УДК 533.9:51-7

Применение метода Монте-Карло для решения задачи зондовой диагностики двухкомпонентной плазмы сферическим зондом в переходном режиме

И.А. Кудрявцева

Аннотация

Данная работа посвящена разработке математической модели, описывающей динамику поведения пристеночной плазмы вблизи заряженного сферического зонда с учетом кулоновских столкновений. Данная модель включает уравнение Фоккера-Планка и уравнение Пуассона. Для решения уравнения Фоккера-Планка применяется метод статистических испытаний Монте-Карло, для решения уравнения Пуассона – метод разделения переменных Фурье.

Ключевые слова

плазма; зондовая диагностика; переходный режим; метод Монте-Карло; уравнение Фоккера-Планка; уравнение Пуассона.

Введение

Низкотемпературная плазма является рабочим телом в разнообразных приборах и устройствах, таких как технологические плазмотроны, лампы дневного света, некоторые типы лазеров и др. Кроме того, плазма может служить средой обитания авиационно-космической техники. Одними из методов диагностики плазмы являются зондовые методы. Для зондовых методов характерны локальность и многообразие измеряемых параметров. Суть метода состоит в определении требуемых параметров, таких как температура, концентрация частиц и др., по зависимости значений тока, текущего на внесенный в плазму зонд, от потенциала, подаваемого на этот зонд. В качестве приоритетной формы зонда было выбрано заряженное сферическое тело.

В работе рассматривается переходный режим обтекания заряженного тела плазмой. Данный режим имеет место в случае, когда отношение длины свободного пробега частицы к радиусу зонда порядка единицы. В этом случае существенную роль начинают играть столкновения между частицами: столкновения заряженных частиц с нейтральными и кулоновские столкновения. Учет столкновений заряженных частиц с нейтральными детально изучался в работах [1,2]. В настоящей работе исследуется динамика пристеночной плазмы с учетом столкновений между заряженными частицами, что характерно для сильноионизованной плазмы.

Постановка задачи

В неподвижную бесконечно протяженную плазму, состоящую из электронов и однозарядных ионов, внесено заряженное сферическое тело радиуса r_p. На поверхности тела поддерживается постоянный потенциал, равный φ_p. Поверхность тела является поглощающей для электронов, ионы при ударе о нее нейтрализуются. Температуры ионов $T_{i\infty}$ и электронов $T_{e\infty}$, а также концентрации частиц $n_{i\infty}, n_{e\infty}$ в невозмущенной плазме заданы. Предполагается также, что частицы плазмы движутся под действием электрического поля, магнитное поле отсутствует. Начальные распределения ионов и электронов максвелловские.

Необходимо с учетом столкновений между заряженными частицами найти самосогласованное электрическое поле $\vec{E}(\vec{r},t)$, плотность токов на зонд ионов $j_i(\vec{r},t) = q \cdot \int f_i(\vec{r},\vec{v},t)\vec{v}\, d\vec{v}$ и плотность токов электронов $j_e(\vec{r},t) = \mathrm{e} \cdot \int f_e(\vec{r},\vec{v},t)\vec{v}\, d\vec{v}$, где $q = Z_i \mathrm{e}$, $Z_i = 1$ – заряд иона, e – заряд электрона, а также концентрацию вблизи зонда ионов $n_i(\vec{r},t) = \int f_i(\vec{r},\vec{v},t)\, d\vec{v}$ и концентрацию электронов $n_e(\vec{r},t) = \int f_e(\vec{r},\vec{v},t)\, d\vec{v}$, где $f_e(\vec{r},\vec{v},t)$, $f_i(\vec{r},\vec{v},t)$ – функции распределения электронов и однозарядных ионов соответственно. Поведение частиц во времени t характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{v}$.

Математическая модель, соответствующая данной физической постановке, имеет вид:

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_\alpha(\vec{r},t)}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_c + S_\alpha(\vec{r},\vec{v},t),$$

$$\Delta\varphi(\vec{r},t) = -\frac{\mathrm{e}}{\varepsilon_0}\left(n_i(\vec{r},t) - n_e(\vec{r},t)\right), \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\varphi(\vec{r},t), \tag{1}$$

где первое из уравнений системы (1) – уравнение Фоккера-Планка для частиц сорта α ($\alpha = i,e$), второе – уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля; $f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$ – функция распределения частиц сорта α; $\left(\frac{\partial f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_c$ – оператор столкновения Фоккера-Планка;

функция $S_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$ описывает источники или стоки частиц; $\vec{F}_\alpha(\vec{r},t)=\begin{cases} q\vec{E}(\vec{r},t), & \alpha=i,\\ -\mathrm{e}\vec{E}(\vec{r},t), & \alpha=e,\end{cases}$, где $\vec{E}(\vec{r},t)$ – напряженность самосогласованного электрическ ого поля; $\varphi(\vec{r},t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; $n_\alpha(\vec{r},t),\ \alpha=i,e$ – концентрация частиц сорта α; m_α – масса частицы сорта α; ε_0 – электрическая постоянная.

Оператор столкновения Фоккера-Планка имеет вид [3,4]:

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c=\frac{1}{2}\nabla_v\nabla_v:\left(f_\alpha\ \nabla_v\nabla_v g_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)\right)-\nabla_v\cdot(f_\alpha\ \nabla_v h_\alpha),$$

где $\nabla_v\nabla_v g_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)$ – ковариантная тензорная производная второго ранга, символ двоеточия (:) обозначает операцию двойного суммирования,

$$\Gamma_\alpha=\frac{Z_\alpha^4\mathrm{e}^4}{4\pi\varepsilon_0^2m_\alpha^2}\ln D_\alpha,\quad D_\alpha=\frac{12\pi\varepsilon_0 kT_{\alpha\infty}}{Z_\alpha^2\mathrm{e}^2}\left(\frac{\varepsilon_0 kT_{e\infty}}{n_{e\infty}\mathrm{e}^2}\right)^{1/2},\quad Z_\alpha=1,\ \alpha=i,e,$$

$$g_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)=\sum_{b=i,e}\left(\frac{Z_b}{Z_\alpha}\right)\int f_b(\vec{r},\vec{v}\,',t)\left|\vec{v}-\vec{v}\,'\right|d\vec{v}\,',\quad \alpha=i,e,$$

$$h_\alpha(\vec{r},\vec{v}\,',t)=\sum_{b=i,e}\frac{m_\alpha+m_b}{m_b}\cdot\left(\frac{Z_b}{Z_\alpha}\right)\int\frac{f_b(\vec{r},\vec{v}\,',t)}{\left|\vec{v}-\vec{v}\,'\right|}d\vec{v}\,',\quad \alpha=i,e.$$

К системе уравнений (1) необходимо добавить начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned}
&t=0:\quad f_\alpha(\vec{r},\vec{v},0)=f_\alpha^{maksv},\qquad \alpha=i,e,\\
&\vec{r}\in\Omega_p:\quad f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)\big|_{\vec{r}\in\Omega_p}=0,\quad \alpha=i,e,\\
&\qquad \varphi(\vec{r},t)\big|_{\vec{r}\in\Omega_p}=\varphi_p,\\
&\vec{r}\in\Omega_\infty:\quad f_\alpha(\vec{r},\vec{v},t)\big|_{\vec{r}\in\Omega_\infty}=f_\alpha^{maksv},\quad \alpha=i,e,\\
&\qquad \varphi(\vec{r},t)\big|_{\vec{r}\in\Omega_\infty}=0,
\end{aligned}\tag{2}$$

где $f_\alpha^{maksv}=n_{\alpha\infty}\left(\frac{m_\alpha}{2k\pi T_{\alpha\infty}}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_\alpha}{2kT_{\alpha\infty}}\left|\vec{v}-\vec{v}_\infty\right|^2\right),\ \vec{v}_\infty=0,\quad \alpha=i,e$; Ω_p, Ω_∞ – множество радиус-векторов частиц, концы которых принадлежат поверхности зонда и границе возмущенной зоны соответственно.

Метод решения задачи

Рассмотрим заряженное сферическое тело, внесенное в поток плазмы. Свя жем с этим телом сферическую систему координат, как показано на рис.1.

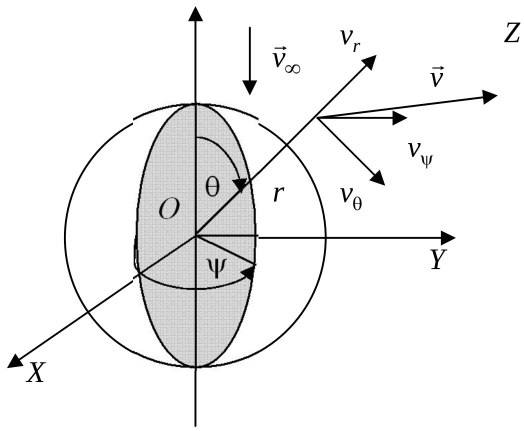

Рис.1 Положение заряженного тела в сферической системе координат

Положение частицы в пространстве будет определяться переменными r, ψ, θ, а скорость определится координатами v_r, v_ψ, v_θ. При данном выборе системы координат задача имеет осевую симметрию относительно оси Oz. Функции распределения частиц и потенциал самосогласованного электрического поля инвариантны относительно вращения вокруг этой оси ($\frac{\partial f_\alpha}{\partial \psi} = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0$).

В результате в сферической системе координат система (1) - (2) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} +$$

$$+\left(\frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\psi^2}{r} + \frac{q_\alpha E_r}{m_\alpha}\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \left(-\frac{v_r v_\psi}{r} + \frac{v_\theta v_\psi}{r} tg\theta\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\psi} + \left(\frac{q_\alpha E_\theta}{m_\alpha} - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\psi^2}{r} tg\theta\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = \Gamma_\alpha \mathrm{K} f_\alpha,\ \alpha = i, e,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} tg\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon_0}\left(n_i - n_e\right), \qquad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r},\ E_\psi = 0,\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta},$$

$$t = 0: \quad f_\alpha\left(r, \theta, v_r, v_\theta, v_\psi, 0\right) = f_\alpha^{maksv},\ \alpha = i, e,$$

$$r = r_p: \quad f_\alpha\left(r_p, \theta, v_r, v_\theta, v_\psi, t\right) = 0, \quad \alpha = i, e,$$

$$\varphi\left(r_p, \theta, t\right) = \varphi_p,$$

$$r = r_\infty: \quad f_\alpha\left(r_\infty, \theta, v_r, v_\theta, v_\psi, t\right) = f_\alpha^{maksv}, \quad \alpha = i, e,$$

$$\varphi\left(r_\infty, \theta, t\right) = 0,$$

(3)

где

$$\mathrm{K} f_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \left[v_r\right]^2}\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \left[v_r\right]^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \left[v_\psi\right]^2}\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \left[v_\psi\right]^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \left[v_\theta\right]^2}\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \left[v_\theta\right]^2} + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_r \partial v_\theta}\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_r \partial v_\theta} +$$

$$+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_r \partial v_\psi}\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_r \partial v_\psi}+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_\psi \partial v_\theta}\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_\psi \partial v_\theta}-\frac{\partial}{\partial v_r}\left(f_\alpha\frac{\partial h_\alpha}{\partial v_r}\right)-\frac{\partial}{\partial v_\psi}\left(f_\alpha\frac{\partial h_\alpha}{\partial v_\psi}\right)-\frac{\partial}{\partial v_\theta}\left(f_\alpha\frac{\partial h_\alpha}{\partial v_\theta}\right).$$

Применив к величинам, входящим в систему уравнений (3) систему масштабов согласно соотношению $X = M_X \cdot \hat{X}$, где X размерная величина, M_X масштаб размерной величины X, $\hat{X}$ безразмерная величина X, перейдем к безразмерным величинам. Система масштабов выглядит следующим образом:

$$M_L = r_D = \frac{\left(k\varepsilon_0 T_{i\infty}\right)^{1/2}}{e n_{i\infty}^{1/2}},\quad M_v^\alpha = \left(\frac{2kT_{\alpha\infty}}{m_\alpha}\right)^{1/2},\quad M_n = n_{i\infty},\quad M_E = \frac{M_\varphi}{M_L},\quad M_j = eM_n M_v^i,$$

$$M_\varphi = \frac{kT_{i\infty}}{e},\quad M_t = \frac{M_L}{M_v^i},\quad M_f^\alpha = \frac{M_n}{\left(M_v^\alpha\right)^3},\qquad \alpha = i,e.$$

(4)

За характерные масштабы в данном случае были приняты радиус Дебая, скорость теплового движения частиц, концентрация частиц в невозмущенной плазме, потенциал, возникающий при разделении зарядов в дебаевской сфере и производные от них величины.

Тогда система уравнений (3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial\hat{f}_\alpha}{\partial\hat{t}}+\sqrt{\delta_\alpha}\left\{\hat{v}_r\frac{\partial\hat{f}_\alpha}{\partial\hat{r}}+\frac{\hat{v}_\theta}{\hat{r}}\frac{\partial\hat{f}_\alpha}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\hat{v}_\theta^2}{\hat{r}}+\frac{\hat{v}_\psi^2}{\hat{r}}+\frac{z_\alpha\hat{E}_r}{2\varepsilon_\alpha}\right)\frac{\partial\hat{f}_\alpha}{\partial\hat{v}_r}+\left(-\frac{\hat{v}_r\hat{v}_\psi}{\hat{r}}+\frac{\hat{v}_\theta\hat{v}_\psi}{\hat{r}}tg\theta\right)\frac{\partial\hat{f}_\alpha}{\partial\hat{v}_\psi}+\left(\frac{z_\alpha\hat{E}_\theta}{2\varepsilon_\alpha}-\frac{\hat{v}_r\hat{v}_\theta}{\hat{r}}-\frac{\hat{v}_\psi^2}{\hat{r}}tg\theta\right)\frac{\partial\hat{f}_\alpha}{\partial\hat{v}_\theta}\right\}=\Gamma_\alpha K\hat{f}_\alpha,\ \alpha=i,e,$$

$$\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial\hat{r}^2}+\frac{2}{\hat{r}}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\hat{r}}+\frac{1}{\hat{r}^2}\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial\hat{\theta}^2}-\frac{1}{\hat{r}^2}tg\theta\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta}=-\left(\hat{n}_i-\hat{n}_e\right),\qquad \hat{E}_r=-\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\hat{r}},\ E_\psi=0,\ \hat{E}_\theta=-\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta}, \tag{5}$$

$$\hat{t}=0:\quad \hat{f}_\alpha\left(\hat{r},\theta,\hat{v}_r,\hat{v}_\theta,\hat{v}_\psi,0\right)=\hat{f}_\alpha^{maksv},\ \alpha=i,e,$$

$$\hat{r}=\hat{r}_p:\quad \hat{f}_\alpha\left(\hat{r}_p,\theta,\hat{v}_r,\hat{v}_\theta,\hat{v}_\psi,\hat{t}\right)=0,\quad \alpha=i,e,$$

$$\hat{\varphi}\left(\hat{r}_p,\theta,\hat{t}\right)=\hat{\varphi}_p,$$

$$\hat{r}=\hat{r}_\infty:\quad \hat{f}_\alpha\left(\hat{r}_\infty,\theta,\hat{v}_r,\hat{v}_\theta,\hat{v}_\psi,\hat{t}\right)=\hat{f}_\alpha^{maksv},\quad \alpha=i,e,$$

$$\hat{\varphi}\left(\hat{r}_\infty,\theta,\hat{t}\right)=0,$$

$$\Gamma_\alpha \mathrm{K}\hat{f}_\alpha = \Gamma_\alpha \left[\frac{1}{2} \mathrm{A}_g^\alpha \left\{ \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_r\right]^2} \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_r\right]^2} + \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_\psi\right]^2} \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_\psi\right]^2} + \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_\theta\right]^2} \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_\theta\right]^2} \right\} + \right.$$

где

$$\left. + 2\mathrm{A}_g^\alpha \left\{ \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\theta} \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\theta} + \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\psi} \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\psi} + \frac{\partial^2 \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{v}_\psi \partial \hat{v}_\theta} \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \hat{v}_\psi \partial \hat{v}_\theta} \right\} - \mathrm{A}_h^\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial \hat{v}_r} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial \hat{h}_\alpha}{\partial \hat{v}_r} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{v}_\psi} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial \hat{h}_\alpha}{\partial \hat{v}_\psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{v}_\theta} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial \hat{h}_\alpha}{\partial \hat{v}_\theta} \right) \right\} \right], \quad \alpha = i, e,$$

$$\delta_\alpha = \frac{\varepsilon_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{T_{\alpha\infty}}{T_{i\infty}}, \quad \mu_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_i}, \quad \mathrm{A}_g^\alpha = \frac{M_g^\alpha M_t}{\left(M_v^\alpha\right)^4}, \quad \mathrm{A}_h^\alpha = \frac{M_h^\alpha M_t}{\left(M_v^\alpha\right)^2},$$

$$\hat{f}_\alpha^{maksv} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^{3/2}} \exp\left(-\hat{v}_r^2 - \hat{v}_\theta^2 - \hat{v}_\psi^2\right), & \alpha = i, \\ \dfrac{1}{\pi^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{m_i T_{e\infty}}{m_e T_{i\infty}} \left(\hat{v}_r^2 + \hat{v}_\theta^2 + \hat{v}_\psi^2\right)\right), & \alpha = e, \end{cases}$$

$$M_g^\alpha \hat{g}_\alpha == \begin{cases} n_{i\infty} \left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2} \hat{g}_{ii} + \dfrac{n_{e\infty} \left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2}}{\left(\dfrac{m_i T_{e\infty}}{m_e T_{i\infty}}\right)^{1/2}} \hat{g}_{ie}, & \alpha = i, \\ n_{i\infty} \left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2} \hat{g}_{ei} + n_{e\infty} \left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2} \left(\dfrac{m_i T_{e\infty}}{m_e T_{i\infty}}\right)^{1/2} \hat{g}_{ee}, & \alpha = e, \end{cases}$$

$$M_h^\alpha \hat{h}_\alpha == \begin{cases} \dfrac{n_{i\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2}} \hat{h}_{ii} + \dfrac{n_{e\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2} \left(\dfrac{m_i T_{e\infty}}{m_e T_{i\infty}}\right)^{3/2}} \hat{h}_{ie}, & \alpha = i, \\ \dfrac{n_{i\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2}} \hat{h}_{ei} + \dfrac{n_{e\infty}}{\left(\dfrac{2kT_{i\infty}}{m_i}\right)^{1/2} \left(\dfrac{m_i T_{e\infty}}{m_e T_{i\infty}}\right)^{1/2}} \hat{h}_{ee}, & \alpha = e, \end{cases}$$

Применим метод статистических испытаний Монте-Карло [5]. Для этого перейдем в системе уравнений (5) от уравнения Фоккера-Планка к стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) Ито. Для этого перепишем уравнение Фоккера-Планка в виде:

$$\frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{t}} = \Gamma_\alpha \left[\frac{1}{2} \mathrm{A}_g^\alpha \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \left[\hat{v}_r\right]^2} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_r\right]^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \left[\hat{v}_\psi\right]^2} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_\psi\right]^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \left[\hat{v}_\theta\right]^2} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \left[\hat{v}_\theta\right]^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\theta} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\theta} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{v}_\psi \partial \hat{v}_\theta} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \hat{v}_\psi \partial \hat{v}_\theta} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\psi} \left(\hat{f}_\alpha \frac{\partial^2 \hat{g}_\alpha}{\partial \hat{v}_r \partial \hat{v}_\psi} \right) \right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \sqrt{\delta_\alpha} \left(\hat{v}_r \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{v}_r} \left(\left(\mathrm{A}_h^\alpha \frac{\partial \hat{h}_\alpha}{\partial \hat{v}_r} + \sqrt{\delta_\alpha} \left(\frac{\hat{v}_\theta^2}{\hat{r}} + \frac{\hat{v}_\psi^2}{\hat{r}} + \frac{z_\alpha \hat{E}_r}{2\varepsilon_\alpha} \right) \right) \hat{f}_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{v}_\theta} \left(\left(\mathrm{A}_h^\alpha \frac{\partial \hat{h}_\alpha}{\partial \hat{v}_\theta} + \sqrt{\delta_\alpha} \left(\frac{z_\alpha \hat{E}_\theta}{2\varepsilon_\alpha} - \frac{\hat{v}_r \hat{v}_\theta}{\hat{r}} - \frac{\hat{v}_\psi^2}{\hat{r}} tg\theta \right) \right) \hat{f}_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{v}_\psi} \left(\mathrm{A}_h^\alpha \frac{\partial \hat{h}_\alpha}{\partial \hat{v}_\psi} + \sqrt{\delta_\alpha} \left(-\frac{v_r v_\psi}{r} + \frac{v_\theta v_\psi}{r} tg\theta \right) \right) \hat{f}_\alpha \right\} \right], \quad \alpha =$$

Тогда СДУ Ито будет иметь вид:

$$d\Psi_\alpha(\hat t) = a_\alpha(\hat t, \Psi_\alpha(\hat t)) + \sigma_\alpha(\hat t, \Psi_\alpha(\hat t)) dW(\hat t), \quad \alpha = i, e, \qquad (6)$$

где $\Psi_\alpha(\hat t) = \left[\hat r(\hat t) \;\; \theta(\hat t) \;\; \hat v_r(\hat t) \; \hat v_\psi(\hat t) \; \hat v_\theta(\hat t)\right]^T$,

$$a_\alpha(\hat t, \Psi_\alpha(\hat t)) = \left[\sqrt{\delta_\alpha}\hat v_r \quad \sqrt{\delta_\alpha}\frac{\hat v_\theta}{\hat r} \quad A_h^\alpha \frac{\partial \hat h_\alpha}{\partial \hat v_r} + \sqrt{\delta_\alpha}\left(\frac{\hat v_\theta^2}{\hat r} + \frac{\hat v_\psi^2}{\hat r} + \frac{z_\alpha \hat E_r}{2\varepsilon_\alpha}\right) \quad A_h^\alpha \frac{\partial \hat h_\alpha}{\partial \hat v_\psi} + \sqrt{\delta_\alpha}\left(-\frac{v_r v_\psi}{r} + \frac{v_\theta v_\psi}{r} tg\theta\right) \quad A_h^\alpha \frac{\partial \hat h_\alpha}{\partial \hat v_\theta} + \sqrt{\delta_\alpha}\left(\frac{z_\alpha \hat E_\theta}{2\varepsilon_\alpha} - \frac{\hat v_r \hat v_\theta}{\hat r} - \frac{\hat v_\psi^2}{\hat r} tg\theta\right)\right.$$

$$\sigma_\alpha(\hat t, \Psi_\alpha(\hat t))\sigma_\alpha^T(\hat t, \Psi_\alpha(\hat t)) = A_g^\alpha \left\| \frac{\partial^2 \hat g_\alpha}{\partial \hat v_s \partial \hat v_q} \right\|, \; s, q = r, \psi, \theta,$$

$\alpha = i, e$, $W(\hat t)$ – стандартный винеровский случайный процесс.

Далее решение СДУ Ито ищется с помощью стохастического метода Эйлера [6]. Суть метода состоит в поиске значений Ψ_α^k вектора состояния $\Psi_\alpha(\hat t)$ в дискретные моменты времени $\hat t_k = \hat t_0 + k h_\tau$, $k = 0, ..., N_t$, где h_τ - шаг интегрирования по времени, N_t - количество шагов по времени, согласно следующей явной разностной схеме:

$$\Psi_\alpha^{k+1} = \Psi_\alpha^k + h_\tau \cdot a_\alpha(\hat t_k, \Psi_\alpha^k) + \sigma_\alpha(\hat t_k, \Psi_\alpha^k)\Delta W_k, \quad k = 0, ..., N_t, \quad \alpha = i, e, \qquad (7)$$

где $\Delta W_k = W(\hat t_{k+1}) - W(\hat t_k)$, $k = 0, ..., N_t$ – величина приращения винеровского процесса $W(\hat t)$ на отрезке $\left[\hat t_k, \hat t_{k+1}\right]$, по определению независимая от $\zeta_\alpha^0, \Delta W_0, ..., \Delta W_{k-1}$: $\Delta W_k \sim N\left(0, h_\tau\right)$, то есть ΔW_k представляют собой гауссовские случайные величины с нул евыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными шагу интегрирования; $\zeta_\alpha^0 = \left[\hat v_r\left(\hat t_0\right) \; \hat v_\psi\left(\hat t_0\right) \; \hat v_\theta\left(\hat t_0\right)\right]^T$, $\zeta_\alpha^0 \sim \hat f_\alpha^{maksv}$.

Элементы $\dfrac{\partial \hat h_\alpha}{\partial \hat v_s}, \; s = r, \psi, \theta$ вектора $a_\alpha(\hat t_k, \Psi_\alpha^k)$ и элементы $\dfrac{\partial^2 \hat g_\alpha}{\partial \hat v_s \partial \hat v_q}, \; s, q = r, \psi, \theta$ матрицы $\sigma_\alpha(\hat t_k, \Psi_\alpha^k)\sigma_\alpha^T(\hat t_k, \Psi_\alpha^k)$ находятся с помощью формул численного дифференцирования [7] функций $\hat h_\alpha$ и $\hat g_\alpha$. Для вычисления интегралов, входящих в выражения д ля функций $\hat h_\alpha$ и $\hat g_\alpha$, применяется метод Монте-Карло [7].

Для нахождения значений $\hat E_s, \; s = r, \theta$ элементов вектора напряженности электрического поля методом численного дифференцирования [7] необходимо знать значения потенциала $\hat\varphi$, которые находятся из решения граничной задачи для уравнения Пуассона, втор ого уравнения системы (5):

$$\frac{\partial^2\hat\varphi}{\partial\hat r^2}+\frac{2}{\hat r}\frac{\partial\hat\varphi}{\partial\hat r}+\frac{1}{\hat r^2}\frac{\partial^2\hat\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{\hat r^2}tg\theta\frac{\partial\hat\varphi}{\partial\theta}=\eta(\hat r,\theta),$$
$$\hat\varphi\Big|_{\hat r=\hat r_p}=\hat\varphi_p,$$
$$\hat\varphi\Big|_{\hat r=\hat r_\infty}=0,$$

Для решения уравнения Пуассона применяется метод разделения переменных Фурье [7]. В силу независимости функции $\hat\varphi$ от координаты ψ решение ищется в виде разложения по полиномам Лежандра.

$$\hat\varphi(\hat r,\theta)=\sum_{q=0}^{\infty}\beta_q(\hat r)P_q(\cos(\theta)),\ \theta\in[0,\pi].$$

(8)

Разложив также по полиномам Лежандра функцию $\eta(\hat r,\theta)$, стоящую в правой части уравнения Пуассона, и подставив в данное уравнение выражение (8) для потенциала $\hat\varphi$,

$$\eta(\hat r,\theta)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{2q+1}{2}P_q(\cos(\theta))\int_0^{\pi}\eta(\hat r,\tilde\theta)P_q\sin(\tilde\theta)d\tilde\theta.$$

осуществим переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\beta_0''+\frac{1}{\hat r}\beta_0'=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\eta(\hat r,\tilde\theta)\sin(\tilde\theta)d\tilde\theta,$$
$$\beta_q''+\frac{2}{\hat r}\beta_q'-\frac{q(q+1)}{\hat r^2}\beta_q=\frac{2q+1}{2}\int_0^{\pi}\eta(\hat r,\tilde\theta)P_q\cos(\tilde\theta)d\tilde\theta,$$
$$\beta_0(\hat r_p)=\hat\varphi_p,\quad \beta_0(\hat r_\infty)=0,$$
$$\beta_q(\hat r_p)=0,\quad \beta_q(\hat r_\infty)=0,\quad q\in\mathrm{N}.$$

(9)

Численное решение задачи (9) находится методом прогонки [7]. Конечно-разностная система будет иметь вид:

$$a^l\beta_q^{l-1}+b_q^l\beta_q^l+c^l\beta_q^{l+1}=\delta_q^l,\quad l=1,..,N_r,$$

$$a^l=2\hat{r}_l\left(\hat{r}_l-h_r\right),\ b_q^l=-2\left(2\hat{r}_l^2+q\left(q+1\right)h_r^2\right),$$

$$c^l=2\hat{r}_l\left(\hat{r}_l+h_r\right),\ \delta_q^l=2\hat{r}_l^2h_r^2Y_q^l,$$

$$Y_q^l=\frac{2q+1}{2}\sum_{k=1}^{N_\theta}\eta\left(\hat{r}_l,\tilde{\theta}_k\right)P_q\left(\cos\left(\tilde{\theta}_k\right)\right)\sin\tilde{\theta}_k h_\theta,$$

$$\beta_q^1=\begin{cases}\hat{\varphi}_p, q=0,\\ 0, q\neq 0,\end{cases}\qquad \beta_q^{N_r}=\begin{cases}0, q=0,\\ 0, q\neq 0,\end{cases}$$

$$\hat{\varphi}\left(\hat{r}_l,\theta_k\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\beta_q\left(\hat{r}_l\right)P_q\left(\cos\left(\theta_k\right)\right),$$

где N_r, N_θ - количество шагов по переменным $\hat{r}$ и θ, h_r, h_θ - величины шагов разбиения по $\hat{r}$ и θ соответственно.

В данной работе рассматривалась задача диагностики сильноионизованной столкновительной плазмы заряженным сфери ческим зондом. Предложена математическая модель, описывающая динамику пристеночной области плазмы с учетом столкновений типа «ион -ион» и «ион-электрон». В рамках данной работы разработан также метод решения поставленной задачи, являющийся композицией метод а Монте-Карло и метода разделения переменных Фурье, использующегося для нахождения потенциала самосогласованного электрического поля.

Библиографический список

1. Алексеев Б.В. Котельников В.А. Зондовый метод диагностики плазмы. – М.: Энергоатомиздат,1989. – 240 с.
2. Котельников М.В., Котельников В.А. и др. Математическое моделирование обтекания тел потоком слабоионизованной столкновительной плазмы. – М.:МАИ, 2007, 120с.
3. Олдер Б. Вычислительные методы в физике плазмы. – М.: Мир, 1974. – 111 с.
4. Montgomery D.C., Tidman D.A. Plasma kinetic theory. – New York, 1964.
5. Кудрявцева И.А., Пантелеев А.В. Применение метода Монте -Карло для анализа поведения двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений между заряженными частицами.//Теоретические вопросы вычисл ительной техники и программного обеспечения: Межвузовский сборник научных трудов. – М.:МИРЭА, 2008.- с.122-128.
6. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления. – М.: Изд-во МАИ, 1993. – 312 с.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.

Сведения об авторе

Кудрявцева Ирина Анатольевна, аспирант кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета) . Контакты: +7 905 589-77-80, irina.home.mail@mail.ru.