Труды МАИ. 2022. № 126
Trudy MAI, 2022, no. 126

Научная статья
УДК 531.36:521.1
DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В ОКРЕСТНОСТИ КРАТНОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Алексей Игоревич Сафонов

Научно-производственная фирма «Инфосистем-35»,

Москва, Россия

lexafonov@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются движения периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что в системе реализуется двойной (основной и комбинационный) резонанс третьего порядка или значения параметров близки к резонансным. Для случая, когда имеется резонансная расстройка по одной из частот линейных колебаний системы, исследуется вопрос о существовании и числе резонансных периодических движений в малой окрестности равновесия, проанализированы условия их устойчивости в линейном приближении. Проводится сравнение результатов со случаем точного резонанса.

Ключевые слова: гамильтонова система, двойной резонанс третьего порядка, устойчивость в линейном приближении, периодические движения

Для цитирования: Сафонов А.И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

Original article

ON PERIODIC MOTIONS OF A HAMILTONIAN SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM IN THE VICINITY OF A MULTIPLE RESONANCE OF THE THIRD ORDER

Alexey I. Safonov
NPF Infosistem-35, Moscow, Russia.
lexafonov@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the motion of a non-autonomous 2π-periodic in time Hamiltonian system with two degrees of freedom in a neighborhood of a trivial equilibrium that is stable in the linear approximation. It is assumed that the system contains a small parameter ε, and for $\varepsilon = 0$ the Hamiltonian of the system does not depend on time. Let the values of the parameters be close to the resonance values corresponding to the double (fundamental and combination) resonance of the third order. Then, the trivial equilibrium of the complete system is unstable. It is assumed that there is a resonant detuning in one of the frequencies of the linear oscillations of the system.

The goal of the paper is to solve the question of the existence, number and stability (in the linear approximation) of periodic motions of the system in a small neighborhood of the origin. Using a number of canonical transformations, the Hamiltonian functions are reduced to the forms that are characteristic for each resonance case. Model systems corresponding to autonomous systems are studied. The parameter space of the problem is divided into regions, and in each region the question of the existence and number of resonance equilibrium positions of the model systems is solved. The results are compared with ones in the case of exact resonance.

Using the Sylvester criterion, the sufficient conditions for the stability of the equilibrium positions are verified, and the equilibrium positions satisfying them are found. The characteristic equation of the linearized system of equations of perturbed motion is analyzed, and the necessary conditions for stability of the equilibrium positions are obtained in the form of the system of inequalities The equilibrium positions are found, for which one of these conditions is satisfied; the remaining equilibrium positions are unstable (in the complete model systems) A complete analysis of the necessary conditions for stability has not been carried out due to cumbersomeness.

Using the Poincare small parameter method, the periodic motions generated by the considered equilibrium positions are constructed in the complete non-autonomous systems. They are analytic in ε and 12π-periodic in t. The conclusions are drawn about their stability (in the linear approximation) or instability.

***Keywords**:* Hamiltonian system, double third-order resonance, stability in the linear approximation, periodic motions

For citation: Safonov A.I. On periodic motions of a Hamiltonian system with two degrees of freedom in the vicinity of a multiple resonance of the third order. *Trudy MAI,* 2022, no. 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

Введение

При исследовании устойчивости частных движений механических систем возможны случаи, когда в пространстве параметров имеются точки или множество точек, для которых частоты малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения удовлетворяют линейным соотношениям специального вида, т.е. когда в системе имеются резонансы. В резонансных случаях существенным образом может поменяться как характер устойчивости самого решения, так и характер движений системы в его окрестности.

Первыми работами по изучению влияния резонансов на движения механических систем были работы [1–3]. Проводились исследования влияния кратных резонансов одного порядка на устойчивость положения равновесия в случае многомерных автономных гамильтоновых [4, 5], а также негамильтоновых [6–9] систем.

В данной работе исследуются движения близкой к автономной периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении, в случае, когда значения параметров отвечают случаю двойного (основного и комбинационного) резонанса третьего порядка или близки к ним. В случае, когда имеется резонансная расстройка по одной из частот, построены соответствующие автономные модельные гамильтонианы. В достаточно малой окрестности начала координат исследуются положения равновесия отвечающих им модельных систем. Решен вопрос о существовании и числе резонансных периодических движений в малой окрестности равновесия, проанализированы условия их устойчивости в линейном приближении. Проводится сравнение результатов со случаем точного резонанса.

Случаи, когда в системе имеется однократный резонанс третьего порядка, представлены в [10, 11]. В работе [12] исследовались движения периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия, устойчивого в линейном приближении, при наличии двух резонансов третьего порядка. Была показана неустойчивость положения равновесия в полной системе, а также проведен анализ нелинейных колебаний модельных систем. Развитием данной проблемы является работа [13], где рассматривалась аналогичная система в случае двойного, основного и комбинационного резонанса, третьего порядка. Был решен вопрос о существовании и числе положений равновесия модельных систем, получены необходимые и достаточные условия их устойчивости, методом малого параметра Пуанкаре построены периодические движения исходных полных систем. В работе [14] исследуется случай двух комбинационных резонансов третьего порядка; решен вопрос о существовании и числе положений равновесия соответствующей модельной системы. В статье [15] проводилось исследование гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия при наличии слабого комбинационного резонанса третьего порядка и сильного основного резонанса четвертого порядка. В частности, такой кратный резонанс возникает в задаче об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел [16]. Также проблемы исследования гамильтоновых систем при резонансных и нерезонансных движениях возникают в задачах динамически симметричного спутника относительно центра масс, в частности в работах [17 - 19].

1. Постановка задачи.

Рассмотрим движение неавтономной 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, описываемой функцией Гамильтона $H\left(q_j, p_j, t; \varepsilon\right)$, где q_j, p_j $\left(j=1,2\right)$ — обобщенные координаты и импульсы, t — время, ε — малый параметр $\left(0<\varepsilon\right.$ □ . Предполагается, что при ε = 0 гамильтониан системы не содержит времени, то есть система близка к автономной.

Пусть начало координат $q_j=0$, $p_j=0$ фазового пространства — положение равновесия рассматриваемой системы, в окрестности которого гамильтониан H аналитичен. Пусть это положение равновесия устойчиво в линейном приближении, и соответствующая линеаризованная система уравнений возмущенного движения имеет чисто мнимые характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ $\left(j=1,2\right)$.

Будем считать, что величины λ_j, $2\lambda_j$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами, то есть в системе нет резонансов первого и второго порядков. Тогда выбором величин q_j и p_j $\left(j=1,2\right)$ можно добиться того, чтобы в окрестности рассматриваемого равновесия гамильтониан представлялся в виде:

$$H\left(q_j, p_j, t; \varepsilon\right) = \frac{1}{2}\lambda_1\left(q_1^2+p_1^2\right) + \frac{1}{2}\sigma\lambda_2\left(q_2^2+p_2^2\right) + H_3\left(q_j, p_j, t; \varepsilon\right) + H_4\left(q_j, p_j, t; \varepsilon\right) + O_5 \qquad (1)$$

$$H_k\left(q_j, p_j, t; \varepsilon\right) = H_k^{(0)}\left(q_j, p_j\right) + \varepsilon H_k^{(1)}\left(q_j, p_j\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \quad \left(k=3,4\right),$$

где σ = 1 или -1, H_k — совокупности слагаемых *k*-й степени по по q_j и p_j, а O_5 — не менее пятой степени по q_j и p_j $\left(j=1,2\right)$.

Пусть в системе реализуется случай двойного резонанса третьего порядка, при котором для двух наборов целых чисел m_1, m_2 и l, таких, что $|m_1|+|m_2|=3$, выполнены соотношения:

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = l. \tag{2}$$

По терминологии работ [12, 13, 20, 21] резонанс называется *сильным*, если его наличие приводит к неустойчивости, и *слабым*, если его наличие не приводит к неустойчивости (имеет место формальная устойчивость). Также резонанс называется *основным*, если в резонансном соотношении (2) присутствует лишь одна из частот λ_j $\left(j=1,2\right)$, и *комбинационным*, если в резонансном соотношении присутствуют обе частоты λ_1 и λ_2. Отметим, что основной резонанс всегда сильный. Комбинационный резонанс является сильным, если выполнено условие $\sigma m_1 m_2 > 0$, а при $\sigma m_1 m_2 < 0$ он слабый, так как в этом случае в системе имеется положительно-определенный формальный первый интеграл.

Пусть величины λ_1 и λ_2 задаются одним из наборов (k_1 и k_2 — целые) [12]

$$\begin{gathered}\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}, \quad k_1 \neq -2\left(1+k_2\right);\\ \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}, \quad k_1 \neq -\left(1+k_2\right);\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}, \quad k_1 \neq -2k_2;\\ \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}, \quad k_1 \neq 1+2k_2;\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда комбинации $3\lambda_1$, $\lambda_1 + 2\lambda_2$ и $3\lambda_1$, $\lambda_1 - 2\lambda_2$ в случаях (3) и (4) соответственно являются целыми, и в системе реализуется двойной (основной и комбинационный) резонанс третьего порядка. При этом комбинации (3) и (4) не являются исчерпывающими, другие возможные случаи кратных резонансов третьего порядка представлены в [12]. Дополнительные условия, налагаемые на k_1 в (3) и (4), исключают случаи, когда резонансные слагаемые проявляются в автономной части гамильтониана (величины $\lambda_1 + 2\lambda_2$ или $\lambda_1 - 2\lambda_2$ равны нулю). Заметим, что в случаях (3) и (4) целыми являются также величины $2\lambda_1 - 2\lambda_2$ и $2\lambda_1 + 2\lambda_2$ соответственно, что означает наличие комбинационного резонанса четвертого порядка. Число резонансных случаев может быть удвоено, если поменять местами индексы 1 и 2.

Ранее в работе [12] было показано, что для указанных случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное положение равновесия полной системы неустойчиво при любом соотношении между резонансными коэффициентами. Цель данной работы — решение вопроса о существовании (в ε-окрестности неустойчивого тривиального равновесия системы) периодических движений, их числе и устойчивости в случае, когда имеется расстройка по одной из частот. Для случая точного кратного резонанса указанного типа эта задача была решена ранее в работе [13].

2. Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы.

Пусть в гамильтониане возмущенного движения резонансные слагаемые в членах третьей и четвертой степеней по возмущениям проявляются в слагаемых порядка ε. С помощью канонических замен переменных упростим структуру гамильтониана (1). Следуя работам [12, 13], сначала сделаем близкую к тождественной замену переменных, уничтожающую в автономной (при $\varepsilon = 0$) части гамильтониана форму $H_3^{(0)}(q_j, p_j)$ третьей степени и нормализующую форму $H_4^{(0)}(q_j, p_j)$ четвертой степени по координатам и импульсам q_j и p_j $(j = 1,2)$. В симплектических полярных координатах φ_j и r_j, задаваемых формулами $q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j$ $(j = 1,2)$, преобразованный гамильтониан запишется в виде:

$$\tilde{H}(\varphi_j, r_j, t) = \lambda_1 r_1 + \sigma\lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \varepsilon \tilde{H}_3(\varphi_j, r_j, t) + \varepsilon \tilde{H}_4(\varphi_j, r_j, t) + O_{5/2}. \quad (5)$$

Здесь $O_{5/2}$ — совокупности слагаемых не менее пятой степени относительно $r_j^{1/2}$ $(j = 1,2)$, имеющих по угловым координатам φ_j и времени t период 2π.

Пусть в системе реализуется случай (3). При помощи близкой к тождественной, 2π-периодичной по времени канонической замены переменных уничтожим в формах $\tilde{H}_k(\varphi_j, r_j, t)$ $(k = 3,4)$ слагаемые с нерезонансными гармониками и приведем гамильтониан к виду:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \lambda_1 r_1 + \sigma\lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \varepsilon\Big\{ a r_1^{3/2} \cos\left[3\varphi_1 - 3\lambda_1 t + 3\varphi_1^*\right] + \\ + \mathrm{b} r_1^{1/2} r_2 \cos\left[\varphi_1 + 2\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2)t + \varphi_1^* + 2\sigma\varphi_2^*\right]\Big\} + \\ + \varepsilon d r_1 r_2 \cos\left[2\varphi_1 - 2\sigma\varphi_2 - (2\lambda_1 + 2\lambda_2)t + 2\varphi_*\right] + O_{5/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

где a, b, d, c_{kl}, φ_j^*, φ_* – константы.

Перейдем в ε-окрестность начала координат, делая в (6) каноническую замену переменных (с валентностью ε^{-2}) вида $r_j = \varepsilon^2 R_j$, $\varphi_j = \Phi_j$, $(j = 1,2)$.

Рассмотрим случаи, близкие к рассматриваемым резонансам. Введем резонансные расстройки μ_j по формулам $\lambda_j = \lambda_{j0} - \varepsilon^2 \mu_j \quad (j = 1,2)$, где λ_{j0} - значение частоты собственных колебаний системы в случае (3) точного резонанса. Величины μ_j могут быть произвольного знака. Осуществим сдвиг в фазовом пространстве по формулам

$$\tilde{R}_j \ [illegible], \quad [illegible] \quad t. \tag{7}$$

Это унивалентное каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией: $S = \left(\Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t\right)\tilde{R}_1$ [illegible].

В результате замены (7) линейная по $R_j \quad (j=1,2)$ часть гамильтониана уничтожится, в слагаемых с резонансными гармониками (третьего и четвертого порядка по $R_j^{1/2}$) исчезает время, и гамильтониан (6) преобразуется к виду

$$H^* = \varepsilon^2 \left[-\mu_1 R_1 - \mu_2 \sigma R_2 + a\tilde{R}_1 \ [illegible] + c_{20}\tilde{R}_1 \ [illegible] \right] + O\left(\varepsilon^3\right). \tag{8}$$

Слагаемое $O\left(\varepsilon^3\right)$ в (8) аналитично по переменным $\tilde{\Phi}_j$, $\tilde{R}_j \quad (j=1,2)$ и t, периодично по $\tilde{\Phi}_j$ с периодом 2π и по t с периодом 12π.

Заметим, что коэффициенты c_{11}, a и b в (8) можно считать положительными. Действительно, если $c_{11} < 0$, то каноническая замена $\tilde{\Phi}_j$ [illegible] $\tilde{\Phi}_j$ (с валентностью −1) меняет знак c_{11}. Далее путем сдвига по угловым переменным можно добиться положительности резонансных коэффициентов a и b.

Введем новую независимую переменную τ по формуле $\tau = \left(\varepsilon^2 b^2 / c_{11}\right) t$, а также сделаем еще одну каноническую замену переменных (с валентностью ξ^{-1}) вида

$$[illegible]_j, \quad [illegible]_j \quad (j=1,2), \quad \xi = \frac{b^2}{c_{11}^2}. \tag{9}$$

Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\hat{\Gamma}_1 = \nu_1 R_1 - \sigma \nu_2 R_2 + \alpha \hat{R}_1^{3/2} \cos 3\hat{\Phi}_1 + \hat{R}_1^{1/2} \hat{R}_2 \cos\left(\hat{\Phi}_1 + 2\sigma\hat{\Phi}_2\right) + \\ + \gamma_{20} \hat{R}_1^2 + \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \gamma_{02} \hat{R}_2^2 + O(\varepsilon), \tag{10}$$

$$\nu_1 = -\frac{\mu_1 c_{11}}{b^2}, \quad \nu_2 = -\frac{\mu_2 c_{11}}{b^2}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \gamma_{20} = \frac{c_{20}}{c_{11}}, \quad \gamma_{02} = \frac{c_{02}}{c_{11}}.$$

В случае (4) преобразование гамильтониана (5) проводится аналогичным образом, в результате получается гамильтониан вида (10), в котором надо поменять на противоположный знак при σ.

Полагая в полученных гамильтонианах σ = 1 и σ = −1, получим гамильтонианы, характерные для рассматриваемых случаев двойного резонанса третьего порядка (знак ˆ над переменными опускаем):

$$\Gamma_{\pm} = \nu_1 R_1 \pm \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos\left(\Phi_1 \pm 2\Phi_2\right) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon), \tag{11}$$

Гамильтониан Γ_+ отвечает случаю двух сильных (основного и комбинационного) резонансов третьего порядка, а гамильтониан Γ_- — случаю сильного основного и слабого комбинационного резонансов. Эти гамильтонианы зависят от пяти параметров ν_1, ν_2, α, γ_{20} и γ_{02}. Резонансный коэффициент α в (11) считаем положительным; резонансные расстройки ν_1 и ν_2, а также коэффициенты γ_{20} и γ_{02} могут принимать значения любого знака. Слагаемое $O(\varepsilon)$ аналитично по переменным Φ_j, $R_j^{1/2}$ j и t, периодично по Φ_j с периодом 2π и по τ с периодом $T_\tau = 12\pi\left(b^2/c_{11}\right)\varepsilon^2$ и содержит слагаемые пятой и больших степеней по $R_j^{1/2}$.

3. Положения равновесия модельных систем.

Отбрасывая в (11) слагаемое $O(\varepsilon)$, получаем приближенные (модельные) гамильтонианы:

$$\Gamma_{+} = \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos\left(\Phi_1 + 2\Phi_2\right) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2, \tag{12}$$

$$\Gamma_{-} = \nu_1 R_1 - \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos\left(\Phi_1 - 2\Phi_2\right) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2. \tag{13}$$

Для дальнейшего исследования удобно ввести обозначения

$$\Psi_1 = 3\Phi_1, \quad \Psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2 . \tag{14}$$

Приближенные системы уравнений, описывающие изменения переменных Φ_j, R_j $\left(j = 1,2\right)$, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Phi_1}{d\tau} = \nu_1 + \frac{3}{2}\alpha R_1^{1/2} \cos\Psi_1 + \frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1^{1/2}} \cos\Psi_2 + 2\gamma_{20} R_1 + R_2, \\
&\frac{d\Phi_2}{d\tau} = \pm\nu_2 + R_1^{1/2} \cos\Psi_2 + R_1 + 2\gamma_{02} R_1, \\
&\frac{dR_1}{d\tau} = R_1^{1/2}\left(3\alpha R_1 \sin\Psi_1 + R_2 \sin\Psi_2\right), \quad \frac{dR_2}{d\tau} = \pm 2 R_1^{1/2} R_2 \sin\Psi_2,
\end{aligned} \tag{15}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют гамильтониану (12) и (13).

Найдем положения равновесия модельных систем, приравняв нулю правые части систем (15). Неустойчивое тривиальное положение равновесия $R_1 = R_2 = 0$ было исследовано ранее в [12]. Также имеются положения равновесия, для которых $R_1 \equiv 0$. Этот случай приводит к исследованию системы с одной степенью свободы с гамильтонианом $\Gamma_{\pm} = \pm\nu_2 R_2 + \gamma_{02} R_2^2$; в системе имеется семейство положений равновесия, задаваемое равенствами

$$\forall\Phi_2 = \Phi_{20} = \mathrm{const}, \quad \mathrm{R}_2 = \mp \frac{\nu}{2\gamma_{02}}$$

$$(\operatorname{sign}(\nu_2) = -\operatorname{sign}(\gamma_{02}) \text{ для } \Gamma_{+};\ \operatorname{sign}(\nu_2) = \operatorname{sign}(\gamma_{02}) \text{ для } \Gamma_{-})$$

Кроме того, имеются положения равновесия, для которых $R_2 \equiv 0$, а равновесные значения величин Ψ_1 и R_1 описываются соотношениями $\sin 3\Phi_1 = 0$, $\nu_1 + \frac{3}{2}\alpha\delta_1 R_1^{1/2} + 2\gamma_{20} R_1 = 0$ $\left(\delta_1 = \cos 3\Phi_1 = \pm 1\right)$. Этот случай сводится к системе с одной степенью свободы при наличии резонанса третьего порядка, который подробно изучен в работе [11].

Случай точного резонанса ($\nu_1 = \nu_2 = 0$) при $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$ исследован в [13].

Найдем положения равновесия модельных систем, отличные от описанных. Как и в случае точного резонанса [13] должны выполняться условия $\sin \Psi_1 = 0$ и $\sin \Psi_2 = 0$, а равновесные значения величин R_1 и R_2 задаются системой двух алгебраических уравнений

$$\nu_1 + \frac{3}{2}\alpha\delta_1 R_1^{1/2} + \frac{1}{2}\delta_2 R_1^{-1/2} R_2 + 2\gamma_{20} R_1 + R_2 = 0, \quad \pm\nu_2 + \delta_2 R_1^{1/2} + R_1 + 2\gamma_{02} R_2 = 0, \tag{16}$$

где введены обозначения $\delta_j = \cos \Psi_j$, $\left(\delta_j = \pm 1, \quad j = 1,2\right)$.

При помощи второго уравнения системы (16) исключаем R_2 из первого уравнения и перепишем систему в виде

$$2\left(4g_1 - 1\right)R_1^{3/2} + 3\left(2\delta_1 g_2 - \delta_2\right)R_1 + \left(4g_3 \mp \quad \mp \right) \tag{17}$$

$$R_2 = -\frac{\alpha}{2g_2}\left(R_1 + \delta_2 R_1^{1/2} \pm \nu_2\right) \quad \left(R_2 > 0\right), \tag{18}$$

где введены следующие обозначения $g_1 = \gamma_{20}\gamma_{02}$, $g_2 = \alpha\gamma_{02}$ и $g_3 = \nu_1\gamma_{02}$. При этом параметры g_1, g_2 и g_3 отличны от нуля и имеют произвольные знаки.

Пусть одна из резонансных расстроек ν_j (j = 1, 2) равна нулю. В случае, когда $\nu_1 \neq 0$, $\nu_2 = 0$, система (17), (18) принимает вид

$$2\left(4g_1-1\right)R_1+3\left(2\delta_1 g_2-\delta_2\right)R_1^{1/2}+\left(4g_3-1\right)=0,\ R_2=-\frac{\alpha}{2g_2}\left(R_1+\delta_2 R_1^{1/2}\right), \tag{19}$$

а в случае $\nu_1=0$, $\nu_2\neq 0$ вид

$$\begin{gathered}2\left(4g_1-1\right)R_1^{3/2}+3\left(2\delta_1 g_2-\delta_2\right)R_1+\left(\mp \quad \mp \right.\\ R_2=-\frac{\alpha}{2g_2}\left(R_1+\delta_2 R_1^{1/2}\pm\nu_2\right).\end{gathered} \tag{20}$$

Дальнейшее исследование зависит от трех параметров, так как значение параметра α не влияет на качественные выводы в силу его положительности. Случай (19) зависит от g_1, g_2 и g_3, а первое уравнение (19) является квадратным относительно $R_1^{1/2}$; а случай (20) — от g_1, g_2 и ν_2, и первое уравнение (20) является кубическим относительно $R_1^{1/2}$. Необходимо найти условия, при которых указанные уравнения имеют положительные вещественные корни. Кроме того, найденные корни должны обеспечивать положительность величины R_2 для каждого конкретного случая.

Далее ограничимся случаем (19). Из условия $R_2>0$ получаются следующие условия на параметры задачи и величину R_1:

$$\frac{\delta_2+R_1^{1/2}}{g_2}<0,\quad \begin{array}{lll} g_2>0, & \delta_2=-1, & R_1<1;\\ g_2<0, & \delta_2=1, & R_1>0;\\ g_2<0, & \delta_2=-1, & R_1>1.\end{array} \tag{21}$$

При $g_2>0$, $\delta_2=1$ величина R_2 отрицательна.

Рассмотрим первое уравнение (19). Его дискриминант имеет вид квадратного трехчлена по g_2 вида

$$D=36g_2^2-36\delta_1\delta_2 g_2+\left(32g_1+32g_3-128g_1g_3+1\right), \tag{22}$$

который, в свою очередь, имеет дискриминант, равный $D_g=1152\left(4g_1-1\right)\left(4g_3-1\right)$.

Найдем условия, при которых дискриминант D положителен.

<table>
<tr><th>g_1</th><th>g_3</th><th>(δ_1, δ_2)</th><th>g_2</th></tr>
<tr><td rowspan="5">$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$</td><td rowspan="4">$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$</td><td>$(1, \quad 1)$</td><td>$\left(-\infty, g_{2p}^{-}\right]$</td></tr>
<tr><td>$(1, \quad -1)$</td><td>$\left(-\infty, g_{2m}^{-}\right]$</td></tr>
<tr><td>$(-1, \quad 1)$</td><td>$\left[g_{2m}^{+}, +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td>$(-1, \quad -1)$</td><td>$\left[g_{2p}^{+}, +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td>$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$</td><td rowspan="2">$\forall(\delta_1, \delta_2)$</td><td rowspan="2">$\forall g_2 \neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$</td><td>$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$</td><td>$(1, \quad 1)$</td><td>$\left[g_{2p}^{+}, +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td>$(1, \quad -1)$</td><td>$\left[g_{2m}^{+}, +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td>$(-1, \quad 1)$</td><td>$\left(-\infty, g_{2m}^{-}\right]$</td></tr>
<tr><td>$(-1, \quad -1)$</td><td>$\left(-\infty, g_{2p}^{-}\right]$</td></tr>
</table>

Таблица 1: Решение неравенства $D > 0$.

Если $D_g < 0$, т.е. либо $g_1 > \frac{1}{4}$ и $g_3 < \frac{1}{4}$, либо $g_1 < \frac{1}{4}$ и $g_3 > \frac{1}{4}$, то, в силу положительности старшего коэффициента в (22), величина D положительна при всех значениях g_2. Пусть $D_g \geq 0$, т.е. либо $g_1 > \frac{1}{4}$ и $g_3 > \frac{1}{4}$, либо $g_1 < \frac{1}{4}$ и $g_3 < \frac{1}{4}$, тогда квадратный трехчлен D имеет два вещественных корня

$$g_2^{\pm} = \frac{1}{72}\left(36\delta_1\delta_2 \pm \sqrt{D_g}\right), \quad g_2^{+} > g_2^{-}.$$

Анализируя расположения этих корней относительно нуля, найдем области значений параметров g_1, g_2 и g_3, в которых выполнено неравенство $D > 0$. Эти области представлены в таблице 1. Здесь введены обозначения

$$g_{2p}^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}\sqrt{2(1-4g_1)(1-4g_3)}, \quad g_{2m}^{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}\sqrt{2(1-4g_1)(1-4g_3)}. \tag{23}$$

В найденных областях были проверены условия положительности корней $R_1^{1/2}$ первого уравнения (19) и условия (21). При этом часть решений была отброшена, а на параметры g_1, g_2 и g_3 в ряде случаев получены дополнительные ограничения.

Результаты представлены на рис. 1. Пространство параметров g_1, g_3 разделяется на 20 областей, обозначенные цифрами 1-20. Границы областей задаются уравнениями

$$g_3^* = \frac{1}{4} + \frac{9}{32(4g_1 - 1)}, \quad g_{30}^* = -2g_1, \quad g_{31}^* = 2g_1 - \frac{1}{4}, \quad g_{3F}^{\pm} = 2g_1 - \frac{7}{4} \pm \sqrt{3 - 12g_1}.$$

Для дальнейшего введем также обозначения: $g_2^m = -\frac{4}{3}g_1 - \frac{2}{3}g_3, \quad g_2^p = \frac{4}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_3$.

Точки пересечения границ имеют координаты

$$B\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right), \quad C\left(-\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}\right), \quad D\left(\tfrac{1}{16}, -\tfrac{1}{8}\right), \quad F\left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{5}{4}\right), \quad G\left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}\right), \quad H\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right),$$
$$A\left(-\tfrac{1}{8}\left(\tfrac{5}{2} + 3\sqrt{2}\right), \tfrac{3}{4}\sqrt{2} - \tfrac{7}{8}\right), \quad E\left(\tfrac{1}{8}\left(3\sqrt{2} - \tfrac{5}{2}\right), -\tfrac{1}{4}\left(3\sqrt{2} + \tfrac{7}{2}\right)\right), \quad I\left(\tfrac{7}{16}, \tfrac{5}{8}\right).$$

Для каждой занумерованной области на рис. 1 ось Og_2 третьего параметра g_2 разбивается на несколько интервалов (от четырех до шести) с различными числом (от нуля до четырех) положений равновесия, являющихся решением первого уравнения (19) и удовлетворяющих условиям (21).

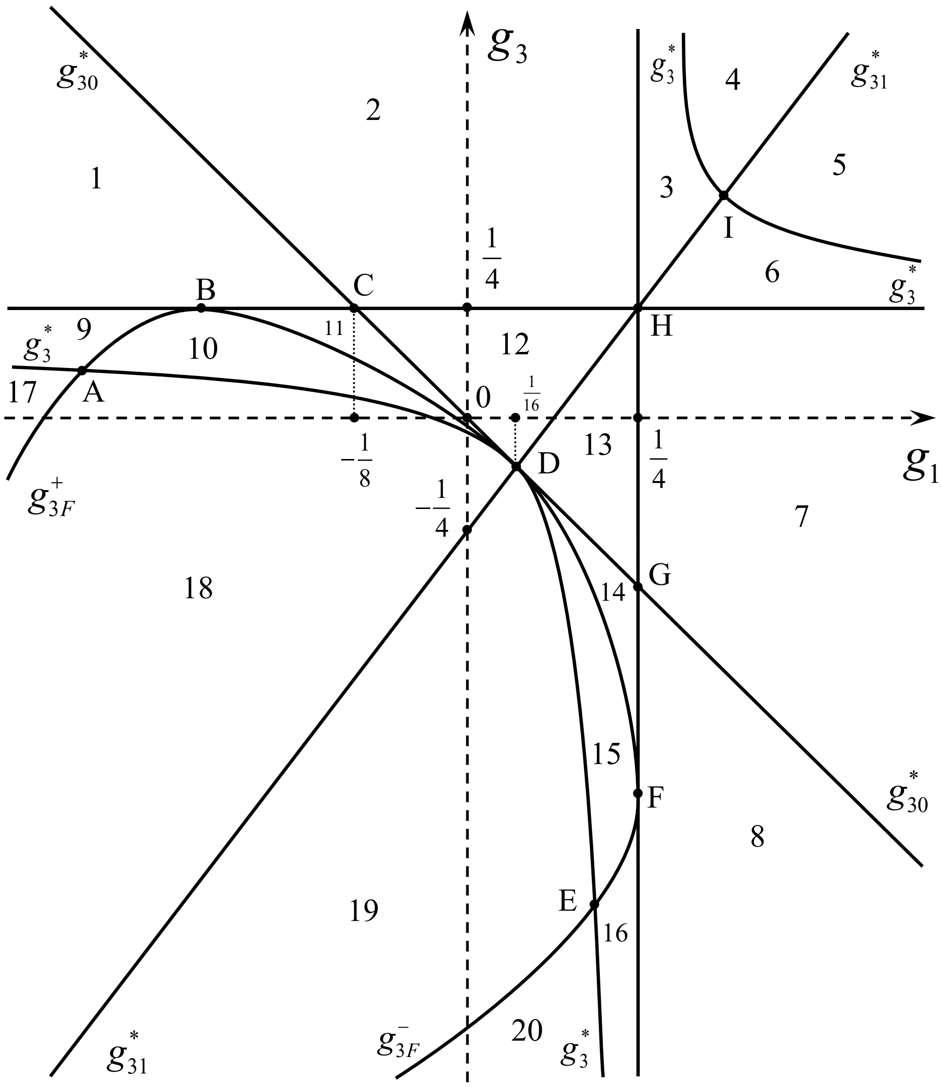

Рис. 1: Разбиение областей существования корней в плоскости параметров g_1, g_3.

В первой ячейке каждой строки таблицы 1 представлен порядковый номер области, указанный на рис. 1. В последующих ячейках число рядом с интервалом для параметра g_2 представляет собой суммарное количество положений равновесия в указанном интервале. Отметим, что каждой ячейке таблицы соответствуют несколько значений набора параметров (δ_1, δ_2), для каждого из которых реализуется одно или два решения системы уравнений (19), или эти решения отсутствуют.

№	Интервал g_2 и количество корней					
1, 7	$\left(-\infty, g_2^m\right)$, 3	$\left(g_2^m, 0\right)$, 2		$\left(0, g_2^p\right)$, 2		$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
2	$\left(-\infty, g_2^m\right)$, 3	$\left(g_2^m, 0\right)$, 4		$\left(0, g_2^p\right)$, 0		$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
3	$\left(-\infty, g_2^m\right)$, 3	$\left(g_2^m, g_{2m}^-\right)$, 4	$\left(g_{2m}^-, g_{2m}^+\right)$, 2	$\left(g_{2m}^+, 0\right)$, 4	$\left(0, g_2^p\right)$, 0	$\left(g_2^p, +\infty\right)$, 1
4	$\left(-\infty, g_2^m\right)$, 3	$\left(g_2^m, g_{2m}^-\right)$, 4	$\left(g_{2m}^-, g_{2p}^-\right)$, 2	$\left(g_{2p}^-, g_2^p\right)$, 0		$\left(g_2^p, +\infty\right)$, 1
5	$\left(-\infty, g_2^m\right)$, 3	$\left(g_2^m, g_{2p}^-\right)$, 2	$\left(g_{2p}^-, g_{2p}^+\right)$, 0	$\left(g_{2p}^+, g_2^p\right)$, 2		$\left(g_2^p, +\infty\right)$, 1
6	$\left(-\infty, g_2^m\right)$, 3	$\left(g_2^m, g_{2m}^+\right)$, 2	$\left(g_{2m}^+, 0\right)$, 4	$\left(0, g_{2p}^+\right)$, 0	$\left(g_{2p}^+, g_2^p\right)$, 2	$\left(g_2^p, +\infty\right)$, 1
8	$\left(-\infty, g_2^p\right)$, 3	$\left(g_2^p, 0\right)$, 4		$\left(0, g_2^m\right)$, 0		$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
9	$\left(-\infty, g_2^p\right)$, 3	$\left(g_2^p, g_{2m}^-\right)$, 2	$\left(g_{2m}^-, 0\right)$, 0	$\left(0, g_{2p}^-\right)$, 4	$\left(g_{2p}^-, g_2^m\right)$, 2	$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
10	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_2^p\right)$, 1	$\left(g_2^p, 0\right)$, 0	$\left(0, g_{2p}^-\right)$, 4	$\left(g_{2p}^-, g_2^m\right)$, 2	$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
11	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_2^p\right)$, 1	$\left(g_2^p, 0\right)$, 0	$\left(0, g_2^m\right)$, 4	$\left(g_2^m, g_{2p}^-\right)$, 3	$\left(g_{2p}^-, +\infty\right)$, 1
12	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_2^m\right)$, 1	$\left(g_2^m, 0\right)$, 2	$\left(0, g_2^p\right)$, 2	$\left(g_2^p, g_{2p}^-\right)$, 3	$\left(g_{2p}^-, +\infty\right)$, 1
13	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_{2m}^+\right)$, 1	$\left(g_{2m}^+, g_2^m\right)$, 3	$\left(g_2^m, 0\right)$, 2	$\left(0, g_2^p\right)$, 2	$\left(g_2^p, +\infty\right)$, 1
14	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_{2m}^+\right)$, 1	$\left(g_{2m}^+, g_2^p\right)$, 3	$\left(g_2^p, 0\right)$, 4	$\left(0, g_2^m\right)$, 0	$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
15	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_2^p\right)$, 1	$\left(g_2^p, g_{2m}^+\right)$, 2	$\left(g_{2m}^+, 0\right)$, 4	$\left(0, g_2^m\right)$, 0	$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
16	$\left(-\infty, g_2^p\right)$, 3	$\left(g_2^p, g_{2m}^-\right)$, 4	$\left(g_{2m}^-, g_{2m}^+\right)$, 2	$\left(g_{2m}^+, 0\right)$, 4	$\left(0, g_2^m\right)$, 0	$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
17	$\left(-\infty, g_2^p\right)$, 3	$\left(g_2^p, g_{2m}^-\right)$, 2	$\left(g_{2m}^-, g_{2m}^+\right)$, 0	$\left(g_{2m}^+, g_2^m\right)$, 2		$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
18	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_2^p\right)$, 1	$\left(g_2^p, g_{2m}^+\right)$, 0	$\left(g_{2m}^+, g_2^m\right)$, 2		$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
19	$\left(-\infty, g_{2m}^-\right)$, 3	$\left(g_{2m}^-, g_2^p\right)$, 1	$\left(g_2^p, g_{2p}^-\right)$, 2	$\left(g_{2p}^-, g_2^m\right)$, 0		$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1
20	$\left(-\infty, g_2^p\right)$, 3	$\left(g_2^p, g_{2m}^-\right)$, 4	$\left(g_{2m}^-, g_{2p}^-\right)$, 2	$\left(g_{2p}^-, g_2^m\right)$, 0		$\left(g_2^m, +\infty\right)$, 1

Таблица 2: Число положений равновесия в областях 1-20,

в зависимости от значений g_2

Равновесные значения переменной R_1 представляются в виде $R_1 = R_{10}^{\pm}$, где

$$R_{10}^{\pm} = \left(\frac{-3\left(2\delta_1 g_2 - \delta_2\right) \pm \sqrt{D}}{4\left(4g_1 - 1\right)} \right)^2, \tag{24}$$

а D — дискриминант (22). Их одно или два для каждого набора (δ_1, δ_2). Каждому значению R_{10}^{+} или R_{10}^{-} отвечает единственное значение $R_2 = R_{20}$, вычисляемое по второй формуле (19).

Подведем итоги исследования вопроса о существовании равновесных точек в рассматриваемом случае $\nu_1 \neq 0$, $\nu_2 = 0$. Заметим, что, как и в случае точного резонанса $\nu_1 = \nu_2 = 0$ (соответствующего оси Og_1 на рис. 1), в зависимости от выбранных значений параметров, в системе может существовать от 0 до 4 равновесных точек. В областях, через которые проходит ось Og_1, имеем точно такое же разбиение оси третьего параметра на интервалы, как и в случае точного резонанса. Однако, при удалении от этой оси и переходе в соседние области разбиение на интервалы и число положений равновесия в них меняется.

В следующих разделах будет проведено исследование устойчивости найденных положений равновесия.

4. Достаточные условия устойчивости положений равновесия.

Введем возмущения координат и импульсов модельных систем с гамильтонианами (12) и (13) по формулам

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + x_1, \quad \Phi_2 = \Phi_{20} + x_2, \quad R_1 = R_{10} + y_1, \quad R_2 = R_{20} + y_2,.$$

причем равновесные значения Φ_{j0} $(j = 1, 2)$ вычисляются, с учетом соотношений (14), по формулам:

$$\Phi_{10} = \Psi_{10}/3, \quad \Phi_{20} = \pm(\Psi_{20}/2 - \Psi_{10}/6), \quad \Psi_{j0} = \arccos \delta_j\,. \tag{25}$$

Квадратичная часть гамильтонианов возмущенного движения имеет вид:

$$\Gamma_{1,2}^{*}=\left(-\frac{9}{2}\alpha\delta_1 R_{10}^{3/2}-\frac{1}{2}\delta_2 R_{10}^{1/2}R_{20}\right)x_1^2 \mp \text{[illegible]} R_{20}x_1x_2-2\delta_2 R_{10}^{1/2}R_{20}x_2^2+$$
$$+\left(\gamma_{20}+\frac{3}{8}\alpha\delta_1 R_{10}^{-1/2}-\frac{1}{8}\delta_2 R_{10}^{-3/2}R_{20}\right)y_1^2+\left(1+\frac{1}{2}\delta_2 R_{10}^{-1/2}\right)y_1y_2+\gamma_{02}y_2^2, \qquad (26)$$

где верхний и нижний знак соответствует (12) и (13).

Достаточные условия устойчивости положений равновесия будем рассматривать как условия знакоопределенности квадратичных форм $\Gamma_{1,2}^{*}$, проверяемые при помощи критерия Сильвестра.

Несложный анализ показывает, что для обеих систем условия положительной определенности форм (26) удовлетворяются только для решений $R_1 = R_1^{+}$ при выполнении соотношений $g_2 > 0,\ \ \delta_1 = \delta_2 = -1,$ а условия отрицательной определенности — соотношений $g_2 < 0,\ \ \delta_1 = \delta_2 = 1.$

	g_1	(δ_1,δ_2)	g_2	g_3
D_1	$\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	$(-1,-1)$	$\left(0,g_{2p}^{-}\right]$	$\left(g_3^{*},\frac{1}{4}\right)$
D_2	$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right]$			$\left(g_3^{*},g_{30}^{*}\right)$
D_3			$\left(g_2^{p},g_{2p}^{-}\right]$	$\left(g_{30}^{*},\frac{1}{4}\right)$
D_4	$\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$			$\left(g_{31}^{*},\frac{1}{4}\right)$
D_5	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	$(1,1)$	$\left(-\infty,g_{2p}^{-}\right]$	$\left(g_3^{*},+\infty\right)$
D_6			$(-\infty,0)$	$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$
D_7				$\left(\frac{1}{4},g_3^{*}\right]$
D_8		$(-1,-1)$	$\left(0,g_2^{p}\right)$	$\left(g_{30}^{*},\frac{1}{4}\right)$
D_9			$\left[g_{2p}^{+},g_2^{p}\right)$	$\left(\frac{1}{4},g_{31}^{*}\right)$
D_{10}			$\left(g_2^{p},+\infty\right)$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

Таблица 3: Условия существования положений равновесия,
для которых выполняются достаточные условия устойчивости

Десять положений равновесия D_i $\left(i=1\ldots \quad \right)$, удовлетворяющих данным условиям, приведены в таблице 3. Для каждой точки указана пара $\left(\delta_1,\delta_2\right)$ и интервалы изменения параметров g_1, g_2, g_3, в которых данная точка существует. Их расположение в плоскости параметров g_1, g_3 представлено на рис. 2.

5. Необходимые условия положений равновесия.

Для остальных равновесных точек квадратичные формы $\Gamma_{1,2}^{*}$ не являются знакоопределенными. Чтобы решить вопрос об их устойчивости, рассмотрим характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения, имеющее вид

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0. \tag{27}$$

Если выполнены условия

$$p > 0, \quad q > 0, \quad D_\lambda = p^2 - 4q > 0, \tag{28}$$

то корни уравнения (27) чисто мнимые, и исследуемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Неравенства (28) составляют необходимые условия устойчивости. Если для рассматриваемого положения равновесия хотя бы одно из этих неравенств выполняется с противоположным знаком, то характеристическое уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, и данное положение равновесия неустойчиво, причем не только в линейном приближении, но и в полной нелинейной задаче.

Для обоих гамильтонианов коэффициенты уравнения (27) имеют вид:

$$p = \left(\hat{p}\sqrt{D} + p'\right)\Big/\left(128\left(4\gamma_{20}\gamma_{02} - 1\right)^3 \gamma_{02}^2\right), \quad q = \pm 9\alpha\delta_1\delta_2 R_{10}^{3/2} R_{20}\sqrt{D}, \tag{29}$$

где D - дискриминант (22), верхний и нижний знаки соответствуют верхнему и нижнему знакам величины $R_{10}^{\pm}$ из формулы (24).

Величины $\hat{p}$ и p' в выражении для p из (29) равны

$$\begin{aligned}
\hat{p} = &-\kappa 648\delta_1\gamma_{02}^3\left(4\gamma_{20}\gamma_{02}-1\right)\alpha^3+36\delta_2\gamma_{02}^2\left[32\kappa\gamma_{02}^2+4\left(31\kappa\gamma_{20}+4\right)\gamma_{02}+7\kappa\right]\alpha^2+\\
&+6\delta_1\gamma_{02}\left[256\kappa\gamma_{20}\left(3\gamma_{20}\nu_1-1\right)\gamma_{02}^3-64\left(5\kappa\gamma_{20}^2+3\gamma_{20}\nu_1\kappa+3\gamma_{20}+2\kappa\right)\gamma_{02}^2-\right.\\
&\left.-4\left(49\kappa\gamma_{20}+12\right)\gamma_{02}+3\kappa\right]\alpha-\delta_2\left[1024\kappa\gamma_{20}\nu_1\gamma_{02}^4+\right.\\
&+256\left(\kappa\gamma_{20}^2\nu_1-2\gamma_{20}^2+2\gamma_{20}\nu_1-4\kappa\gamma_{20}-\kappa\nu_1\right)\gamma_{02}^3+\\
&\left.-32\left(10\kappa\gamma_{20}^2+2\kappa\gamma_{20}\nu_1+14\gamma_{20}+4\nu_1+\kappa\right)\gamma_{02}^2+12\kappa\gamma_{20}\gamma_{02}-\kappa\right],\\
p' = &\,3888\gamma_{02}^4\left(4\gamma_{02}\gamma_{20}+1\right)\alpha^4-3456\delta_1\delta_2\gamma_{02}^3\left[2\gamma_{02}^2+\left(10\gamma_{20}+\kappa\right)\gamma_{02}+1\right]\alpha^3-\\
&-72\gamma_{02}^2\left[128\gamma_{20}\left(6\gamma_{20}\nu_1-1\right)\gamma_{02}^3-16\left(16\gamma_{20}^2+6\gamma_{20}\nu_1+6\gamma_{20}\kappa+7\right)\gamma_{02}^2-\right.\\
&\left.-4\left(71\gamma_{20}+6\nu_1+12\kappa\right)\gamma_{02}-3\right]\alpha^2+96\delta_1\delta_2\gamma_{02}^2\left[192\gamma_{20}\nu_1\gamma_{02}^3+\right.\\
&+16\left(32\nu_1\gamma_{20}^2-2\kappa\gamma_{20}^2+6\kappa\gamma_{20}\nu_1-9\gamma_{20}-3\nu_1\right)\gamma_{02}^2-\\
&\left.-2\left(84\gamma_{20}^2+68\gamma_{20}\nu_1+40\kappa\gamma_{20}+12\kappa\nu_1+9\right)\gamma_{02}-12\gamma_{20}+2\nu_1-5\kappa\right]\alpha-\\
&-16384\gamma_{20}^2\nu_1\gamma_{02}^5-1024\gamma_{20}\left(4\nu_1\gamma_{20}^2+12\kappa\gamma_{20}\nu_1-4\gamma_{20}+\nu_1\right)\gamma_{02}^4+\\
&+256\left(6\gamma_{20}^3-2\nu_1\gamma_{20}^2+18\kappa\gamma_{20}^2+6\kappa\gamma_{20}\nu_1+10\gamma_{20}+5\nu_1\right)\gamma_{02}^3+\\
&+32\left(16\gamma_{20}^2+14\gamma_{20}\nu_1+18\kappa\gamma_{20}+12\kappa\nu_1-1\right)\gamma_{02}^2-4\left(\gamma_{20}+4\nu_1\right)\gamma_{02}-1,
\end{aligned}$$

причем $\kappa = 1$ соответствует гамильтониану Γ_1^*, а $\kappa = -1$ гамильтониану Γ_2^* из (26). Отметим, что коэффициенты p и q зависят от четырех параметров γ_{20}, γ_{02}, α и ν_1.

Все полученные выше достаточные условия устойчивости положений равновесия являются также и необходимыми условиями.

Условию $q > 0$ соответствует 21 положение равновесия, обозначим их через N_i $\left(i = 1\ldots\right.$. Они представлены в таблице 4. Для остальных 36 положений равновесия, не указанных в таблицах 3 и 4, выполняется условие $q < 0$, и имеет место неустойчивость.

Отметим, что сделанные выводы верны для гамильтонианов обоих типов, так как свободный член q в характеристическом уравнении для них одинаков.

	g_1	(δ_1,δ_2)	g_2	g_3	Корень
N_1	$\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	$(1,-1)$	$\left(g_2^m,+\infty\right)$	$\left(g_3^*,\frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_2	$\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	$(1,-1)$	$\left(0,g_2^m\right)$	$\left(\frac{1}{4},g_3^*\right)$	R_1^-
N_3	$\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	$(1,-1)$	$\left(g_2^m,0\right)$	$\left(g_{30}^*,+\infty\right)$	R_1^-
N_4	$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$	$(1,-1)$	$\left(g_2^m,+\infty\right)$	$\left(-\infty,g_3^*\right)$	R_1^-
N_5	$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$	$(1,-1)$	$\left(g_2^m,+\infty\right)$	$\left[g_3^*,g_{30}^*\right)$	R_1^-
N_6	$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$	$(1,-1)$	$\left(g_2^m,0\right)$	$\left(g_{30}^*,\frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_7	$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$	$(1,-1)$	$(0,+\infty)$	$\left(g_{30}^*,\frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_8	$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$	$(1,-1)$	$\left(g_2^m,0\right)$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	R_1^-
N_9	$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$	$(-1,1)$	$(-\infty,0)$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	R_1^-
N_{10}	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	$(-1,-1)$	$\left(g_2^p,0\right)$	$\left(-\infty,g_{30}^*\right)$	R_1^+
N_{11}	$\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	$(1,-1)$	$\left(0,g_2^m\right)$	$\left[g_3^*,\frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_{12}	$\left(-\infty,\frac{1}{16}\right)$	$(1,-1)$	$\left[g_{2m}^+,g_2^m\right)$	$\left(g_{31}^*,g_3^*\right)$	R_1^-
N_{13}	$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$	$(1,-1)$	$\left(0,g_2^m\right)$	$\left[g_3^*,g_{30}^*\right)$	R_1^-
N_{14}	$\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$	$(1,-1)$	$\left[g_{2m}^+,0\right)$	$\left(g_3^*,g_{30}^*\right)$	R_1^-
N_{15}	$\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$	$(1,-1)$	$\left[g_{2m}^+,g_2^m\right)$	$\left[g_{30}^*,g_{31}^*\right]$	R_1^-
N_{16}	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	$(1,-1)$	$\left(g_2^m,g_{2m}^-\right]$	$\left(g_{31}^*,+\infty\right)$	R_1^-
N_{17}	$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$	$(-1,1)$	$\left(-\infty,g_{2m}^-\right]$	$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_{18}	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	$(-1,1)$	$\left[g_{2m}^+,0\right)$	$\left(\frac{1}{4},g_3^*\right)$	R_1^-
N_{19}	$\left(-\infty,\frac{1}{16}\right]$	$(-1,-1)$	$\left(g_2^p,g_{2p}^-\right]$	$\left(-\infty,g_{31}^*\right)$	R_1^+
N_{20}	$\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$	$(-1,-1)$	$\left(g_2^p,g_{2p}^-\right]$	$\left(-\infty,g_3^*\right)$	R_1^+
N_{21}	$\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$	$(-1,-1)$	$\left(g_2^p,0\right]$	$\left(g_3^*,g_{30}^*\right)$	R_1^+

Таблица 4. Положения равновесия, для которых выполняется условие $q>0$

Распределение точек D_i $(i=1\ldots$ и N_j $(j=1\ldots$ в плоскости параметров g_1 и g_3 показано на рис. 2. Для каждой точки N_j $(j=1\ldots$ условие $q>0$

реализуется для значений параметров g_1, g_2, g_3, а также для наборов (δ_1, δ_2), указанных в таблице 4.

В найденных областях пространства параметров, где выполнено условие $q > 0$, требуются дополнительные исследования системы неравенств $p > 0$ и $D_\lambda > 0$ для получения вывода об устойчивости. В четырехмерном пространстве параметров, в силу громоздкости выражения для p и D_λ, это исследование весьма затруднительно и проведено не было. В случае точного резонанса [13] соответствующее исследование было проведено аналитически и графически в пространстве трех параметров.

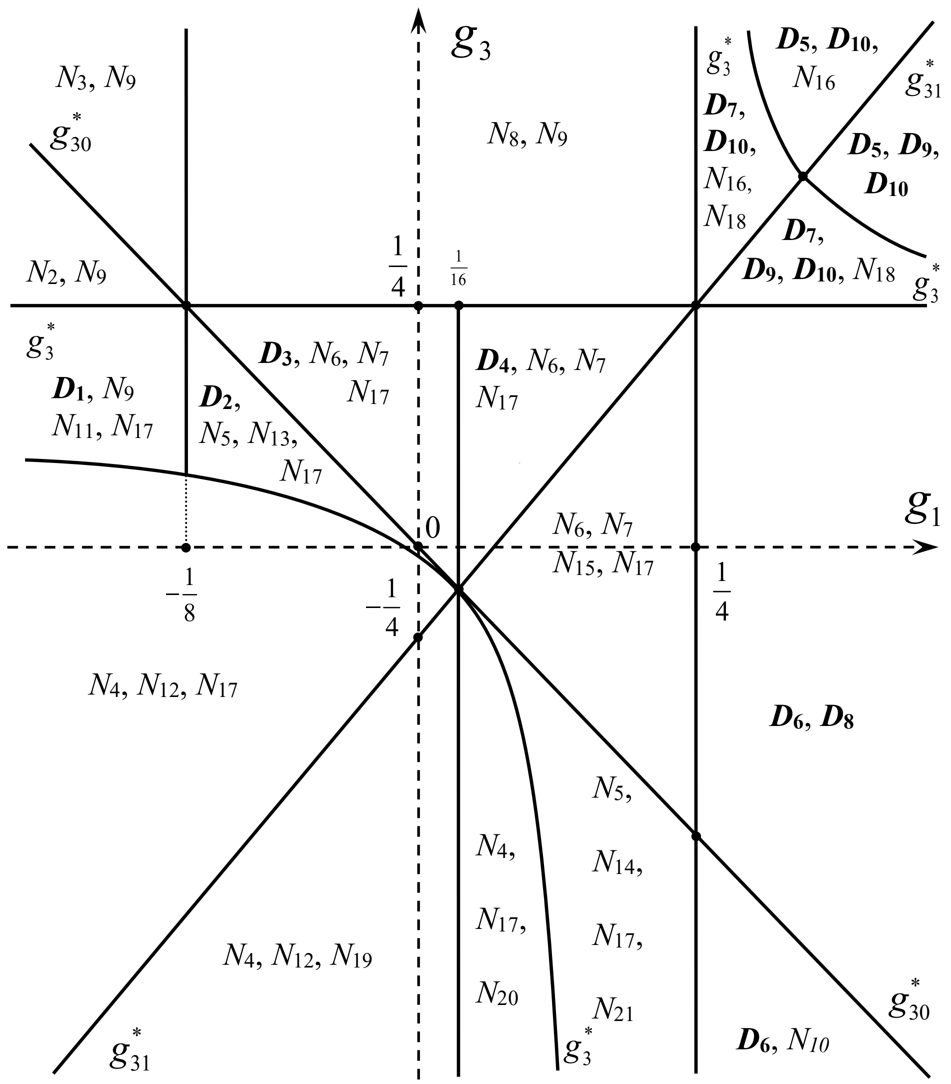

Рис. 2: Распределение точек D_i и N_j в плоскости параметров g_1, g_3.

6. Периодические движения.

Пусть $\Psi_j = \Psi_{j0} = \arccos\delta_j$, $R_j = R_{j0}$ $(j = 1,2)$ – одно из рассмотренных положений равновесия системы (15). Величины R_{10} вычисляются по формуле (24), а величины R_{20} связаны с R_{10} вторым соотношением (19). Гамильтоновым системам с модельными гамильтонианами (12), (13) указанному положению равновесия отвечает положение равновесия $\Phi_j = \Phi_{j0}$, $R_j = R_{j0}$ $(j = 1,2)$, определяемое выражениями (25).

Рассмотрим полные системы с гамильтонианами (11). В окрестности описанных положений равновесия приближенной (модельной) системы полную систему можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка ε, имеющими по τ период T [illegible]. При этом корни характеристических уравнений линеаризованных уравнений возмущенного движения модельных систем имеют порядок единицы, а частоты возмущений — порядок ε^{-2}. Таким образом, имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических решениях квазилинейных систем [22], и из каждого положения равновесия модельной системы рождается единственное, T-периодическое по τ, аналитическое по ε решение соответствующей полной системы с одним из гамильтонианов (11), имеющее вид

$$\Phi_j = \tilde{\Phi}_j(\tau,\varepsilon) = \Phi_{j0} + O(\varepsilon), \quad R_j = \tilde{R}_j(\tau,\varepsilon) = R_{j0} + O(\varepsilon) \quad (j = 1,2).$$

Проводя в обратной последовательности замены переменных, описанные в разд. 1 и 2, найдем отвечающее ему периодическое движение системы с исходным гамильтонианом (1), аналитическое по ε и имеющее по t период, равный 12π. Это движение имеет вид (константа ξ определена в (9))

$$q_j = \varepsilon\sqrt{2\xi R_{j0}}\sin\varphi_j + O\left(\varepsilon^2\right),\quad p_j = \varepsilon\sqrt{2\xi R_{j0}}\cos\varphi_j + O\left(\varepsilon^2\right),\quad \left(j=1,2\right),$$
$$\varphi_1 = \lambda_1 t + \Phi_{10} - \varphi_1^*,\quad \varphi_2 = \sigma\lambda_2 t + \Phi_{20} - \varphi_2^*. \qquad (30)$$

В соотношениях (30) явно выписаны главные (порядка ε) части периодических движений, каждая из которых содержит только "свои" гармоники (синусы и косинусы) величин $\lambda_j t$. В то же время слагаемые $O\left(\varepsilon^2\right)$ в выражениях для q_j, p_j содержат, вообще говоря, любые гармоники величин nt, $n_1\lambda_1 t$, $n_2\lambda_2 t$ (n, n_1, n_2 — целые числа).

Неустойчивые положения равновесия модельных систем переходят в неустойчивые периодические движения полных систем. Положения равновесия, рассмотренные для значений параметров из областей выполнения достаточных или только необходимых условий устойчивости, переходят в периодические движения полных систем, устойчивые в линейном приближении. Эти утверждения следуют из свойства непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Список источников

1. Korteweg D.J. Sur certaines vibrations d’orde sup´erieur et d’intensit´e anomale — vibrations de relation, — dans les m´echanismes `a plusieurs degr´es de libert´e, Arch. N´eerl. sci. exactes et natur., 1898. S´er. 2, vol. 1, pp. 229-260.
2. Beth H.I.E. Les oscillations autour d’une position dans le cas d’existence d’une r´elation lin´eaire simple entre les nombres vibratoires, Arch. N´eerl. sci. exactes et natur., 1910. S´er. 2, no. 15, pp. 246–283.

3. Beth H.I.E. Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une r´elation lin´eaire simple entre les nombres vibratoires (suite), Arch. N´eerl. sci. exactes et natur., 1912. S´er. 3, no. 1, pp. 185–213.
4. Хазин Л.Г. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем дифференциальных уравнений (Взаимодействие резонансов третьего порядка). Препринт № 133. - М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1981. - 20 с.
5. Хазин Л.Г. Взаимодействие резонансов третьего порядка в задачах устойчивости гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. № 3. С. 494-498.
6. Куницын А.Л. Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 9. С. 1704-1706.
7. Хазина Г.Г. Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. № 1. С. 56-65.
8. Куницын А.Л., Медведев С.В. Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 3. С. 422-429.
9. Куницын А.Л., Ташимов Л.Т. Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. - Алма-Ата: Гылым, 1990. - 196 с.
10. Маркеев А.П. Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. № 5. С. 37-48.

11. Холостова О.В. О нелинейных колебаниях спутника при резонансе третьего порядка // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. № 4. С. 556-565.
12. Холостова О.В. О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 267-288.
13. Сафонов А.И., Холостова О.В. О периодических движениях гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. 2016. Т. 26. № 3. С. 418-438.
14. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=93297.
15. Холостова О.В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 671-683.
16. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2015, no. 73, pp. 64-68.
17. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=65212

18. Бардин Б.С. Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динами□чески симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=72568

19. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Параметрическое управление плоскими движениями спутника-гантели // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=58455

20. Куницын А.Л., Маркеев А.П. Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Общая механика. 1979. Т. 4. С. 58-139.

21. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. - М.: Наука, 1987. - 328 с.

22. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. - М.: Гостехиздат, 1956. - 492 с.

References

1. Korteweg D.J. *Sur certaines vibrations d'orde sup´erieur et d'intensit´e anomale — vibrations de relation, — dans les m´echanismes `a plusieurs degr´es de libert´e*, Arch. N´eerl. sci. exactes et natur., 1898. S´er. 2, vol. 1, pp. 229-260.

2. Beth H.I.E. *Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une r´elation lin´eaire simple entre les nombres vibratoires*, Arch. N´eerl. sci. exactes et natur., 1910. S´er. 2, no. 15, pp. 246–283.

3. Beth H.I.E. *Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une r´elation lin´eaire simple entre les nombres vibratoires (suite),* Arch. N´eerl. sci. exactes et

natur., 1912. S´er. 3, no. 1, pp. 185–213.

4. Khazin L.G. *Ob ustoichivosti polozheniya ravnovesiya gamil'tonovykh sistem differentsial'nykh uravnenii (Vzaimodeistvie rezonansov tret'ego poryadka).* (On the stability of the equilibrium position of Hamiltonian systems of differential equations (Interaction of third-order resonances)), Institut prikladnoi matematiki AN SSSR, preprint no. 133, Moscow, 1981, 20 p.

5. Khazin L.G. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1984, vol. 48, no. 3, pp. 494-498.

6. Kunitsyn A.L. *Differentsial'nye uravneniya,* 1971, vol. 7, no. 9, pp. 1704-1706.

7. Khazina G.G. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1974, vol. 38, no. 1, pp. 56-65.

8. Kunitsyn A.L., Medvedev S.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1977, vol. 41, no. 3, pp. 422-429.

9. Kunitsyn A.L., Tashimov L.T. *Nekotorye zadachi ustoichivosti nelineinykh rezonansnykh system* (Some Problems of Stability of Nonlinear Resonant Systems), Alma-Ata, Gylym, 1990, 196 p.

10. Markeev A.P. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1994, vol. 58, no. 5, pp. 37-48.

11. Kholostova O.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 556-565.

12. Kholostova O.V. *Nelineinaya dinamika,* 2012, vol. 8, no. 2, pp. 267-288.

13. Safonov A.I., Kholostova O.V. *Vestnik Udmurtskogo universiteta,* 2016, vol. 26, no. 3, pp. 418-438.

14. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI,* 2018, no. 100. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297

15. Kholostova O.V. *Nelineinaya dinamika*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 671-683.

16. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 2015, no. 73, pp. 64-68.

17. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212

18. Bardin B.S. Chekina E.A. *Trudy MAI,* 2016, no. 89. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72568

19. Bezglasnyi S.P., Krasnov M.V., Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58455

20. Kunitsyn A.L., Markeev A.P. *Itogi nauki i tekhniki. VINITI. Ser. Obshchaya mekhanika,* 1979, vol. 4, pp. 58-139.

21. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. *Parametricheskii rezonans v lineinykh sistemakh* (Parametric resonance in linear systems), Moscow, Nauka, 1987, 328 p.

22. Malkin I.G. *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebanii* (Some problems of the theory of nonlinear oscillations), Moscow, Gostekhizdat, 1956, 492 p.

Статья поступила в редакцию 12.09.2022

Статья после доработки 13.09.2022

Одобрена после рецензирования 20.09.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 12.09.2022; approved after reviewing on 20.09.2022; accepted for publication on 12.10.2022