (22)$$

Однозначная зависимость существует между величинами  $R_2, P$ :

$$P(R_2) = (\gamma - 1)R_2Q + c_0^2R_2 - p_0. \quad (23)$$

Слева можно получить следующие зависимости:

$$U(R_1) = u_1 - \sqrt{-(P(R_1) - p) \frac{\rho_1 - R_1}{\rho_1 R_1}} \quad (24)$$

$$P(R_1) = \frac{(\rho_1 - R_1)(p_0 - c_0^2 R_1) + \frac{1}{2} \rho_1 R_1^2 p(\gamma - 1) - e_1}{\frac{1}{2} \rho_1 R_1^2 (\gamma - 1) - (\rho_1 - R_1)} \quad (25)$$

Приравнивая правые части уравнений (22),(24) и (23),(25), получаем систему из двух нелинейных уравнений, решение которой приводит к нахождению величин  $R_1, R_2$ , которые, в свою очередь, однозначно определяют  $U, P$ .

Значение плотности газа можно найти из соотношения

$$R = \rho \frac{(\gamma + 1)(P + p_0) + (\gamma - 1)(p + p_0)}{(\gamma - 1)(P + p_0) + (\gamma + 1)(p + p_0)}, \quad (26)$$

а скорость из соотношений (3)

$$u_2 = U - \sqrt{-(P - p) \frac{\rho_2 - R_2}{\rho_2 R_2}}. \quad (27)$$

Рассмотрим нахождение неизвестных величин случая формирования двух **волн разрежения**. Уравнения (4) для двучленного уравнения состояния переписутся следующим образом

$$\sigma(s) = \gamma \frac{P + p_0}{\rho^\gamma}, \quad c = \sqrt{\gamma \frac{P + p_0}{\rho}}, \quad (28)$$

Как и для ударных волн, невозможно в данном случае однозначно определить скорость движения газа на контактном разрыве. Систему уравнений можно составить из соотношений для давления из условия постоянства энтропии слева и уравнения состояния за волной разрежения справа:

$$P = (p + p_0) \left( \frac{R_1}{\rho_1} \right)^\gamma = (\gamma - 1)R_2 Q + R_2 c_0^2 - \mathcal{P}_0 \quad (29)$$

и из уравнений для скорости слева в волне разрежения и скорости оттока газов с поверхности топлива:

$$U = u_1 - \frac{2}{\gamma - 1} \left( \sqrt{\gamma \frac{p_1 + p_0}{\rho_1^\gamma} R_1^{\gamma-1}} - c_1 \right) = (\gamma - 1)\beta Q + \beta c_0^2 - \beta \mathcal{P}_0 / R_2 \quad (30)$$

Решая систему уравнений (29), (30) получаем значения  $R_1, R_2$ , которые в свою очередь однозначно определяют  $U, P$ . Значение плотности справа легко находится из энтропийного равенства

$$\frac{P + p_0}{R_2^\gamma} = \frac{p_2 + p_0}{\rho_2^\gamma}. \quad (31)$$

Энергия находится из уравнения состояния:

$$E_1 = \frac{P + \mathcal{P}_0}{(\gamma - 1)R_1} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}, \quad e_2 = \frac{p_2 + \mathcal{P}_0}{(\gamma - 1)\rho_2} - \frac{c_2^2}{\gamma - 1}. \quad (32)$$

Уравнения (4) записанные для правой волны разрежения позволяют найти скорость газа:

$$u_2 = U - \frac{2}{\gamma - 1} (c_2^* - c_2). \quad (33)$$

где  $c_2 = \sqrt{\gamma \frac{p_2 + p_0}{\rho_2}}$  и  $c_2^* = \sqrt{\gamma \frac{P + p_0}{R_2}}$ .

Алгоритмы получения решения приведены в таблице 2. В этом случае первый этап требует решения системы нелинейных уравнений, который должен выполняться численно с привлечением, например, метода Ньютона. Это осложняет алгоритм постановки ГУ и дополнительно требует оценки начального приближения для численного метода.

## Этапы решения для локальной аппроксимации УС ван дер Ваальса

№	Две ударные волны		Две волны разрежения	
	Определяемые величины	Формулы	Определяемые величины	Формулы
1.	$R_1, R_2$	(22)-(25)	$R_1, R_2$	(29)-(30)
2.	$U$	(22)	$U$	(30)
3.	$P$	(23)	$P$	(29)
4.	$\rho_2$	(26)	$\rho_2$	(31)
5.	$E_1, e_2$	(20)	$E_1, e_2$	(32)
6.	$u_2$	(27)	$u_2$	(33)

## Уравнение состояния ван дер Ваальса

В случае использования исходного уравнения состояния ван дер Ваальса основные уравнения на **ударных волнах** записываются следующим образом

$$E - e - \frac{1}{2}(p + P)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) = 0, \quad (34)$$

$$m = \frac{u - U}{\rho - R} \rho R, \quad (35)$$

$$m^2 = -\frac{P - p}{\rho - R} \rho R. \quad (36)$$

Из уравнения (34) можно явно выразить давление  $P$  через плотность используя уравнение состояния (20)

$$P(R) = 2 \frac{e\delta - \frac{p\delta}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right) + a(\delta - 1)R + abR^2}{(\delta + 2)\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{\rho} + 2b\right)}, \quad (37)$$

а из уравнений (35) и (36) получить выражение для скорости на ударной волне

$$U = u \mp \sqrt{-(P-p) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right)}. \quad (38)$$

Для изэнтропического течения справедливы соотношения:

$$P(R) = (p + a\rho^2) \left( \frac{1 - b\rho R}{1 - bR\rho} \right)^{1+\delta} - aR^2, \quad (39)$$

$$U(R) = u \pm \int_{\rho}^R \left[ (1 + \delta)(p + a\rho^2) \left( \frac{1 - b\rho r}{1 - br\rho} \right)^{1+\delta} \frac{r}{1 - br} - 2ar^3 \right]^{0.5} dr. \quad (40)$$

при этом скорость звука определяется как

$$c^2 = \frac{1 + \delta}{\rho} \frac{p + a\rho^2}{1 - b\rho} - 2a\rho.$$

Процедура построения решения во многом схожа с предыдущим алгоритмом и начинается с решения системы из двух нелинейных уравнений относительно скорости и давления на контактном разрыве. При двух ударных волнах система имеет вид:

$$\frac{e_1\delta - \frac{p\delta}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{\rho_1} \right) + a(\delta - 1)R_1 + abR_1^2}{(\delta + 2) \frac{1}{R_1} - \left( \frac{1}{\rho_1} + 2b \right)} = (Q + aR_2) \frac{\delta R_2}{1 - bR_2} - aR_2^2 \quad (41)$$

$$u_1 - \sqrt{-(P-p) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{\rho_1} \right)} = \beta(Q + aR_2) \frac{\delta}{1 - bR_2} - aR_2 \quad (42)$$

При двух **волнах разрежения**

$$(p + a\rho_1^2) \left( \frac{1 - b\rho_1 R_1}{1 - bR_1\rho_1} \right)^{1+\delta} - aR_1^2 = (Q + aR_2) \frac{\delta R_2}{1 - bR_2} - aR_2^2 \quad (43)$$

$$u_1 + \int_{\rho}^{R_1} \left[ (1 + \delta)(p + a\rho_1^2) \left( \frac{1 - b\rho_1 r}{1 - br\rho_1} \right)^{1+\delta} \frac{r}{1 - br} - 2ar^3 \right]^{0.5} dr =$$

$$= \beta(Q + aR_2) \frac{\delta}{1 - bR_2} - aR_2 \quad (44)$$

Последовательность нахождения неизвестных величин приведена в таблице 3. В данном случае также на первом этапе необходимо решить систему нелинейных уравнений. В случае волн разрежения для нахождения  $\rho_2$  также необходимо разрешить нелинейное уравнение третьего порядка.

Таблица 3

Этапы решения для УС ван дер Ваальса

№	Две ударные волны		Две волны разрежения	
	Определяемые величины	Формулы	Определяемые величины	Формулы
1.	$R_1, R_2$	(41), (42)	$R_1, R_2$	(43), (44)
2.	$U$	(38), для $R_1$ и $\rho_1$	$U$	(40), для $R_1$ и $\rho_1$
3.	$P$	(37), для $R_1$ и $\rho_1$	$P$	(39), для $R_1$ и $\rho_1$
4.	$\rho_2$	(26)	$\rho_2$	(39)
5.	$E_1, e_2$	(34)	$E_1, e_2$	(20)
6.	$u_2$	(38)	$u_2$	(40), для $R_2$ и $\rho_2$

Таким образом, математическая постановка ГУ на поверхности горения по УС Дюпре является более простой по сравнению с УС ван дер Ваальса. В этом случае нахождение неизвестных величин происходит явным образом без использования итерационных методов поиска решения. Для уравнения состояния ван дер Ваальса требуется применение данных методов для решения системы нелинейных алгебраических уравнений, что усложняет численный алгоритм решения задачи.

### Решение модельной задачи

Для оценки влияния способа задания величины давления в формуле для скорости оттока продуктов сгорания с горячей поверхности была решена модельная задача о движении инертного тела, к торцу которого прикреплен горящий элемент (рис. 2). Массы заряда и тела равны  $m_1 = 5$  кг и  $m_2 = 1$  кг. Давление в камере слева от

заряда в начальный момент времени составляет  $p_0 = 50$  атм, температура  $T_0 = 2000$  К. Физические свойства продуктов сгорания:  $k = 1.35$ ,  $R = 300$  Дж/(кг К). Задача решается в одномерной постановке с использованием динамической сетки. Тело и заряд имеют цилиндрическую форму с диаметром 50 мм.

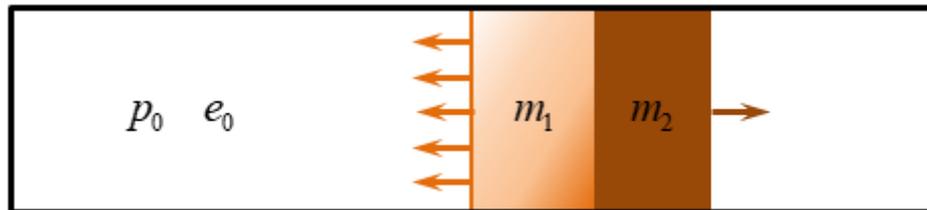


Рисунок 2. Задача о движении инертного тела с горящим элементом.

Уравнения движения газа дополнялись уравнениями, описывающими движение тела и изменения массы заряда в процессе горения:

$$\frac{dV(m_1 + m_2)}{dt} = PS,$$

$$\frac{dm_1}{dt} = G,$$

где  $V$  - скорость движения тела,  $P$  - давление на горячей поверхности,  $S$  - площадь поперечного сечения тела,  $G$  - расход газа.

На рис. 3-4 показаны результаты решения задачи в виде изменения давления горячей поверхности и скорости тела по времени. Первичные оценки сделаны на начальном этапе продолжительностью 8 мс. Расчеты проводились при различной постановке ГУ относительно давления, которое учитывалось в законе горения. В первом случае использовалось давление в приграничной ячейке сетки (на рисунке 1 слева), а во втором, давление на контактном разрыве  $P$ .

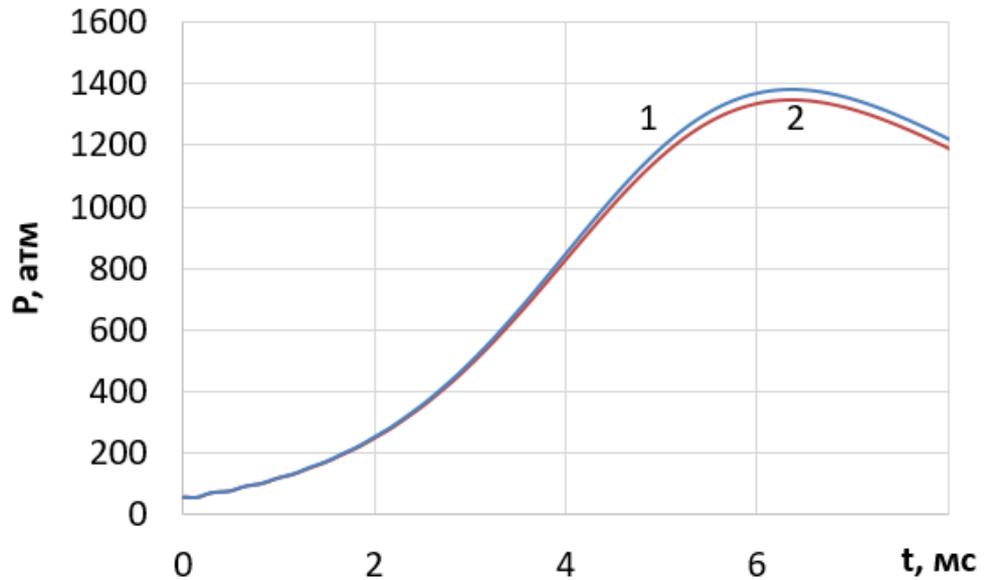


Рисунок 3. Изменение давления на горячей поверхности по времени:  
1, приграничной ячейке, 2, на горячей поверхности.

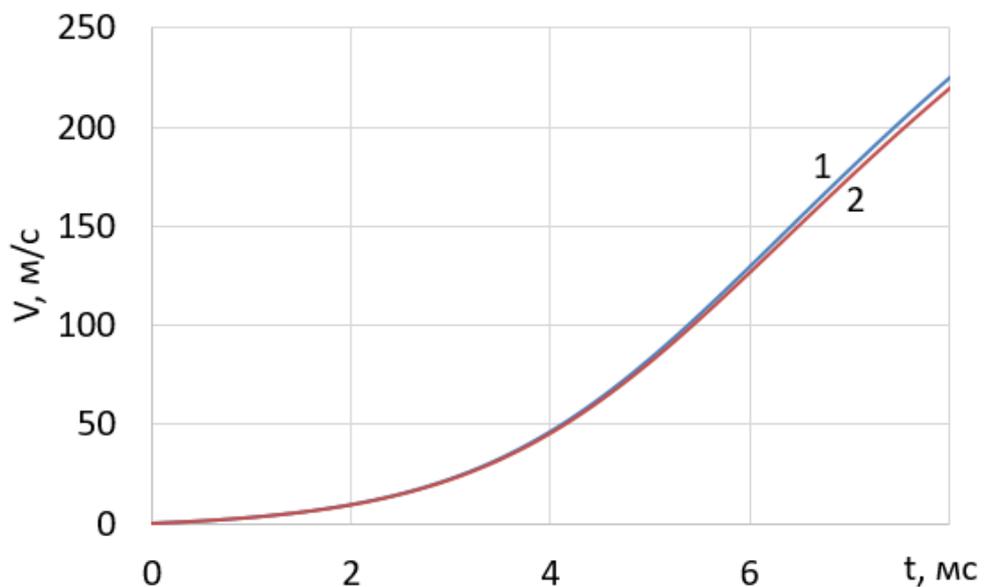


Рисунок 4. Изменение скорости тела по времени,  
давление соответствовало: 1, приграничной ячейке, 2, на поверхности.

Видно небольшое отличие в результатах расчетов. Скорость тела в случае давления на горячей поверхности, рассчитанного по давлению на контактном разрыве ниже, чем скорость, определенная по давлению газа в приграничной точке. Максимальная относительная разница составляет 2,5% и согласно графикам, существует тенденция к увеличению этой разницы с течением времени.

## Заключение

В работе приводятся три подхода к формулировке граничных условий на горячей поверхности в методе Годунова. Скорость оттока продуктов сгорания определяется исходя из давления, которое реализуется на границе топливо/газ и находится в результате точного решения задачи Римана. Приведено три алгоритма решения, удовлетворяющие уравнениям состояния Дюпре и ван дер Ваальса. Показано, что, математическая постановка ГУ на поверхности горения по УС Дюпре является более простой по сравнению с УС ван дер Ваальса. В этом случае нахождение неизвестных величин происходит явным образом без использования итерационных методов поиска решения, в то время как для уравнения состояния ван дер Ваальса требуется применение численных методов решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Приведены результаты решения модельной задачи о движении инертного тела, к торцу которого прикреплен горящий элемент. Первичные оценки, сделанные на временном интервале 8 мс, показали, что существует небольшое расхождение в скорости движения тела, которое имеет тенденцию к увеличению в случае более длительного временного интервала.

## Список источников

1. Соломонов Ю.С., Липанов А.М., Алиев А.В., Дорофеев А.А., Черепов В.И. Твёрдотопливные регулируемые двигательные установки. – М.: Машиностроение, 2011. - 776 с.
2. Беляков А.Ю. Моделирование поверхности горения твердого топлива с учетом теплопроводящих элементов // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112931>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-19](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-19)
3. Крайнов А.Ю. Исследование нестационарного горения заряда в модельной твердотопливной регулируемой двигательной установке // Химическая физика и мезоскопия. 2024. Т. 26, № 2. С. 155-163. DOI: [10.62669/17270227.2024.2.14](https://doi.org/10.62669/17270227.2024.2.14)
4. Русяк И.Г., Тененев В.А. Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодействия

- // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12, № 5. С. 1123-1147.  
DOI: [10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147)
5. Королев С.А., Липанов А.М., Русяк И.Г., Тененев В.А. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 76-83. DOI: [10.17223/19988621/57/6](https://doi.org/10.17223/19988621/57/6)
  6. Shaklein A.A., Trubachev S.A., Morar G., Mitrukova E.A. et al. Experimental and numerical study of PMMA combustion in counterflow configuration // Case Studies in Thermal Engineering. 2024. V. 54, P. 104033. DOI: [10.1016/j.csite.2024.104033](https://doi.org/10.1016/j.csite.2024.104033)
  7. Shaklein A.A., Karpov A.I. On the numerical approach to the prediction of flame spread over non-planar surface of solid combustibles // Combustion Theory and Modelling. 2023. V. 27, P. 645–652. DOI: [10.1080/13647830.2023.2197408](https://doi.org/10.1080/13647830.2023.2197408)
  8. Adiga K.C., Hatcher R.F., Sheinson R.S., Williams F.W., Ayers S. A computational and experimental study of ultra fine water mist as a total flooding agent // Fire Safety Journal. 2007. V. 42 (2), P. 150–160. DOI: [10.1016/j.firesaf.2006.08.010](https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2006.08.010)
  9. Шумихин А.А., Карпов А.И., Корепанов М.А., Новожилов В.Б. Численное исследование воздействия тонкораспылённой воды на турбулентное диффузионное пламя // Химическая физика и мезоскопия. 2012. Т. 14, № 3. С. 391-400.
  10. Крайко А.Н. Аналитическое представление термодинамических функций воздуха // Инженерный журнал. 1964. Т. 4, № 3. С. 548–550.
  11. Тененев В.А., Королева М.Р. Моделирование газодинамических процессов с различными уравнениями состояния // Интеллектуальные системы в производстве. 2023. Т. 21, № 3. С. 115-123. DOI: [10.22213/2410-9304-2023-3-115-123](https://doi.org/10.22213/2410-9304-2023-3-115-123)
  12. Raeder T., Chernova A.A., Tenenev V.A. Incorporation of Fluid Compressibility into the Calculation of the Stationary Mode of Operation of a Hydraulic Device at High Fluid Pressures // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. V. 17, № 2. P. 195-209. DOI: [10.20537/nd210205](https://doi.org/10.20537/nd210205)
  13. Меньшов И.С., Немцев М.Ю., Семенов И.В. Численное моделирование волновых процессов при горении неоднородно распределенного заряда // Журнал

вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 9. С. 1591-1604. DOI: [10.1134/S004446691909014X](https://doi.org/10.1134/S004446691909014X)

14. Чернышев А.В., Кюрджиев Ю.В., Атамасов Н.В., Лебедев А.В. Обоснование выбора модели рабочего тела при расчете динамических параметров пневмогидравлических систем // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2018. № 9 (702). С. 57-63. DOI: [10.18698/0536-1044-2018-9-57-63](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-9-57-63)

15. Зеленов М.С., Атамасов Н.В., Чернышев А.В. К вопросу моделирования динамики пневмомеханического устройства // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2018. № 6 (123). С. 20-33. DOI: [10.18698/0236-3941-2018-6-20-33](https://doi.org/10.18698/0236-3941-2018-6-20-33)

16. Атамасов Н.В., Чернышев А.В. Учёт реальных свойств газа в математических моделях рабочих процессов компонентов пневматических систем // X Общероссийская молодежная научно-техническая конференция «Молодежь. Техника. Космос» (Санкт-Петербург, 18–20 апреля 2018): труды конференции. - Санкт-Петербург: Балтийский государственный технический университет «Военмех», 2018. С. 29-35.

17. Koroleva M.R., Tenenev V.A. Approximate Riemann Solvers for the Soave—Redlich—Kwong Equation of State // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. V. 20, No. 3. P. 345-359. DOI: [10.20537/nd240905](https://doi.org/10.20537/nd240905)

18. Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р., Кирюшкин А.Е. О двух подходах к моделированию границы газоприхода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 6 (32). С. 94-102.

19. Брыков Н.А., Волков К.Н., Емельянов В.Н., Тетерина И.В. Течения идеального и реального газа в каналах переменного сечения с нестационарным локализованным подводом энергии // Вычислительные методы и программирование. 2017. Т. 18, № 1. С. 20-40. DOI: [10.26089/NumMet.v18r103](https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r103)

20. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1, № 6. С.1020-1050.

21. Махров А.С., Пирогов С.Ю. Изменение характеристик сверхзвукового воздухозаборника при воздействии высокотемпературных образований, создаваемых в набегающем потоке // Труды МАИ. 2012. № 58. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=31045>

## References

1. Solomonov Yu.S., Lipanov A.M., Aliev A.V., Dorofeev A.A., Cherepov V.I. *Tverdotoplivnye reguliruemye dvigatel'nye ustanovki* (Regulable solid-propellant rocket engines). Moscow: Mashinostroenie Publ., 2011. 776 p.
2. Belyakov A.Yu. Solid fuel combustion surface modelling with regard for heat-conducting elements. *Trudy MAI*. 2020. No. 110. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112931>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-19](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-19)
3. Krainov A.Yu. Study of gas dynamics of combustion of mixed solid fuel under pressure fluctuations on the surface of the fuel. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya*. 2024. V. 26, No. 2. P. 155-163. (In Russ.). DOI: [10.62669/17270227.2024.2.14](https://doi.org/10.62669/17270227.2024.2.14)
4. Rusyak I.G., Tenenev V.A. Modeling of ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*. 2020. V. 12, No. 5. P. 1123-1147. (In Russ.). DOI: [10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147)
5. Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G., Tenenev V.A. Development of approaches to solving the inverse problem of external ballistics in various application conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 2019. No. 57. P. 76-83. (In Russ.). DOI: [10.17223/19988621/57/6](https://doi.org/10.17223/19988621/57/6)
6. Shaklein A.A., Trubachev S.A., Morar G., Mitrukova E.A. et al. Experimental and numerical study of PMMA combustion in counterflow configuration. *Case Studies in Thermal Engineering*. 2024. V. 54, P. 104033. DOI: [10.1016/j.csite.2024.104033](https://doi.org/10.1016/j.csite.2024.104033)
7. Shaklein A.A., Karpov A.I. On the numerical approach to the prediction of flame spread over non-planar surface of solid combustibles. *Combustion Theory and Modelling*. 2023. V. 27, P. 645–652. DOI: [10.1080/13647830.2023.2197408](https://doi.org/10.1080/13647830.2023.2197408)

8. Adiga K.C., Hatcher R.F., Sheinson R.S., Williams F.W., Ayers S. A computational and experimental study of ultra fine water mist as a total flooding agent. *Fire Safety Journal*. 2007. V. 42 (2), P. 150–160. DOI: [10.1016/j.firesaf.2006.08.010](https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2006.08.010)
9. Shumikhin A.A., Karpov A.I., Korepanov M.A., Novozhilov V.B. Numerical simulation of the water mist effect on the turbulent diffusion flame. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya*. 2012. V. 14, No. 3. P. 391-400. (In Russ.)
10. Kraiko A.N. Analytical representation of thermodynamic functions of air. *Inzhenernyi zhurnal*. 1964. V. 4, No. 3. P. 548–550. (In Russ.)
11. Tenenev V.A., Koroleva M.R. Modeling of the gas dynamic processes with different equations of state. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*. 2023. V. 21, No. 3. P. 115-123. (In Russ.). DOI: [10.22213/2410-9304-2023-3-115-123](https://doi.org/10.22213/2410-9304-2023-3-115-123)
12. Raeder T., Chernova A.A., Tenenev V.A. Incorporation of Fluid Compressibility into the Calculation of the Stationary Mode of Operation of a Hydraulic Device at High Fluid Pressures. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 17, No. 2. P. 195-209. (In Russ.). DOI: [10.20537/nd210205](https://doi.org/10.20537/nd210205)
13. Men'shov I.S., Nemtsev M.Yu., Semenov I.V. Numerical modeling of wave processes accompanying combustion of inhomogeneously distributed composite propellant. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 2019. V. 59, No. 9. P. 1591-1604. (In Russ.). DOI: [10.1134/S004446691909014X](https://doi.org/10.1134/S004446691909014X)
14. Chernyshev A.V., Kyurdzhiev Yu.V., Atamasov N.V., Lebedev A.V. Justification of the working medium model selection for calculation of dynamic parameters of pneumohydraulic systems. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*. 2018. No. 9 (702). P. 57-63. (In Russ.). DOI: [10.18698/0536-1044-2018-9-57-63](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-9-57-63)
15. Zelenov M.S., Atamasov N.V., Chernyshev A.V. On the issue of simulating dynamics of a pneumo-mechanical device. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroenie*. 2018. No. 6 (123). P. 20-33. (In Russ.). DOI: [10.18698/0236-3941-2018-6-20-33](https://doi.org/10.18698/0236-3941-2018-6-20-33)
16. Atamasov N.V., Chernyshev A.V. Taking into account the real properties of gas in mathematical models of working processes of components of pneumatic systems. *X Obshcherossiiskaya molodezhnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Molodezh'.*

*Tekhnika. Kosmos*»: trudy konferentsii. Saint-Petersburg: Baltiiskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet «Voenmekh» Publ., 2018. P. 29-35.

17. Koroleva M.R., Tenenev V.A. Approximate Riemann Solvers for the Soave—Redlich—Kwong Equation of State. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2024. V. 20, No. 3. P. 345-359. (In Russ.). DOI: [10.20537/nd240905](https://doi.org/10.20537/nd240905)

18. Min'kov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. On two approaches to modelling the inflow boundary. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 2014. No. 6 (32). P. 94-102. (In Russ.)

19. Brykov N.A., Volkov K.N., Emel'yanov V.N., Teterina I.V. Flows of ideal and real gases in channels of variable cross section with unsteady localized energy supply. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*. 2017. V. 18, No. 1. P. 20-40. (In Russ.). DOI: [10.26089/NumMet.v18r103](https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r103)

20. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Prokopov G.P. A computational scheme for two-dimensional non stationary problems of gas dynamics and calculation of the flow from a shock wave approaching a stationary state. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 1961. V. 1, No. 6. P.1020-1050. (In Russ.)

21. Makhrov A.S., Pirogov S.Yu. The characteristics entrance device of external compression of impulsively-periodic energy supply influence in the filling undisturbed flow. *Trudy MAI*. 2012. No. 58. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=31045>

Статья поступила в редакцию 27.11.2024

Одобрена после рецензирования 04.12.2024

Принята к публикации 25.04.2025

The article was submitted on 27.11.2024; approved after reviewing on 04.12.2024; accepted for publication on 25.04.2025