Труды МАИ. 2022. № 125
Trudy MAI, 2022, no. 125

Научная статья
УДК 533.6.013.422
DOI: 10.34759/trd-2022-125-04

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

Сергей Дмитриевич Алгазин[1], Гариф Хусаинович Соловьев[2]✉

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва, Россия

[2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Москва, Россия

[1]algazinsd@mail.ru

[2]19tatarin45@rambler.ru✉

Аннотация. В предположении, что избыточное давление со стороны потока газа на обтекаемую пластину может быть определено по линеаризованной (поршневой) теории несущей поверхности, приводится постановка задачи о панельном флаттере произвольной в плане и произвольно ориентированной по отношению к вектору скорости потока пластины переменной толщины.

Ключевые слова: численные алгоритмы без насыщения, флаттер пластины переменной толщины

Финансирование: работа выполнена по теме государственного задания
№ АААА-А20-120011690132–4

Для цитирования: Алгазин С.Д., Соловьев Г.Х. Постановка задачи о флаттере пластины переменной толщины произвольной формы в плане // Труды МАИ. 2022. № 125. DOI: 10.34759/trd-2022-125-04

Original article

FORMULATION OF THE FLUTTER PROBLEM OF A PLATE OF VARIABLE THICKNESS OF ARBITRARY SHAPE IN THE PLAN

Sergey D. Algazin[1], Garif H. Soloviev[2]✉
[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
[2]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
[1]algazinsd@mail.ru
[2]19tatarin45@rambler.ru✉

Abstract. By the method of mathematical modeling the flutter of orthotropic plate of rectangular shape in plan at different angles of attacking stream is investigated. For numerical modeling of unstable oscillations of a plate the effective numerical algorithm without saturation which allows on a rare grid to receive admissible accuracy in the approached decision is offered. The type of eigenform depending on the angle of direction of the attacking flow velocity vector is studied numerically. The resulting quadratic eigenvalue problem can be reduced to a double sized standard linear eigenvalue problem. The term "panel flutter" refers to the flutter of a thin plate, shell, or membrane when typically, one of the surfaces is exposed to airflow and the other to still air. The panel then experiences elastic, inertial and aerodynamic forces, which can lead to dynamic instability of the structure. The paper shows that the resulting quadratic problem for eigenvalues can be reduced to a standard linear problem for eigenvalues of twice the size. Questions related to the existence, uniqueness and regularity of the solution are not considered in the work. We refer the interested reader to the work. The first recorded occurrence of flutter for circular cylindrical projectiles appears to have been on a German V-2 rocket. The study of the stability of the oscillations of a thin plate of arbitrary thickness in the plan, which in the plane , occupies x the y region with the boundary and is blown by the gas flow, leads to a G ∂Gnon-self-adjoint spectral problem for the amplitude value of the deflections $\varphi = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in G$, which is obtained by generalizing the results of Kiyko I. A. and Ilyushin A. A.

Keywords: numerical methods without saturation, plate flutter № AAAA-A20-120011690132–4

Funding: the work was carried out on the topic of the state task

For citation: Algazin S.D., Soloviev G.H. Formulation of the flutter problem of a plate of variable thickness of arbitrary shape in the plan. *Trudy MAI*, 2022, no. 125. DOI: 10.34759/trd-2022-125-04

Введение

Флаттер — это явление, давно известное в авиации, которое привело к многочисленным катастрофам и последующей гибели авиаторов. Его исследованием занимались многие ученые, например, президент Российской Академии наук СССР М.В. Келдыш и его ученики. В настоящее время эти исследования продолжены в ЦАГИ имени профессора Н.Е. Жуковского [1].

Термин «флаттер панели» относится к флаттеру тонкой пластины, оболочки или мембраны, когда, как правило, одна из поверхностей подвергается воздействию воздушного потока, а другая - неподвижного воздуха. Затем панель испытывает воздействие упругих, инерционных и аэродинамических сил, которые могут привести к динамической неустойчивости структуры.

Первое зарегистрированное возникновение флаттера для круговых цилиндрических снарядов, по-видимому, было на немецкой ракете V-2 (Фау -2).

В последние годы вопросы, связанные с флаттером в летательных объектах, продолжают вызывать интерес [2-12]. Объектами исследований [13-18] по панельному флаттеру, за редким исключением [18], являлись прямоугольная пластина, цилиндрическая панель или замкнутая цилиндрическая оболочка постоянной толщины. При этом использована достаточно частная постановка задачи при условии, что вектор скорости потока параллелен одной из сторон пластины либо образующей цилиндрической оболочки или панели. Многообразие задач обусловливалось разнообразием граничных условий, а также методов исследования - строгих аналитических, приближенных, численных. При тех же ограничениях в постановке исследовался флаттер вязкоупругих прямоугольных пластин [18-21]. Однако элементы обшивки летательных аппаратов представляют собой либо пологие оболочки различных очертаний в плане переменной толщины, либо не прямоугольные пластины, например, круглые и т. п.; с другой стороны, во многих практически важных случаях вектор скорости потока достаточно произвольно ориентирован по отношению к сторонам пластинки или панели. Постановка задачи о флаттере пологой оболочки произвольной формы в плане при произвольном направлении вектора скорости потока дана в [21]. Общей постановки проблемы панельного флаттера пластины переменной толщины произвольной формы в плане до сих пор не дано; в предлагаемой работе этот пробел восполняется. Флаттер прямоугольной пластины переменной толщины рассмотрен в [22].

Вывод уравнения поперечных колебаний упругой изотропной пластины переменной толщины и граничных условий

Рассмотрим упругую изотропную пластину переменной толщины h (x, y), ограниченную контуром произвольной формы и совершающую малые поперечные колебания под действием начального отклонения или внешней силы. Будем считать выполненными все допущения теории малых упругих колебаний тонких пластин [16,17,21]. Нейтральная поверхность разделяет растянутую и сжатую зоны изогнутой пластины. В качестве системы координат выбирается правовинтовая прямоугольная система координат, плоскость *xy* которой совмещена с нейтральной поверхностью в недеформированном состоянии, а ось *z* направлена вниз. Перемещения *w (x, y)* точек нейтральной поверхности, отсчитываемые по оси *z*, будем называть прогибами пластины, $w_{\max} << h_{\min}$. Уравнения движения и граничные условия получим из вариационного принципа [18]:

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\Delta\left(D\Delta w\right)-(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=f\ ,$$

f - внешняя сила, D – цилиндрическая жёсткость. Далее получим граничные условия:

$$D\Delta w + D(1-\sigma)\left[\sin 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \sin^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \cos^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial(D\Delta w)}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{D\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \cos 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right\} -$$

$$-(1-\sigma)\left[\sin\theta \frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cos\theta \frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\sin\theta \frac{\partial D}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial D}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] = 0.$$

В случае неоднородных граничных условий

$$D\Delta w + D(1-\sigma)\left[\sin 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \sin^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \cos^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = -M_l,$$

$$\frac{\partial(D\Delta w)}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{D\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \cos 2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right\} -$$

$$-(1-\sigma)\left[\sin\theta \frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cos\theta \frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\sin\theta \frac{\partial D}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial D}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] = -N_l,$$

где M_l – изгибающий момент на контуре пластины, а N_l –поперечная (перерезывающая) сила на контуре пластины.

2. Математическая постановка задачи

Исследование устойчивости колебаний тонкой пластины переменной толщины произвольной формы в плане, которая в плоскости x, y занимает область G с границей ∂G и обдувается потоком газа, приводит к спектральной задаче для амплитудного значения прогибов $\varphi = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in G$, которая получается обобщением результатов [21]:

$$\Delta\left(D\Delta\varphi\right)-(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\beta\vec{V}\cdot grad\varphi+(\rho h\omega^2+\beta\omega)\varphi=0,$$

$$D=\frac{E\left(z_1^3(x,y)+z_2^3(x,y)\right)}{3\left(1-\nu^2\right)},\ \beta=\frac{kp_0}{c_0} \qquad (2.1)$$

$$\varphi|_{\partial G}=0,\ M\varphi|_{\partial G}=0 \qquad (2.2)$$

Здесь E. ν- модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, в рассматриваемом случае: $z=z_1(x,y)$ - нижняя поверхности пластины, $z=-z_2(x,y)$ - верхняя поверхности пластины, $h(x,y)=z_1(x,y)+z_2(x,y)$ – её переменная толщина, $\vec{V}$ = $(V_x,\ V_y)$ - вектор скорости газа, p_0, c_0 - давление и скорость звука в невозмущенном потоке, k - показатель политропы газа. Оператор M в (2.2) — это известный в теории пластин дифференциальный оператор, определяемый типом граничных условий. Методика решения спектральной задачи (2.1) - (2.2) описана для произвольного оператора M. Колебания пластины будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли $\mathrm{Re}\omega < 0$ или $Re\omega > 0$;

3. Конечномерная задача

Пусть K - матрица размера $n \times n$ – дискретный оператор, соответствующий оператору:

$$\Delta\left(D\Delta\varphi\right)-(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\beta\vec{V}\cdot grad\varphi\,;$$

H - диагональная матрица размера $n \times n$ с числами ρh_i , $i=1,2,\ldots,n$ (h_i – значение толщины пластины в i -ом узле сетки); C - диагональная матрица размера $n \times n$ с постоянными числами β – на диагонали. Тогда искомая квадратичная задача на собственные значения: $Q(\omega)= \omega^2H+\omega C+K=0$. Эта задача сводится к стандартной линейной задаче на собственные значения: $L(\omega)=\omega\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C & K \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$, где I_n – единичная матрица размера $n\times n$, соответствующий собственный вектор $z=\begin{bmatrix} \omega\varphi \\ \varphi \end{bmatrix}$, где φ – вектор длины n - содержащий значения амплитуды φ в узлах сетки. Матрица $\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ легко обращается, и мы имеем стандартную задачу на собственные значения: $\begin{bmatrix} H^{-1}C & H^{-1}K \\ I_n & 0 \end{bmatrix}z+\omega z=0$. Колебания пластины будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли $\mathrm{Re}\omega < 0$ или $Re\omega > 0$;

Таким образом, получаемая квадратичная задача на собственные значения может быть сведена к стандартной линейной задаче на собственные значения удвоенного размера.

Заключение

Выше представлена постановка задачи о флаттере пластины переменной толщины произвольной в плане. Показано, что получаемая квадратичная задача на собственные значения может быть сведена к стандартной линейной задаче на собственные значения удвоенного размера. Вопросы, связанные с существованием, единственностью и регулярностью решения в работе не рассматриваются. Заинтересованного читателя отсылаем к работе [26].

Список источников

1. Аэроупругость /под ред. Карклэ П.Г. - М.: 2019. Инновационное машиностроение. - 650 с.

2. Благодарева О.В. Расчет на безопасность от флаттера малого удлинения методом полиномов // Труды МАИ. 2013. № 68. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=41717

3. Благодарева О.В. Исследование флаттера композитного крыла //Труды МАИ. 2014. № 74. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=49345

4. Шитов С.В. Флаттер упругой полосы в потоке газа с малой сверхзвуковой скоростью // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=58548

5. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Е.Э. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=53018

6. Фирсанов В.В., Макаров П.В. Особенности расчета собственных частот и форм колебаний рабочих колес компрессоров газотурбинного двигателя применительно к решению задачи флаттера // Труды МАИ. 2012. № 55. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=30015

7. Болосов Д.А. Расчет стационарных аэродинамических характеристик тонкой несущей поверхности с учетом ее упругих деформаций // Труды МАИ. 2012. № 51. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=28949

8. Бакулин В.Н., Конопельчев М.А., Недбай, А.Я. Флаттер слоистой цилиндрической консольной оболочки, подкрепленной торцевым шпангоутом // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 14-19.

9. Бакулин В.Н., Конопельчев М.А., Недбай, А.Я. Флаттер слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и нагруженной осевыми силами // Доклады Академии наук. 2015. Т. 463. № 4. С. 414–417.

10. Бакулин В.Н., Недбай А.Я., Шепелева И.О. Динамическая устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки кусочно-постоянной толщины при действии вне него пульсирующего давления // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 2. С. 19-25.

11. Калугин В.Т., Луценко А.Ю., Назарова Д.К. Аэродинамические характеристики тонких цилиндрических и конических оболочек в несжимаемом потоке // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 3. С. 81-87.

12. Бакулин В.Н., Снесарев С.Л. Собственные колебания цилиндрических оболочек с прямоугольным вырезом // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 1988. № 4. С. 3–6.

13. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 211-222.

14. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. № 2. С. 231-243.

15. Степанов Р.Д. О флаттере цилиндрических оболочек и панелей, движущихся в потоке газа // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. № 5. С. 644-657.

16. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М.: Физматгиз, 1961. -339 с.

17. Огибалов П.М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. - М.: Изд-во МГУ, 1963. - 419 с.

18. Матяш В.И. Флаттер упруго вязкой пластинки // Механика полимеров. 1971. № 6. С. 1077–1083.

19. Ларионов Г.С. Нелинейный флаттер упруго вязкой пластины // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1974. № 4. С. 95-100.

20. Огибалов П.М., Ломакин В.В., Кишкин Б.П. Механика полимеров. - М.: Изд-во МГУ, 1975. - 528 с.

21. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. № 3. С. 167-171.

22. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер пластины переменной толщины // Известия МГТУ «МАМИ». 2012. № 1 (13). С. 249-255.

23. Огибалов П.М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. - М.: Изд-во Московского университета, 1958. – 389 с.

24. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968. – 559 с.

25. Кузьмин Р.Н., Кулешов А.А., Тишкин В.Ф., Захарченко Л.Б. Математическая модель поперечных колебаний упругой пластины переменной толщины // VIII ежегодная международная конференция «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 31 янв. – 5 февр., 2001): сборник трудов, 2001. -700 с.

26. Г. Фикера. Теоремы существования в теории упругости. - М.: Мир, 1974. – 158 с.

References

1. Karkle P.G. *Aerouprugost'* (Aeroelasticity), Moscow, 2019, Innovatsionnoe mashinostroenie, 650 p.

2. Blagodareva O.V. *Trudy MAI*, 2013, no. 68. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=41717

3. Blagodareva O.V. *Trudy MAI*, 2014, no. 74. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49345

4. Shitov S.V. Flatter uprugoi polosy v potoke gaza s maloi sverkhzvukovoi skorost'yu // Trudy MAI. 2015. № 82. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=58548

5. Starovoytov E.I., Lokteva N.A., Starovoytova E.E. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53018

6. Firsanov V.V., Makarov P.V. *Trudy MAI*, 2012, no. 55. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=30015

7. Bolosov D.A. *Trudy MAI,* 2012, no. 51. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28949

8. Bakulin V.N., Konopel'chev M.A., Nedbai, A.Ya. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*, 2018, no. 4, pp. 14-19.

9. Bakulin V.N., Konopel'chev M.A., Nedbai, A.Ya. *Doklady Akademii nauk,* 2015, vol. 463, no. 4, pp. 414–417.

10. Bakulin V.N., Nedbai A.Ya., Shepeleva I.O. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika,* 2019, no. 2, pp. 19-25.

11. Kalugin V.T., Lutsenko A.Yu., Nazarova D.K. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika,* 2018, no. 3, pp. 81-87.

12. Bakulin V.N., Snesarev S.L. *Izvestiya VUZov. Aviatsionnaya tekhnika*, 1988, no. 4, pp. 3–6.

13. Movchan A.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1956, vol. 20, no. 2, pp. 211-222.

14. Movchan A.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1957, vol. 21, no, 2, pp. 231-243.

15. Stepanov R.D. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1957, vol. 21, no. 5, pp. 644-657.

16. Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoi ustoichivosti* (Non-conservative problems of the theory of elastic stability), Fizmatgiz, 1961, 339 p.

17. Ogibalov P.M. *Voprosy dinamiki i ustoichivosti obolochek (*Issues of shell dynamics and stability), Moscow, Izd-vo MGU, 1963, 419 p.

18. Matyash V.I. *Mekhanika polimerov*, 1971, no. 6, pp. 1077–1083.

19. Larionov G.S. *Mekhanika tverdogo tela*, 1974, no. 4, pp. 95-100.

20. Ogibalov P.M., Lomakin V.V., Kishkin B.P. *Mekhanika polimerov* (Mechanics of polymers), Moscow, Izd-vo MGU, 1975, 528 p.

21. Il'yushin A.A., Kiiko I.A *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1994, vol. 58, no. 3, pp. 167-171.

22. Kudryavtsev B.Yu. *Izvestiya MGTU «MAMI»*, 2012, no. 1 (13), pp. 249-255.

23. Ogibalov P.M. *Izgib, ustoichivost' i kolebaniya plastinok* (Bending, stability' and plate vibrations), Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1958, 389 p.

24. Babakov I.M. *Teoriya kolebanii* (Theory of Oscillations), Moscow, Nauka, 1968, 559 p.

25. Kuz'min R.N., Kuleshov A.A., Tishkin V.F., Zakharchenko L.B. *VIII ezhegodnaya mezhdunarodnaya konferentsiya «Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie»: sbornik trudov*, 2001, 700 p.

26. G. Fikera. *Teoremy sushchestvovaniya v teorii uprugosti* (Existence theorems in elasticity theory), Moscow, Mir, 1974, 158 p.

Статья поступила в редакцию 01.06.2022
Статья после доработки 02.06.2022
Одобрена после рецензирования 06.06.2022
Принята к публикации 25.08.2022
The article was submitted on 01.06.2022; approved after reviewing on 06.06.2022; accepted for publication on 25.08.2022