Труды МАИ. 2026. № 150.
Trudy MAI. 2026. No. 150. (In Russ.)

Научная статья
УДК 539.3, 616-073.756.8
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189683
EDN: https://www.elibrary.ru/MUNZBU

ТЕНЗОРНО-СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ СВЯЗИ ДАННЫХ РЕНТГЕНОВСКОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ С УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

О.А. Саченков

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

4works@bk.ru

Цитирование: Саченков О.А. Тензорно-структурная модель связи данных рентгеновской компьютерной томографии с упругими свойствами анизотропных материалов // Труды МАИ: электрон. журнал. № 150. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189683

Аннотация. В настоящей работе предложено теоретическое обоснование связи между данными рентгеновской компьютерной томографии и механическими свойствами конструкционных материалов. На основе введения функции ориентированного распределения на единичной сфере и её разложения по обобщённым сферическим гармоникам разработан метод реконструкции тензора структуры из томографических данных. Путём аппроксимации облака точек, получаемого из сегментированных данных РКТ, поверхностью второго порядка определена квадратичная форма, по которой восстанавливается симметричный положительно определённый тензор структуры. С использованием полиномиального разложения тензора напряжений по тензору деформаций и тензору структуры получены аналитические соотношения, связывающие компоненты тензора упругих констант с собственными значениями тензора структуры. Показано, что результирующий тензор упругих констант описывает ортотропное семейство симметрий. Введён безразмерный показатель фракционной анизотропии, позволяющий количественно оценивать степень

анизотропии по данным томографии. Работоспособность модели подтверждена численным моделированием на 10 тестовых образцах с пористой структурой от изотропного до ярко выраженного ортотропного случая. Установлено, что фракционная анизотропия возрастает от 0,03 до 0,97 при изменении геометрии поры, а снижение жёсткости в направлении минимального собственного значения достигает 70%. Подход открывает новые перспективы для прогнозирования упругих свойств и диагностики скрытых повреждений деталей в авиастроении и машиностроении без разрушения образцов.

Ключевые слова: рентгеновская компьютерная томография; механические свойства; упругие свойства; тензор структуры; фракционная анизотропия; функция ориентированного распределения.

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому федеральному университету по государственному заданию в сфере научной деятельности, проект № FZSM-2026-0006.

TENSOR-STRUCTURAL MODEL RELATING X-RAY COMPUTED TOMOGRAPHY DATA TO THE ELASTIC PROPERTIES OF ANISOTROPIC MATERIALS

O.A. Sachenkov

Kazan Federal University, Kazan, Russia

4works@bk.ru

Citation: Sachenkov O.A. Tensor-structural model relating x-ray computed tomography data to the elastic properties of anisotropic materials // Trudy MAI. 2026. No. 150. (In Russ.).
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189683

Abstract. This paper presents a theoretical justification of the relationship between X-ray computed tomography data and the mechanical properties of structural materials. Based on the introduction of an orientation distribution function on the unit sphere and its expansion in generalized spherical harmonics, a method for reconstructing the structure tensor from tomographic data is developed. By approximating the point cloud obtained from segmented CT data with a second-order surface, the quadratic form is determined, from which a symmetric positive-definite structure tensor is recovered. Using a polynomial expansion of the stress tensor in terms of the strain tensor and the

structure tensor, analytical relations linking the elastic constants tensor components to the eigenvalues of the structure tensor are obtained. It is shown that the resulting elastic constants tensor describes the orthotropic symmetry family. A dimensionless fractional anisotropy index is introduced to quantitatively assess the degree of anisotropy from tomography data. The model is validated through numerical simulation on 10 test samples with porous structures ranging from isotropic to pronounced orthotropic cases. It is established that fractional anisotropy increases from 0.03 to 0.97 with changing pore geometry, while stiffness reduction in the direction of the minimum eigenvalue reaches 70%. The approach opens new perspectives for predicting elastic properties and diagnosing hidden damage in aerospace and mechanical engineering components without destroying the samples.

Keywords: X-ray computed tomography, mechanical properties, elastic properties, structure tensor, fractional anisotropy, orientation distribution function

Funding: the study was conducted with financial support allocated to Kazan Federal University under the state assignment in the field of scientific research, Project No. FZSM-2026-0006.

Введение

Развитие современной авиационной и машиностроительной промышленности предъявляет всё более жёсткие требования к надёжности конструкционных элементов. Обеспечение безопасности эксплуатации деталей летательных аппаратов невозможно без совершенствования методов неразрушающего контроля внутренней структуры изделий [3, 8]. Среди существующих подходов особое место занимает рентгеновская компьютерная томография (РКТ), позволяющая получать трёхмерные данные о внутреннем строении объекта без его разрушения [4, 5].

Физической основой РКТ является измерение линейного коэффициента ослабления рентгеновского излучения, который напрямую связан с локальной плотностью и эффективным атомным номером материала [9, 13]. Установлено, что значения единиц Хаунсфилда коррелируют с плотностью вещества, что открывает возможность количественной оценки структурных параметров [14]. В

ряде работ продемонстрирована связь между данными томографии и механическими характеристиками композитных материалов [7], а также костной ткани [29].

Вместе с тем большинство существующих подходов носят эмпирический характер и ограничиваются корреляционным анализом без строгого теоретического обоснования. Для анизотропных сред, характерных для композитов и аддитивно изготовленных деталей, необходимо учитывать ориентационную структуру внутренней неоднородности. Аппарат тензоров структуры и функций ориентированного распределения, развитый в работах [17, 18], позволяет формализовать описание микроструктурной анизотропии, однако его применение к данным РКТ для прогнозирования упругих свойств остаётся недостаточно разработанным.

При механическом нагружении плотность материала неизбежно изменяется, что приводит к изменению коэффициента ослабления. На основе закона сохранения массы возможно построение аналитической связи между вариацией томографических данных и объёмной деформацией [31, 32]. Однако систематическое теоретическое обоснование такой связи, включая учёт анизотропии структуры, в литературе отсутствует.

Цель настоящей работы – теоретическое обоснование связи между данными рентгеновской компьютерной томографии и механическими свойствами конструкционных материалов, а также разработка модели, позволяющей коррелировать томографические характеристики с упругими константами.

Теоретическая часть

Для оценки распределения неоднородности в элементарном объеме введем параметр φ, в общем случае он зависит от точки в рассматриваемом объеме и ориентации в этой точке – φ = φ(x, n). Предположим, что ориентация в точке однозначно зависит от расположения, тогда

$$\varphi = f(\vec{n}), f: \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}, \quad (1)$$

здесь f – некая скалярная функция, определённая на единичной сфере S^2.

Введенную в (1) функцию f в литературе называют функцией ориентированного распределения [10, 14, 15, 16] свойства φ. При этом введенная функция должна удовлетворять условию

$$f(\vec{n}) = f(-\vec{n}). \tag{2}$$

А значит должна существовать функция

$$f(\vec{n}) = f^*(\vec{n} \otimes \vec{n}) = f^*(\boldsymbol{N}), f^*: \mathrm{S}^2 \otimes \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}. \tag{3}$$

Пусть функция f^* интегрируема с квадратом

$$\int_{\mathrm{S}^2} |f^*(\boldsymbol{N})|^2 \, \mathrm{d}s < +\infty, \tag{4}$$

где ds = sinθdθdφ – элементарная поверхность сферы S^2.

Известно, что в этом случае функция f^* может быть разложена в ряд Фурье [17–19]:

$$f^*(N) = g \cdot I + \boldsymbol{G}' : \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N}) + \boldsymbol{G}'' :: \boldsymbol{F}''(\boldsymbol{N}) + \cdots, \tag{5}$$

где $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N}), \boldsymbol{F}''(\boldsymbol{N}), \ldots\}$ – обобщенные сферические гармоники [103], определяющие ортогональный базис для интегрируемых с квадратом функций на сфере, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{F}''$ – тензора нулевого, второго и четвертого рангов соответственно.

Гармоника $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N})$ может быть определена как

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}, \tag{6}$$

здесь $\boldsymbol{I}$ – единичный тензор второго ранга, а на гармонику накладываются условия

$$\int_{\mathrm{S}^2} \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{0}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N}) = \left(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N})\right)^T, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N}) = 0, \tag{9}$$

где S^2 – единичная сфера, 0 – нулевой тензор второго ранга.

Условия (8) и (9) – условия симметрии и равенства нулю следа тензора соответственно. Тогда коэффициенты в выражении (5) могут быть определены как

$$g = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f^*(\boldsymbol{N})\, \mathrm{d}s, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{G}' = \frac{15}{8\pi} \int_{S^2} f^*(\boldsymbol{N}) \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{N}) ds, \tag{11}$$

где ds = sinθdθdφ – элементарная поверхность сферы S^2.

Ввиду (8) и (9) на G’ переносятся свойства симметричности и равенства нулю следа тензора:

$$\boldsymbol{G}' = (\boldsymbol{G}')^T, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{G}' = 0. \tag{13}$$

Условия (12) и (13) определяют, что в общем случае тензор G’ состоит из пяти независимых компонент. А согласно выражениям (5), (10) и (11) интегрируемая функция ориентированного распределения f^* может быть описана скаляром и тензором второго ранга

$$\{g, \boldsymbol{G}'\}. \tag{14}$$

В этом случае рассмотрим микрообъем и введем измеряющий скалярный параметр φ как

$$\varphi(\vec{n}) = \frac{\sum |\vec{l}(\vec{n})|}{N(\vec{n})}, \tag{15}$$

где длина вектора l характеризует протяженность материала в направлении $\boldsymbol{n}$, а N – количество пересечений между интерфейсами материала в направлении $\boldsymbol{n}$.

Для трехмерного случая введем сферическую систему координат на единичной сфере S^2, тогда (15) можно представить как

$$\varphi(\varphi, \theta) = \frac{\sum |\vec{l}(\varphi, \theta)|}{N(\varphi, \theta)}, \tag{16}$$

где φ, θ – полярный и азимутальный углы сферической системы координат.

Тогда, рассмотрев данные рентгеновской компьютерной томографии (РКТ), получим:

$$\boldsymbol{CT} = \{CT_{ijk}\}, CT_{ijk} \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

и данные кластеризации

$$MS = \{f_S(CT_{ijk})\} = \{MS_{ijk}\}, MS_{ijk} \in \boldsymbol{S}, \tag{18}$$

определим некий подобъём, определяемый, например, индексами

$$\begin{cases} i \in I, I: [i_1, i_2] \\ j \in J, J: [j_1, j_2] \\ k \in K, K: [k_1, k_2] \end{cases}. \tag{19}$$

Тогда φ – суть отображение данных РКТ (17) и данные кластеризации (18) в облако точек:

$$\varphi: S_I \times S_J \times S_K \to \{\vec{x}\}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3; S_I, S_J, S_K \subset \mathbb{R}, \tag{20}$$

где S с соответствующим индексом – это данные подобъёма цифрового двойника (19).

На рисунке 1а приведен пример неоднородного образца, а на рисунке 1б – соответствующее образцу функция ориентированного распределения.



а б

Рисунок 1 – Пример неоднородной среды (а) и функции ориентированного распределения (б)

Для определения тензора второго ранг в (11) с точки зрения вычислений удобнее построить аппроксимацию получаемого облака точек поверхностью второго порядка. В этом случае поверхность второго порядка – суть тензорная поверхность тензора $\boldsymbol{G}'$. В общем случае поверхность второго порядка может быть записана как

$$\vec{x}[A]\vec{x}^T + \vec{B}\vec{x}^T + C = 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (21)$$

где A, B, C – квадратичная форма, вектор и константа соответственно.

Тогда задачу аппроксимации облака точек поверхностью второго порядка можно сформулировать как [20, 21]

$$J = \sum_i \left(\vec{x}_i[A]\vec{x}_i^T + \vec{B}\vec{x}_i^T + C\right)^2 \to min, \quad (22)$$

где $\boldsymbol{x}$ – элементы облака точек, а компоненты квадратичной формы A, вектора B и константа C являются неизвестными.

Минимум (22) достигается из условия

$$\frac{\partial J}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial J}{\partial B_k} = \frac{\partial J}{\partial C} = 0;\ i,j,k \in 1 \div 3. \quad (23)$$

Что приводит к линейной задаче вида

$$[P]\vec{c} = 0, \vec{c} \in \mathbb{R}^{10}, \quad (24)$$

здесь $[P]$ – матрица плана, c – вектор неизвестных (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{23}, A_{13}, B_1, B_2, B_3, C).

Очевидно, что в системе (24) матрица плана $[P]$ вырождена или у системы нулевое решение. Так как в (21) необходимо только определить квадратичную форму $[A]$, вектор B отвечает только за смещение центра поверхности второго порядка как целого, а константа C – определяет масштаб поверхности второго порядка, то можно редуцировать вектор неизвестных c в (24), исключив последнюю компоненту [21, 22]. На практике проще задать некоторое значение константе C (например, C=1), тогда получим

$$[P]^*\vec{c}^* = \vec{b}, \vec{c}^* \in \mathbb{R}^9, \quad (25)$$

где $[P]^*$ – редуцированная матрица плана, $\boldsymbol{c}^*$ – редуцированный вектор неизвестных (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{23}, A_{13}, B_1, B_2, B_3, C), $\boldsymbol{b}$ – вектор свободных членов.

Введем следующий вектор

$$\vec{p}^T = \sqrt{2}\left(x_i^2, y_i^2, z_i^2, 2x_iy_i, 2y_iz_i, 2x_iz_i, 2x_i, 2y_i, z_i\right), \quad (26)$$

тогда редуцированная матрица плана может быть представлена как

$$[P] = \sum_i \vec{p} \otimes \vec{p}, \tag{27}$$

а вектор свободных членов может быть представлен в виде

$$\vec{b} = \sqrt{2} \sum_i \vec{p}, \tag{28}$$

тогда решение (25) представимо как

$$\vec{c}^* = \sqrt{2} \left(\sum_i \vec{p} \otimes \vec{p} \right)^{-1} \sum_i \vec{p}. \tag{29}$$

На практике задача (22) может быть еще упрощена, если расположить центр сферической системы координат для функции скалярного параметра φ в геометрический центр микрообъема, то в (22) можно вектор B принять равным нулю.

В результате на основе (29) может быть определена поверхность второго порядка, для которой существует симметричный положительно определённый тензор второго ранга [23–25], который суть квадратичная форма A. Для реконструкции тензора $\boldsymbol{G}'$ необходимо удовлетворить условиям (12), (13). Условие (12) уже выполнено по определению квадратичной формы, а условие (13) можно обеспечить с помощью выражения

$$\boldsymbol{G}' = [A] - \frac{1}{3}\mathrm{tr}([A])\boldsymbol{I}. \tag{30}$$

Выражение (10) суть пористость рассматриваемого микрообъема, которая может быть формально найдена из (22), если рассмотреть вместо квадратичной формы сферу неизвестного диаметра.

На рисунке 2 приведен пример различной аппроксимации функции ориентированного распределения (зеленые точки на рисунке 2). Так, красным на рисунке 2 показана аппроксимация тензором нулевого ранга, а синим на рисунке 2 тензором второго ранга.

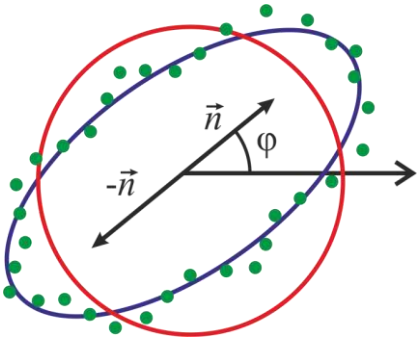


Рисунок 2 – Функции ориентированного распределения (зеленые точки), аппроксимации тензором нулевого ранга (красная линия) и тензором второго ранга (синяя линия)

Для обеспечения геометрического смысла часто используют корень от обратного к $\boldsymbol{G}'$ тензора $\boldsymbol{H}$, который называют тензором структуры [26, 27]:

$$\boldsymbol{H} = ((\boldsymbol{G}')^{-1})^{\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

в этом случае собственные значения тензора структуры – суть полуоси аппроксимирующего эллипса.

Далее рассмотрим тензор напряжений как функцию тензора деформаций и пары $\{g, \boldsymbol{H}\}$ [23, 28, 29]

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(g, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{\varepsilon}), \tag{32}$$

со следующим свойством

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{\sigma}(g, \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{Q}^T, \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{Q}^T), \tag{33}$$

где $\boldsymbol{Q}$ – ортогональный оператор.

Предположим линейную связь с тензором деформаций и воспользуемся известным полиномиальным разложением:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = {} & c_1\boldsymbol{I} + c_2\boldsymbol{H} + c_3(\boldsymbol{H})^2 + c_4\boldsymbol{\varepsilon} + c_5\boldsymbol{\varepsilon}^2 + c_6(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{H}) + \\ & c_7(\boldsymbol{H}^2\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{H}^2) + c_8(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^2\cdot\boldsymbol{H}) + c_9(\boldsymbol{H}^2\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^2\cdot\boldsymbol{H}^2),\end{aligned} \tag{34}$$

где c_i – некоторые функции от десяти инвариантов $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H})$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2)$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^3)$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^3)$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2\cdot\boldsymbol{\varepsilon})$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^2)$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2\cdot\boldsymbol{H}^2)$.

Требуя линейность тензора напряжений в зависимости от тензора деформаций, получим:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = {} & c_1\boldsymbol{I} + c_2\boldsymbol{H} + c_3\boldsymbol{H}^2 + c_4\boldsymbol{\varepsilon} + \\ & c_6(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{H}) + c_7(\boldsymbol{H}^2\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{H}^2),\end{aligned} \tag{35}$$

где c_1, c_2, c_3 могут быть определены как:

$$c_1 = \alpha_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha_2 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha_3 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}),$$
$$c_2 = \gamma_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_2 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (36)$$
$$c_1 = \gamma_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \gamma_2 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_3 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}),$$

здесь α_i, β_i, γ_i – функции от $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H})$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2)$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^3)$.

Тогда с учетом (33), (35), (36) получим:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{I}\left(\alpha_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha_2 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha_3 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\right) +$$
$$\boldsymbol{H}\left(\gamma_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_2 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\right) + \quad (37)$$
$$\boldsymbol{H}^2\left(\gamma_1 \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \gamma_2 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_3 \mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\right) +$$
$$2c_1\boldsymbol{\varepsilon} + 2c_2(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{H}) + 2c_3(\boldsymbol{H}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{H}^2).$$

Покомпонентное сравнение (37) и обобщённого закона Гука с учетом базовых симметрий тензора упругих констант приводит к выражению:

$$C_{ijkl} = \alpha_1 \delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha_2\left(H_{ij}\delta_{ij} + H_{kl}\delta_{kl}\right) + \alpha_3\left(\delta_{ij}H_{kp}H_{pl} + \delta_{kl}H_{ip}H_{pj}\right) +$$
$$\beta_1 H_{ij}H_{kl} + \beta_2\left(H_{ij}H_{kp}H_{pl} + H_{iq}H_{qj}H_{kl}\right) + \beta_3 H_{iq}H_{qj}H_{kp}H_{pl} + \quad (38)$$
$$c_1\left(\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{li}\delta_{kj}\right) + c_2\left(H_{ik}\delta_{lj} + H_{kj}\delta_{li} + H_{il}\delta_{kj} + H_{lj}\delta_{ki}\right) +$$
$$c_3\left(H_{ir}H_{rk}\delta_{lj} + H_{rj}H_{kr}\delta_{li} + H_{ir}H_{rl}\delta_{kj} + H_{lr}H_{rj}\delta_{ik}\right),$$

где $\boldsymbol{H}_{ij}$ – компоненты тензора $\boldsymbol{H}$, а α_i, β_i, γ_i, c_i – функции от g и $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H})$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2)$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^3)$.

Из выражения (38) видно, что полученный тензор упругих констант может описывать только ортотропное семейство симметрий материала. Рассмотрев тензор H в главных осях, и предполагая, что собственные значения различны и отличны от нуля, получим

$$C_{iiii} = \alpha_1 + 2c_1 + 2(\alpha_2 + 2c_2)\lambda_i + (2\alpha_3 + \beta_1 + 4c_3)\lambda_i^2 + \quad (39)$$
$$2\beta_2\lambda_i^3 + \beta_3\lambda_i^4,$$
$$C_{iijj} = \alpha_1 + \alpha_2\left(\lambda_i + \lambda_j\right) + \alpha_3\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right) + \beta_1\lambda_i\lambda_j + \quad (40)$$
$$+\beta_2\left(\lambda_i\ \lambda_j^2 + \lambda_j\ \lambda_i^2\right) + \beta_3\lambda_i^2\lambda_j^2,$$
$$C_{ijij} = c_1 + c_2\left(\lambda_i + \lambda_j\right) + c_3\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right), \quad (41)$$

где λ_i – главные значения тензора $\boldsymbol{H}$, остальные компоненты тензора упругих констант обращаются в ноль.

Из выражений (39)–(41) видно, что собственные значения тензора H масштабно определяют механические свойства в направлении, при этом это влияние не линейное. Для первичной оценки характера ортотропии удобно использовать выражение фракционной анизотропии:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}. \quad (42)$$

Величина *r* в выражении (42) находится в диапазоне от 0 то 1. В изотропном случае (когда все собственные значения равны) фракционная анизотропия (*r*) обращается в ноль. В случае, когда ортотропия стремиться к одному главному направлению ($\lambda_1 >> \lambda_2$, $\lambda_1 >> \lambda_3$) значение фракционной анизотропии стремится к единице.

Практическая часть

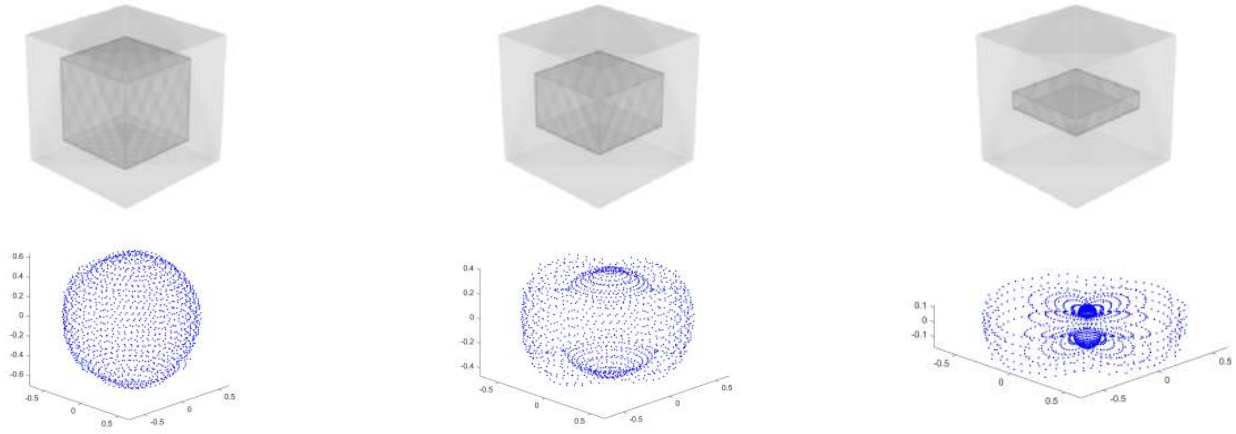
В качестве исследуемых объектов для тензора четвертого ранга были рассмотрены 10 тестовых образцов с заранее известной смоделированной структурой от изотропии к ярко выраженной ортотропии. Образцы представляли собой цифровые данные в виде куба с параметризованным вырезом, имеющим форму параллелепипеда, у которого варьировался вертикальный размер поры. Для каждого из образцов определялся тензор структуры и фракционная анизотропия по описанной выше методике, а также эффективный тензор упругости по методике из работы [30–33].

Результаты

На рисунке 3 показаны характерные образцы:

- На рисунке 3а показан образец 1: образец с кубической порой (сверху) и соответствующая ему функция ориентированного распределения (снизу), можно заметить, что распределение соответствует сфере, равно как и форма поры обеспечивает изотропный случай.

- На рисунке 3б показан образец 2: образец с порой имеющий форму параллелепипеда, у которого высота в два раза меньше остальных двух размеров (сверху) и соответствующая ему функция ориентированного распределения (снизу), можно заметить характерную деформацию сферы.
- На рисунке 3в показан образец 3: образец с порой имеющий форму параллелепипеда, у которого высота порядка 10% остальных двух размеров (сверху) и соответствующая ему функция ориентированного распределения (снизу), здесь деформация сферы уже ярко выражена.



а б в

Рисунок 3 - Набор тестовых образцов (верхний ряд) и функция ориентированного распределения (нижний ряд)

Фракционная анизотропия для образца 1 была равна 0,03, что соответствует изотропному случаю, у образца 2 фракционная анизотропия составила 0,63 – что сигнализирует о наличии ортотропии, а у образца 3 величина фракционной анизотропии возросла до 0,97, что уже сигнализирует о явной ортотропии.

Рассчитанные эффективные тензора упругости для образцов показали хорошее соответствие с полученными тензорами структуры, так для образца 1 эффективные тензор упругости был изотропным, а образец 2 и образец 3 обладали выраженным ортотропным свойством. При этом снижение жесткости в вертикальном направлении для образца 2 составило порядка 40%, а для образца 3 – порядка 70%. На рисунке 4а и 4б показаны сечения тензорной поверхности эффективного тензора упругости плоскостью *xy*, *yz* соответственно. Цветом на

рисунке 4 отмечены образцы: синим – образец 1, оранжевым – образец 2, зеленым – образец 3. Можно заметить расширение кривых, но форма при этом в этих сечениях изменяется мало.

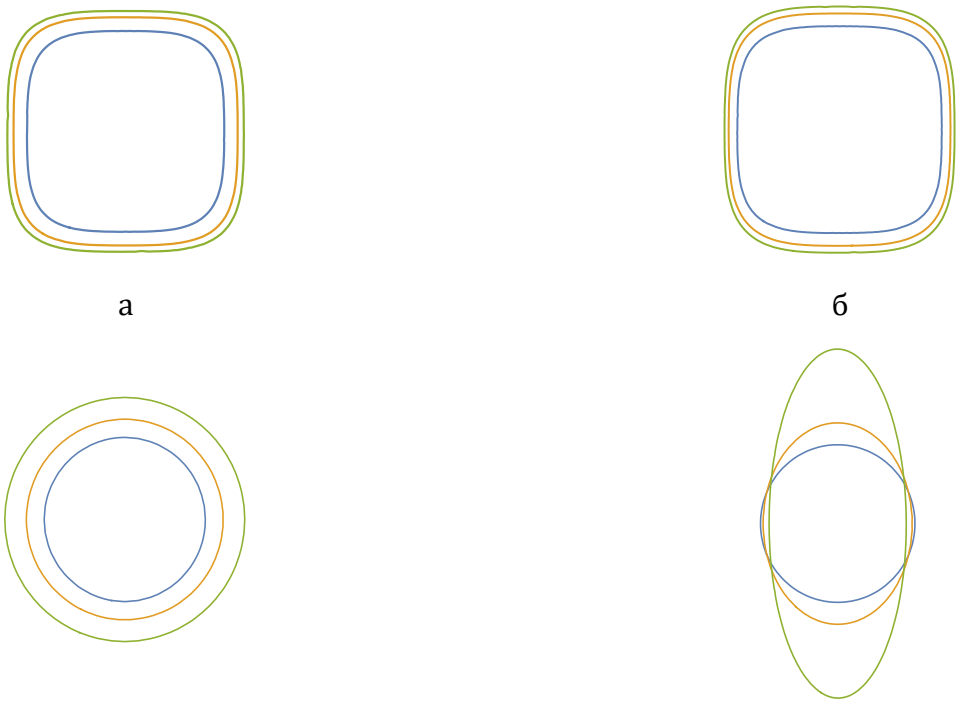


Рисунок 4. Сечения тензорных поверхностей: а, б – тензора упругости, в, г – тензора структуры; (а), (в) – сечение плоскостью *xy,* (б), (г) – сечение плоскостью *yz,* (а); синий – образец 1, оранжевый – образец 2, зеленый – образец 3.

На рисунке 4в и 4г показаны сечения тензорной поверхности тензора структуры, цветовое обозначение такое же. Стоит отметить, что в сечении плоскостью *xy* кривые расширяются, в то время как в плоскости *yz* видно явное изменение формы (возрастание эллиптичности).

Заключение

В работе показано, что данные рентгеновской компьютерной томографии могут служить основой для количественной оценки упругих свойств конструкционных материалов без разрушающих испытаний. Разработанная модель связывает томографические данные с механическими характеристиками через функцию ориентированного распределения на единичной сфере и её разложение по обобщённым сферическим гармоникам. Аппроксимация облака точек, полученного из сегментированных данных РКТ, поверхностью второго

порядка позволяет реконструировать тензор структуры материала. Установлено, что тензор упругих констант, построенный на основе тензора структуры, описывает ортотропное семейство симметрий. В главных осях компоненты тензора упругих констант выражаются через собственные значения тензора структуры и функции его инвариантов, причём влияние собственных значений является масштабно-нелинейным. Предложен безразмерный показатель фракционной анизотропии r (от нуля для изотропного случая до единицы для выраженной ортотропии), позволяющий проводить первичную оценку характера анизотропии по данным РКТ без механических испытаний.

Численное моделирование на 10 тестовых образцах подтвердило работоспособность модели: фракционная анизотропия возрастает от 0,03 (кубическая пора) до 0,97 (плоская пора), а снижение жёсткости в направлении минимального собственного значения составляет 40–70%. Эффективные тензоры упругости демонстрируют качественное и количественное соответствие с тензорами структуры. Результаты открывают возможность прогнозирования упругих свойств и диагностики скрытых повреждений элементов конструкций летательных аппаратов на основе данных РКТ, что имеет существенное значение для неразрушающего контроля в авиастроении и машиностроении.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Список источников

1. Толстиков В.Г., Пыхалов А.А. Анализ напряженно-деформированного состояния деталей планера самолета из композиционных материалов на основе сканирования и решения глобально-локальной задачи // Труды МАИ: электрон. журн. 2021. № 118. DOI 10.34759/trd-2021-118-05.

2. Методы неразрушающего контроля, применяемые для конструкций из перспективных композиционных материалов / Б.В. Бойцов, С.Л. Васильев, А.Г. Громашев, С.А. Юргенсон // Труды МАИ : электрон. журн. 2011. № 49. URL:

https://trudymai.ru/upload/iblock/d5f/povyshenie-kachestva-podgotovki-proizvodstva-primeneniem-tekhnologiy-bystrogo-prototipirovaniya.pdf?lang=ru&issue=49.

3. A review of current challenges and case study toward optimizing micro-computed x-ray tomography of carbon fabric composites / A. Rashidi, T. Olfatbakhsh, B. Crawford, A.S. Milani // Materials. 2020. Vol. 13, no. 16. P. 3606.

4. Ларин А.А., Резниченко В.И. Применение рентгеновской томографии для контроля агрегатов летательных аппаратов из композиционных материалов // Труды МАИ : электрон. журн. 2012. № 52. С. 33. URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/617/primenenie-rentgenovskoy-tomografii-dlya-kontrolya-agregatov-letatelnykh-apparatov-iz-kompzitsionnykh-matrialov.pdf?lang=&issue=52.

5. Novelline R. Squire's fundamentals of radiology. 5th edition. Harvard University Press, 1997. 660 p.

6. Mateus G.L., Eduardo I.J. X-ray computed tomography for effective atomic number and density evaluation: A review // Radiation Physics and Chemistry. 2024. Vol. 225. P. 112130.

7. Preliminary X-ray CT investigation to link Hounsfield unit measurements with the International System of Units (SI) / Z.H. Levine, A.P. Peskin, A.D. Holmgren, E.J. Garboczi // Plos One. 2018. Vol. 13, no. 12. P. e0208820.

8. Relations between X-ray tomography, density and mechanical properties in carbon–carbon composites / N. Douarche, D. Rouby, G. Peix, J.M. Jouin // Carbon. 2001. Vol. 39, iss. 10. P. 1455–1465.

9. Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone // Medical Engineering & Physics. 1995. Vol. 17, no. 5. P. 347–355.

10. Cowin S.C. Anisotropic poroelasticity: fabric tensor formulation // Mechanics of Materials. 2004. Vol. 36, iss. 8. P. 665–677.

11. Harrigan T.P., Mann R.W. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor // Journal of Materials Science. 1984. Vol. 19. P. 761–767.

12. Inter-track porosity and macroporosity insights into mechanical properties of FDM printed samples using in-situ 4D XCT / N. Kharin, K. Akifyev, K. Spiridonova, E. Statsenko, E. Semenova, P. Bolshakov, O. Sachenkov // International Journal of Mechanics and Materials in Design. 2025. Vol. 21. P. 1239–1257.

13. Исследование пористости образца с флюид насыщенными закрытыми порами под действием внешней нагрузки / Н.В. Харин, К.Н. Акифьев, Е.О. Стаценко и др. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана: серия естественные науки. 2024. № 3. С. 70–92.

14. Industrial radiography / IAEA – International Atomic Energy Agency. 2024.

15. Diagnostic accuracy of virtual non-contrast CT for aortic valve stenosis severity evaluation / D. Lorenzatti, P. Pina, J. Daich, et al. // Journal of Cardiovascular Computed Tomography. 2024. Vol. 18, no. 50. P. 5.

16. Producing micro-finite element models from real-time clinical CT scanners: calibration, validation and material mapping strategies / Y. Cai, P. Zioupos, N. Marquez-Grant, B. Budair, S. Junaid // Front Bioeng Biotechnol. 2025. Vol. 13. P. 1670428.

17. Spectral Hounsfield units: a new radiological concept / M.A. Hurrell, A.P.H. Butler, N.J. Cook, P.H. Butler, J.P. Ronaldson, R. Zainon // European Radiology. 2012. Vol. 22, no. 5. P. 1008–1013.

18. Харин Н.В. Об устройстве для автоматизированного сжатия образцов совместно со съемкой рентгеновского компьютерного томографа // Труды МАИ : электрон. журн. 2025. № 143. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185638.

19. Vilenkin N.J. Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. Paris: Dunod,1969. 42 p.

20. Акулич А.Ю., Акулич Ю.В., Денисов А.С. Экспериментальное определение разрушающих касательных напряжений трабекулярной костной ткани головки бедра человека // Российский журнал биомеханики. 2010. Т. 14, № 4. С. 7–16.

21. Уточнение индивидуальной зависимости модуля упругости трабекулярной костной ткани от объемного содержания матрикса / Ю.В. Акулич, А.Ю. Акулич, А.С. Денисов, П.С. Шайманов, А.Ф. Шулятьев // Российский журнал биомеханики. 2014. Т. 18, № 2. С. 158–167.

22. Bunge G. Texture analysis in material science – mathematical methods. London: Butterworth, 1970. 593 p.

23. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Handbuch der Physik. Vol. III/3. Berlin: Springer, 1965. 602 p.

24. Jones M.N. Spherical harmonics and tensors for classical field theory. New York: Wiley, 1985. 244 p.

25. The longitudinal Young's modulus of cortical bone in the midshaft of human femur and its correlation with CT scanning data / M. Cuppone, B.B. Seedhom, E. Berry, A.E. Ostell // Calcified Tissue International. 2004. Vol. 74, no. 3. P. 302–309.

26. Методика количественной оценки степени растрескивания слоистого композита по данным компьютерной томографии / А.В. Пантелеев, Н.В. Турбин, Н.А. Тучков, Р.Л. Талья, И.А. Ахмедов // Труды МАИ : электрон. журн. 2025. № 143. С. 16. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185657.

27. Hermena S., Young M. CT-scan image production procedures / StatPearls. StatPearls Publishing. 2025. 187 p.

28. Gupta S., Dan P. Bone geometry and mechanical properties of the human scapula using computed tomography data // Trends in Biomaterials & Artificial Organs. 2004. Vol. 17, no. 2. P. 61–70.

29. Relationships between material properties and CT scan data of cortical bone with and without metastatic lesions / T.S. Kaneko, M.R. Pejcic, J. Tehranzadeh, J.H. Keyak // Medical Engineering & Physics. 2003. Vol. 25, no. 6. P. 445–54.

30. Ham B.M., MaHam A. Analytical chemistry: a toolkit for scientists and laboratory technicians. 2nd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 2024. 688 p.

31. Салтыков С.А. Стереологическая металлография. М.: Металлургия, 1958. 122 с.

32. Comparison of methods for estimating Young's moduli of mortar specimens / S. Schmid, J.J. Timothy, E. Woydich et al. // Scientific Reports. 2024. Vol. 14. P. 14198.

33. Method for studying the porosity of fluid phase samples by X-ray computed tomography under uniaxial compression / K.N. Akifyev, E.O. Statsenko, V.V. Smirnova,

N.V. Kharin, P.V. Bolshakov, O.A. Sachenkov // PNRPU Mechanics Bulletin. 2023. Vol. 2. P. 11–22.

References

1. Tolstikov V.G., Pykhalov A.A. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2021, no. 118. DOI 10.34759/trd-2021-118-05.

2. Boytsov B.V., Vasiliev S.L., Gromashev A.G., Yurgenson S.A. *Trudy MAI: elektron. zhurn,* 2011, no. 49. Avialable at: https://trudymai.ru/upload/iblock/d5f/povyshenie-kachestva-podgotovki-proizvodstva-primeneniem-tekhnologiy-bystrogo-prototipirovaniya.pdf?lang=ru&issue=49.

3. Rashidi A., Olfatbakhsh T., Crawford B., Milani A.S. A review of current challenges and case study toward optimizing micro-computed X-ray tomography of carbon fabric composites. *Materials*, 2020, vol. 13, no. 16, pp. 3606.

4. Larin A.A., Reznichenko V.I. *Trudy MAI: elektron. zhurn*, 2012, no. 52. Avialable at: https://trudymai.ru/upload/iblock/617/primenenie-rentgenovskoy-tomografii-dlya-kontrolya-agregatov-letatelnykh-apparatov-iz-kompzitsionnykh-matrialov.pdf?lang=&issue=52.

5. Novelline R. *Squire's fundamentals of radiology*, 5th edition, Harvard University Press, 1997, 660 p.

6. Mateus G.L., Eduardo I.J. X-ray computed tomography for effective atomic number and density evaluation: A review. *Radiation Physics and Chemistry*, 2024, vol. 225, pp. 112130.

7. Levine Z.H., Peskin A.P., Holmgren A.D., Garboczi E.J. Preliminary X-ray CT investigation to link Hounsfield unit measurements with the International System of Units (SI). *Plos One*, 2018, vol. 13, no. 12, pp. e0208820.

8. Douarche N., Rouby D., Peix G., Jouin J.M. Relations between X-ray tomography, density and mechanical properties in carbon–carbon composites. *Carbon*, 2001, vol. 39, iss. 10, pp. 1455–1465.

9. Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. Medical Engineering & Physics, 1995, vol. 17, no. 5, pp. 347–355.

10. Cowin S.C. Anisotropic poroelasticity: fabric tensor formulation. *Mechanics of Materials,* 2004, vol. 36, iss. 8, pp. 665–677.

11. Harrigan T.P., Mann R.W. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor. *Journal of Materials Science*, 1984, vol. 19, pp. 761–767.

12. Kharin N., Akifyev K., Spiridonova K., Statsenko E., Semenova E., Bolshakov P., Sachenkov O. Inter-track porosity and macroporosity insights into mechanical properties of FDM printed samples using in-situ 4D XCT. *International Journal of Mechanics and Materials in Design,* 2025, vol. 21, pp. 1239–1257.

13. Kharin N.V, Akifyev K.N, Statsenko E.O et al. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana: seriya estestvennye nauki,* 2024, no. 3, pp. 70–92.

14. *Industrial radiography*. IAEA. – International Atomic Energy Agency, 2024.

15. Lorenzatti D., Pina P., Daich J. et al. Diagnostic accuracy of virtual non-contrast CT for aortic valve stenosis severity evaluation. J Journal of Cardiovascular Computed Tomography, 2024, vol. 18, no. 50, pp. 5.

16. Cai Y., Zioupos P., Marquez-Grant N., Budair B., Junaid S. Producing micro-finite element models from real-time clinical CT scanners: calibration, validation and material mapping strategies. *Front Bioeng Biotechnol*, 2025, vol. 13, pp. 1670428.

17. Hurrell M.A., Butler A.P.H., Cook N.J., Butler P.H., Ronaldson J.P., Zainon, R. Spectral Hounsfield units: a new radiological concept. *European Radiology*, 2012, vol. 22, no. 5, pp. 1008–1013.

18. Kharin N.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn.,* 2025, no. 143, pp. 4. Avialable at: https://trudymai.ru/published.php?ID=185638.

19. Vilenkin N.J. *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*. Paris, Dunod, 1969, 42 p.

20. Akulich A.Yu., Akulich Yu.V., Denisov A.S. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2010, vol. 14, iss. 4, pp. 7–16.

21. Akulich Yu.V., Akulich A.Yu., Denisov A.S., Shaymanov P.S., Shulyatev A.F. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2014, vol. 18, iss. 2, pp. 135–143.

22. Bunge G. *Texture analysis in material science – mathematical methods,* London, Butterworth, 1970, 593 p.

23. Truesdell C., Noll W. *The non-linear field theories of mechanics. Handbuch der Physik,* vol. III/3, Berlin, Springer, 1965, 602 p.

24. Jones M.N. *Spherical harmonics and tensors for classical field theory*, New York, Wiley, 1985. 244 p.

25. Cuppone M., Seedhom B.B., Berry E., Ostell A.E. The longitudinal young's modulus of cortical bone in the midshaft of human femur and its correlation with CT scanning data. *Calcified Tissue International*. 2004, vol. 74, no. 3, pp. 302–309.

26. Panteleev A.V., Turbin N.V., Tuchkov N.A., Talia R.L., Akhmedov I.A. *Trudy MAI: elektron. zhurn.,* 2025, no. 143, pp. 16.

27. Hermena S., Young M. *CT-scan image production procedures*. StatPearls. StatPearls Publishing, 2025, 187 p.

28. Gupta S., Dan P. Bone geometry and mechanical properties of the human scapula using computed tomography data. *Trends in Biomaterials & Artificial Organs*, 2004, vol. 17, no. 2, pp. 61–70.

29. Kaneko T.S., Pejcic M.R., Tehranzadeh J., Keyak J.H. Relationships between material properties and CT scan data of cortical bone with and without metastatic lesions. *Medical Engineering & Physics*, 2003, vol. 25, no. 6, pp. 445–454.

30. Ham B.M., MaHam A. *Analytical chemistry: a toolkit for scientists and laboratory technicians,* 2nd ed., Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2024, 688p.

31. Saltykov S.A. *Stereologicheskaya metallografiya* [Stereological metallography], Moscow, Metallurgiya, 1958, 122 p.

32. Schmid S., Timothy J.J., Woydich E. et al. Comparison of methods for estimating Young's moduli of mortar specimens. *Scientific Reports*, 2024, vol. 14, pp. 14198.

33. Akifyev K.N., Statsenko E.O., Smirnova V.V., Kharin N.V., Bolshakov P.V., Sachenkov O.A. Method for studying the porosity of fluid phase samples by X-ray computed tomography under uniaxial compression. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023. vol. 2, pp. 11–22.

Информация об авторах

Оскар Александрович Саченков, доц., к.ф.-м.н., заведующий кафедрой компьютерной математики и информатики института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Казань, Россия; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8554-2938; Scopus ID: 56449284900; WOS ID: L-4813-2015; e-mail: 4works@bk.ru

Information about the authors

Oskar A. Sachenkov, Candidate of Science (Physics and Maths), Head of the Department of Computer Mathematics and Informatics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics. Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8554-2938; Scopus ID: 56449284900; WOS ID: L-4813-2015; e-mail: 4works@bk.ru

Получено 01 августа 2026 ● Принято к публикации 25 августа 2026 ● Опубликовано 28 октября 2026
Received 01 August 2026 ● Accepted 25 August 2026 ● Published 28 October 2026