

Труды МАИ. 2025. № 140
Trudy MAI. 2025. No. 140. (In Russ.)

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184058>

EDN: <https://www.elibrary.ru/BCUFRX>

ИЗГИБ ОРТОТРОПНОЙ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЁННОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Андрей Владимирович Земсков^{1✉}, Ле Ван Хао²

^{1,2}Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

¹azemskov1975@mail.ru ✉

²vanhaovtl@gmail.com

Аннотация. В работе исследуются связанные термомеханодиффузионные процессы, возникающие при нестационарном изгибе консольно закреплённой балки под действием распределенной нагрузки. Математическая постановка задачи включает в себя систему уравнений нестационарных изгибных колебаний балки Бернулли-Эйлера с учетом тепломассопереноса, которая получена из общей модели термомеханодиффузии для сплошных сред с помощью обобщенного принципа виртуальных перемещений. Предполагается, что скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений является конечной. На примере консольно закреплённой трехкомпонентной балки, выполненной из сплава цинка, меди и алюминия, находящейся под действием распределенной нестационарной нагрузки,

исследовано взаимодействие механического, температурного и диффузионного полей.

Ключевые слова: термомеханодиффузия, балка Бернулли-Эйлера, консоль, функция Грина, метод эквивалентных граничных условий, нестационарные задачи

Для цитирования: Земсков А.В., Хао Ле Ван. Изгиб ортотропной консольно-закреплённой балки Бернулли-Эйлера под действием распределенной нестационарной нагрузки с учетом тепломассопереноса // Труды МАИ. 2025. № 140.

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184058>

Original article

BENDING OF AN ORTHOTROPIC CANTILEVERED BERNOULLI-EULER BEAM UNDER AN UNSTEADY DISTRIBUTED TRANSVERSE LOAD CONSIDERING HEAT AND MASS TRANSFER

Andrei V. Zemskov^{1✉}, Le Van Hao²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russian Federation

¹azemskov1975@mail.ru ✉

²vanhaovtl@gmail.com

Abstract. Beams, plates, and shells constitute the foundational elements of most structures designed for various purposes. A crucial stage in advancing the physical understanding of material strength is the consideration of the influence of thermal and diffusive motion of particles within solid bodies on the deformation process, particularly when designing structures operating under multifactor external conditions. The paper investigates the

coupled thermomechanodiffusion processes arising during the non-stationary bending of a cantilever beam subjected to a distributed load. It is assumed that the free end of the beam is thermally and mass-isolated, while the fixed end maintains constant temperature and concentrations of the substances constituting the beam. The deformations of the beam induce heating and generate upward diffusive fluxes, directed from the compression zones to the tension zones (Gorsky effect). The resulting heat and mass transfer directly affects the mechanical field, thereby altering the stress-strain state of the beam. The mathematical formulation of the problem includes the system of equations for the non-stationary bending vibrations of the Bernoulli-Euler beam, taking into account heat and mass transfer, which is derived from the general model of thermomechanodiffusion for continuous media using the generalized principle of virtual displacements. It is assumed that the speed of propagation of thermal and diffusive disturbances is finite. The solution algorithm is based on the use of Laplace transforms, Fourier series expansions, and the method of equivalent boundary conditions. This approach significantly simplifies the task of inverting the Laplace transform, reducing it to the inversion of rational functions through residue calculus and operational calculus tables. Using the example of a cantilever three-component beam made of a zinc, copper, and aluminum alloy under a distributed non-stationary transverse load, the interaction of mechanical, thermal, and diffusive fields was studied. The study demonstrates that non-stationary bending initiates the process of heat and mass transfer. At the same time, static bending affects only the mass transfer process and does not cause temperature changes within the beam. The calculation results are consistent with those obtained by the authors in their previous works. It should also be noted that, on a qualitative level, the obtained results

align with the conclusions of experimental studies, which indicate that the interaction of mechanical and diffusive fields becomes significant only under plastic deformation, while in the elastic deformation regime, this interaction remains negligibly small.

Keywords: thermoelastic diffusion, Bernoulli-Euler beam, cantilever beam, Green's function, equivalent boundary conditions method, unsteady problems

For citation: Zemskov A.V., Hao Le Van. Bending of an orthotropic cantilevered Bernoulli-Euler beam under an unsteady distributed transverse load considering heat and mass transfer. *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184058>

Введение

Балки, пластины и оболочки составляют основу большинства конструкций различного назначения. Важнейшим этапом в развитии физических представлений о прочности материалов является учет влияния теплового и диффузионного движения частиц внутри твердых тел на процесс деформации при проектировании конструкций, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий [1, 2]. При рассмотрении расчета тонкостенных элементов конструкций важно подчеркнуть работы [3 - 14]. В этих статьях описываются различные формулировки задач термомеханодиффузии для балок, пластин и оболочек.

Осесимметричное напряженно-деформированное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круглым отверстием при диффузионном насыщении в квазистатическом приближении рассматривается в [3].

Исследования [4 - 12] анализируют термомеханические и диффузионные явления в балках и пластинах, в [13] рассматривается термоупругая пластина с обжатием, а в [14] задача термомеханической диффузии в круглой пластине. В этих работах рассматриваются в основном квазистатические термомеханические диффузионные процессы. Нестационарные модели рассматриваются только в [7] и [10], где изучаются пластины Кирхгофа [7] и балки Бернулли-Эйлера [10].

Анализ экспериментальных и теоретических результатов показал, что упругие деформации сжатия лишь незначительно уменьшают коэффициент самодиффузии в некоторых металлах [15, 16]. Этот факт позволяет сделать вывод о том, что упругая деформация слабо влияет на диффузию, а основные эффекты механодиффузии наблюдаются только в области пластической деформации.

С другой стороны, взаимодействие между механическими и диффузионными полями усиливается с ростом температуры тел. В работе [17] анализируется влияние деформации на массоперенос в поликристаллической никелевой пластине, покрытой медью, подвергнутой растягивающей нагрузке при температуре 1073 К. Экспериментальные результаты выявили значительную разницу (до 53%) в средних концентрациях по толщине пластины как под нагрузкой, так и в отсутствие нагрузки.

Здесь важно отметить, что решение нестационарных задач для шарнирно опертых балок или пластин не вызывает особых затруднений и может быть найдено с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье, как например в [18 - 23], чего нельзя сказать о консольно закрепленных балках и пластинах, где данный метод неприменим. В данной работе предлагается модель нестационарных

термоупруго-диффузионных колебаний консольно закрепленной балки, основанная на гипотезах Бернулли-Эйлера, и представлен комплексный алгоритм решения, основанный на использовании метода эквивалентных граничных условий, апробированный ранее при решении аналогичных задач [24].

1. Постановка задачи

В работе исследуются физико-механические процессы, возникающие при термоупругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной ортотропной многокомпонентной балки Бернулли-Эйлера под действием нестационарной поперечной нагрузки, приложенной к свободному концу. Схема закрепления и приложенных усилий представлена на рисунке 1. Также полагаем, что свободный конец балки тепло- массоизолирован, а на закрепленном конце поддерживается постоянная температура и концентрации веществ, входящих в состав балки.

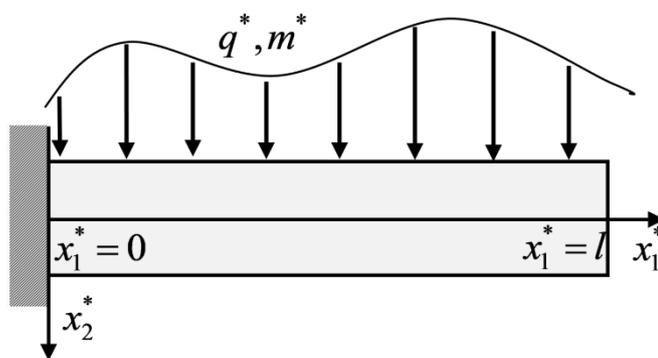


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи.

Деформации балки вызывают нагрев и порождают восходящие диффузионные потоки, направленные из зон сжатия в зоны растяжения (эффект Горского) [25, 26]. Возникающий при этом тепломассоперенос влияет, в свою очередь, на механическое поле и, следовательно, на напряженно-деформированное состояние балки. Математическая модель поперечных колебаний балки описывается уравнениями [21,

23] (штрих – производная по продольной координате x_1 , точка – производная по времени):

$$\begin{aligned} \ddot{v}'' - a\dot{v} &= v^{IV} + b_1 \mathfrak{G}'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j'' - \frac{q+m'}{J_3}, \quad a = \frac{F}{J_3}, \\ \sum_{r=0}^M \frac{(\tau_0)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} \left(\dot{\mathfrak{G}} - B_1 \dot{v}'' + \sum_{q=1}^N \nu^{(q)} \dot{H}_q \right) &= \kappa_1 \mathfrak{G}'', \\ \sum_{l=0}^K \frac{(\tau_q)^l}{l!} \frac{\partial^l \dot{H}_q}{\partial \tau^l} &= D_1^{(q)} H_q'' + \Lambda_{11}^{(q)} v^{IV} - M_1^{(q)} \mathfrak{G}'', \quad H_{N+1} = -\sum_{q=1}^N H_q. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Все величины в (1.1) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{l}, \quad v = \frac{v^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}, \quad \tau_0 = \frac{C\tau_t}{l}, \quad \theta = \frac{T-T_0}{T_0}, \quad B_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha}}{\rho c_0}, \quad b_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha} T_0}{C_{1111}}, \\ C^2 &= \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \kappa_\alpha = \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{\rho c_0 Cl}, \quad M_\alpha^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}), \quad \alpha_\gamma^{(q)} = \frac{\alpha_{\gamma\gamma}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad \nu^{(q)} = R \frac{\ln[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{c_0 m^{(q)}}, \\ D_\alpha^{(q)} &= \frac{D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{\alpha\alpha}^{(q)} \alpha_{\beta\beta}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 Cl}, \quad J_3 = \frac{J_3^*}{l^4}, \quad F = \frac{F^*}{l^2}, \quad q = \frac{q^*}{l C_{1111}}, \quad m = \frac{m^*}{l^2 C_{1111}}, \end{aligned}$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; v^* – прогибы балки; l – длина балки; $\eta_q = x_2 H_q$ – приращение концентрации q -ой компоненты вещества в составе $N+1$ – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрации q -го вещества; C_{ijkl} – упругие постоянные; ρ – плотность; $\alpha_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $\nu^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие нагрев среды за счет диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты диффузии; R – универсальная газовая постоянная; $\theta = x_2 \mathfrak{G}$ – приращение температуры; T – актуальная температура среды; T_0 – начальная температура среды; κ_{ij} – компоненты

тензора теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; b_{ij} – температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества; $\tau^{(q)}$ и τ_t – время релаксации диффузионных и тепловых потоков; J_3^* – момент инерции сечения; F^* – площадь сечения; q^* – распределенная по длине балки поперечная нагрузка; m^* – распределённый по длине балки изгибающий момент.

Уравнения (1.1) дополняются начально-краевыми условиями, которые в случае консольного закрепления имеют вид ($x = x_1$)

$$\begin{aligned}
 v'|_{x=0} = 0, \quad \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad \left(v''' + b_1 \vartheta' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j' - \ddot{v}' \right) \Big|_{x=1} = 0, \\
 v|_{x=0} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0, \quad \vartheta|_{x=0} = 0, \quad \kappa_1 \vartheta'|_{x=1} = 0, \quad \left(\Lambda_{11}^{(q)} v''' - M_1^{(q)} \vartheta' + D_1^{(q)} H_q' \right) \Big|_{x=1} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

2. Формулировка и решение вспомогательной задачи

Сформулированную задачу (1.1), (1.2) будем решать методом эквивалентных граничных условий, что обусловлено невозможностью использования процедуры разделения переменных при граничных условиях (1.2). В соответствии с данным методом [24], вначале рассмотрим вспомогательную задачу, описываемую уравнениями (1.1), нулевыми начальными условиями и граничными условиями следующего вида

$$\begin{aligned}
\left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x=0} &= f_1(\tau), \quad v|_{x=0} = 0, \quad \vartheta|_{x=0} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0, \\
\left(v''' + b_1 \vartheta' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j' - \dot{v}' \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad \kappa_1 \vartheta'|_{x=1} = 0, \\
\left(\Lambda_{11}^{(q)} v''' - M_1^{(q)} \vartheta' + D_1^{(q)} H_q' \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad v'|_{x=1} = f_2(\tau),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ подлежат определению. Начальные условия по-прежнему нулевые.

Решение вспомогательной задачи (1.1), (2.1) ищется в интегральном виде

$$\begin{Bmatrix} v(x, \tau) \\ \vartheta(x, \tau) \\ H_q(x, \tau) \end{Bmatrix} = \int_0^\tau \sum_{k=1}^2 \begin{Bmatrix} G_{1k}(x, \tau-t) \\ G_{2k}(x, \tau-t) \\ G_{q+2,k}(x, \tau-t) \end{Bmatrix} f_k(t) dt + \int_0^1 \int_0^\tau \begin{Bmatrix} G_{13}(x, \xi, \tau-t) \\ G_{23}(x, \xi, \tau-t) \\ G_{q+2,3}(x, \xi, \tau-t) \end{Bmatrix} f_3(\xi, t) dt d\xi, \tag{2.2}$$

где G_{mk} – функции Грина, которые являются решениями следующих задач

$$\begin{aligned}
\ddot{G}_{1k}'' - a \ddot{G}_{1k} &= G_{1k}^{IV} + b_1 G_{2k}'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k}'' + \delta_{3k} \delta(x-\xi) \delta(\tau), \\
\sum_{r=0}^M \frac{(\tau_0)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} \left(\dot{G}_{2k} - B_1 \dot{G}_{1k} + \sum_{q=1}^N v^{(q)} \dot{G}_{q+2,k} \right) &= \kappa_1 G_{2k}'', \\
\sum_{l=0}^K \frac{(\tau_q)^l}{l!} \frac{\partial^l \dot{G}_{q+2,k}}{\partial \tau^l} &= D_1^{(q)} G_{q+2,k}'' + \Lambda_{11}^{(q)} G_{1k}^{IV} - M_1^{(q)} G_{2k}'';
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
G_{1k}|_{x=0} = 0, \quad G_{q+2,k}|_{x_1=0} = 0, \quad G_{2k}|_{x_1=0} = 0, \quad G'_{1k}|_{x_1=1} = \delta_{2k} \delta(\tau), \quad \kappa_1 G'_{2k}|_{x_1=1} = 0, \\
\left(G_{1k}'' + b_1 G_{2k} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k} \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), \quad \left(G_{1k}''' + b_1 G_{2k}' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k}' - \ddot{G}'_{1k} \right) \Big|_{x=1} = 0, \\
\left(D_1^{(q)} G'_{q+2,k} + \Lambda_{11}^{(q)} G_{1k}''' - M_1^{(q)} G'_{2k} \right) \Big|_{x_1=1} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Решение задачи (2.3), (2.4) ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье. Для этого домножаем каждое уравнений на $\sin \lambda_n x$,

$\lambda_n = \pi(n-1/2)$ и интегрируем по промежутку $[0,1]$ с учетом граничных условий (2.4).

Получаем

$$\begin{aligned} k_{1n}(s)G_{1kn}^L(\xi, s) - b_1\lambda_n^2 G_{2kn}^L(\xi, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2, kn}^L(\xi, s) &= F_{1kn}(\xi, s), \\ B_1\lambda_n^2 k_0(s)G_{1kn}^L(\xi, s) + k_{2n}(s)G_{2kn}^L(\xi, s) + k_0(s) \sum_{j=1}^N \nu^{(j)} G_{j+2, kn}^L(\xi, s) &= F_{2kn}(s), \\ -\Lambda_{11}^{(q)}\lambda_n^4 G_{1kn}^L(\xi, s) - M_1^{(q)}\lambda_n^2 G_{2kn}^L(\xi, s) + k_{q+2, n}(s)G_{q+2, kn}^L(\xi, s) &= F_{q+2, kn}(s). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{1n}(s) &= (\lambda_n^2 + a)s^2 + \lambda_n^4, \quad k_{2n}(s) = k_0(s) + \kappa_1\lambda_n^2, \\ k_0(s) &= \sum_{r=0}^K \frac{s^{r+1}(\tau_0)^r}{r!}, \quad k_{q+2, n}(s) = \sum_{l=0}^M \frac{s^{l+1}(\tau_q)^l}{l!} + D_1^{(q)}\lambda_n^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1kn}(\xi, s) &= -2\lambda_n \delta_{1k} + 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 \delta_{2k} - 2\delta_{k3} \sin \lambda_n \xi, \\ F_{2kn}(s) &= 2(-1)^{n+1} B_1 k_0(s) \delta_{2k}, \quad F_{q+2, kn}(s) = 2\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n \delta_{1k} - 2(-1)^{n+1} \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^2 \delta_{2k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{mk}^L(x, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{mkn}^L(\xi, s) \sin \lambda_n x, \\ G_{mkn}^L(\xi, s) &= 2 \int_0^1 G_{mk}^L(x, \xi, s) \sin \lambda_n x dx \quad \lambda_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} G_{ikn}^L(s) &= \frac{P_{ikn}(s)}{P_n(s)}, \quad G_{i3n}^L(\xi, s) = \frac{P_{i3n}(s)}{P_n(s)} \sin \lambda_n \xi, \quad G_{q+2, 3n}^L(\xi, s) = \frac{P_{q+2, 3n}(s)}{Q_{qn}(s)} \sin \lambda_n \xi, \\ G_{q+2, kn}^L(s) &= \frac{2\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n \delta_{1k} - 2\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^2 (-1)^{n+1} \delta_{2k} + \frac{P_{q+2, kn}(s)}{Q_{qn}(s)}}{k_{q+2, n}(s)} \quad (i, k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $P_n(s)$, $P_{mkn}(s)$, $Q_{qn}(s)$ – многочлены, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \left[k_{1n}(s)k_{2n}(s) + B_1 b_1 \lambda_n^4 k_0(s) \right] \Pi_n(s) + \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^N C_{1n}^{(j)}(s) M_1^{(j)} \Pi_{jn}(s) - \\ &- \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N C_{2n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) - \lambda_n^8 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \nu^{(i)} \alpha_1^{(j)} M^{(ij)} \Pi_{ijn}(s), \end{aligned}$$

$$Q_{qn}(s) = k_{q+2,n}(s)P_n(s),$$

$$P_{11n}(s) = -2\lambda_n S_{11n}(s) + 2\lambda_n^3 \sum_{j=1}^N C_{2n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) - 2\lambda_n^5 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_1^{(i)} S^{(ij)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$P_{12n}(s) = 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 S_{11n}(s) + 2(-1)^{n+1} B_1 \lambda_n^2 k_0(s) S_{12n}(s) - \\ - 2(-1)^{n+1} \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N C_{2n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) + 2(-1)^{n+1} \lambda_n^6 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_1^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$P_{21n}(s) = 2\lambda_n^3 k_0(s) S_{21n}(s) - 2\lambda_n k_0(s) \sum_{j=1}^N C_{1n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) + \\ + 2\lambda_n^7 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_{11}^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$P_{22n}(s) = -2(-1)^{n+1} \lambda_n^4 k_0(s) S_{21n}(s) + 2(-1)^{n+1} B_1 S_{22n}(s) k_0(s) + \\ + 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^N C_{1n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) - 2(-1)^{n+1} \lambda_n^8 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_{11}^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$P_{13n}(s) = -2S_{11n}(s), \quad P_{23n}(s) = 2\lambda_n^2 k_0(s) S_{21n}(s), \quad P_{1,q+3,n}(s) = 0, \quad P_{2,q+3,n}(s) = 0, \\ P_{q+2,kn}(s) = \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^4 P_{1kn}(s) + M_1^{(q)} \lambda_n^2 P_{2kn}(s),$$

$$\Pi_n(s) = \prod_{j=1}^N k_{j+2,n}(s), \quad \Pi_{qn}(s) = \prod_{j=1, j \neq q}^N k_{j+2,n}(s), \quad \Pi_{pqn}(s) = \prod_{j=1, j \neq p, q}^N k_{j+2,n}(s),$$

$$M^{(ij)} = M_1^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} - \Lambda_{11}^{(i)} M_1^{(j)}, \quad S^{(ij)} = \alpha_1^{(j)} \nu^{(j)} - \alpha_1^{(i)} \nu^{(i)},$$

$$C_{1n}^{(j)}(s) = k_{1n}(s) \nu^{(j)} + \lambda_n^4 B_1 \alpha_1^{(j)}, \quad C_{2n}^{(j)}(s) = k_{2n}(s) \alpha_1^{(j)} - b_1 k_0(s) \nu^{(j)},$$

$$S_{11n}(s) = k_{2n}(s) \Pi_n(s) + \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^N \nu^{(j)} M_1^{(j)} \Pi_{jn}(s),$$

$$S_{12n}(s) = b_1 \Pi_n(s) + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} M_1^{(j)} \Pi_{jn}(s),$$

$$S_{21n}(s) = B_1 \Pi_n(s) + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \nu^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s),$$

$$S_{22n}(s) = k_{1n}(s) \Pi_n(s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s).$$

Оригиналы функций (2.6) находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [27]

$$\begin{aligned}
G_{ikn}(\tau) &= \sum_{j=1}^{\Sigma} A_{1kn}^{(j)} e^{s_{jn}\tau}, \quad G_{i3n}(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\Sigma} A_{i3n}^{(j)} e^{s_{jn}\tau} \sin \lambda_n \xi, \\
A_{ikn}^{(j)} &= \frac{P_{ikn}(s_{jn})}{P_n'(s_{jn})}, \quad A_{q+2, kn}^{(l)} = \frac{P_{q+2, kn}(s_{ln})}{Q_{qn}'(s_{ln})}, \quad \Sigma = (K+1)N + M + 3, \\
G_{q+2, kn}(\tau) &= 2\Lambda_{11}^{(q)} \left(\lambda_n \delta_{1k} - (-1)^{n+1} \lambda_n^2 \delta_{2k} \right) \sum_{r=1}^{K+1} \frac{e^{\xi_{rn}\tau}}{k'_{q+2, n}(\xi_{rn})} + \sum_{j=1}^{\Sigma+K+1} A_{q+2, kn}^{(j)} e^{s_{jn}\tau}, \\
G_{q+2, 3n}(\xi, \tau) &= \sum_{j=1}^{\Sigma+K+1} A_{q+2, 3n}^{(j)} e^{s_{jn}\tau} \sin \lambda_n \xi,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где s_{jn} ($j = \overline{1, \Sigma}$) – нули многочлена $P_n(s)$, ξ_{rn} – дополнительные нули многочлена $Q_{qn}(s)$.

3. Решение основной задачи методом эквивалентных граничных условий

Следующий этап решения заключается в построении соотношений, связывающих правые части граничных условий исходной и вспомогательной задач. Для этого решения (2.2) подставляются в граничные условия (1.2). В результате приходим к следующей системе интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^{\tau} a_{ij}(\tau-t) f_j(t) dt = \varphi_i(\tau), \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11}(\tau) &= G'_{11}(0, \tau), \quad a_{21}(\tau) = G''_{11}(1, \tau) + b_1 G_{21}(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2, 1}(1, \tau), \\
a_{12}(\tau) &= G'_{12}(0, \tau), \quad a_{22}(\tau) = G''_{12}(1, \tau) + b_1 G_{22}(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2, 2}(1, \tau), \\
\varphi_1(\tau) &= - \int_0^1 \int_0^{\tau} G'_{13}(0, \xi, \tau-t) f_3(\xi, t) dt d\xi, \\
\varphi_2(\tau) &= - \int_0^1 \int_0^{\tau} \left[G''_{13}(1, \xi, \tau-t) + b_1 G_{23}(1, \xi, \tau-t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1, 3}(1, \xi, \tau-t) \right] f_3(\xi, t) dt d\xi.
\end{aligned}$$

Пуѐм интегрирования по частям система (3.1) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^{\tau} A_{ij}(\tau-t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} dt = \varphi_i(\tau), \quad A_{ij}(\tau) = \int_0^{\tau} a_{ij}(t) dt \quad (3.2)$$

и далее решается численно с помощью квадратурных формул [23]. Для этого область интегрирования $[0, \tau]$ разбивается на N_t отрезков точками $t_m = mh_t$ ($m = \overline{0, N_t}$) с равномерным шагом $h_t = \tau/N_t$ и вводятся сеточные функции $y_m^j = \partial f_j(t_m)/\partial \tau$, $A_m^{ij} = A_{ij}(t_m)$. Интегралы аппроксимируются с помощью формул правых прямоугольников:

$$\int_0^{\tau} A_{ij}(\tau-t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} dt \approx h_t S_{m-1}^{ij} + h_t A_1^{ij} y_m^j, \quad S_{m-1}^{ij} = \sum_{l=1}^{m-1} A_{m-l+1}^{ij} y_l^j \quad (i, j = \overline{1, N+2}).$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ($m \geq 1$):

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_m = \mathbf{b}_m, \quad \mathbf{A} = (A_1^{ij})_{2 \times 2}, \quad \mathbf{b}_m = (b_m^i)_{2 \times 1}, \quad b_m^i = \frac{F_i(t_m)}{h_t} - \sum_{j=1}^2 S_{m-1}^{ij}, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{y}_m = (y_m^i)_{4 \times 4}$ – столбец неизвестных.

Решение системы (3.3) находится по правилу Крамера и имеет следующий вид

$$y_m^1 = \frac{b_m^1 A_1^{22} - b_m^2 A_1^{12}}{A_1^{11} A_1^{22} - A_1^{12} A_1^{21}}, \quad y_m^2 = \frac{b_m^2 A_1^{11} - b_m^1 A_1^{21}}{A_1^{11} A_1^{22} - A_1^{12} A_1^{21}}. \quad (3.4)$$

Полученные таким образом функции $\partial f_1 / \partial \tau$ и $\partial f_2 / \partial \tau$ подставляются в свертки (2.2), которые также вычисляются численно. В результате, получаем решение исходной задачи (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned}
v(x, t_i) &= h_i \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^i \tilde{G}_{1l}(x, t_{i-j+1}) y_j^l + \int_0^1 \int_0^{t_i} G_{13}(x, \xi, t_i - t) f_3(\xi, t) dt d\xi, \\
\vartheta(x, t_i) &= h_i \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^i \tilde{G}_{2l}(x, t_{i-j+1}) y_j^l + \int_0^1 \int_0^{t_i} G_{23}(x, \xi, t_i - t) f_3(\xi, t) dt d\xi, \\
\eta_q(x, t_i) &= h_i \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^i \tilde{G}_{q+2,l}(x, t_{i-j+1}) y_j^l + \int_0^1 \int_0^{t_i} G_{q+2,3}(x, \xi, t_i - t) f_3(\xi, t) dt d\xi, \\
\tilde{G}_{mkl}(x, \tau) &= \int_0^\tau G_{mkl}(x, t) dt.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Предельные переходы к классическим моделям для балки Бернулли-Эйлера. Исследование статического нагружения

Рассмотрим различные частные случаи общей модели (1.1), (1.2).

1) *Классическая модель упругих колебаний балки Бернулли-Эйлера.* Положим в (2.7)–(2.9) $\alpha_1^{(q)} = 0$ и $b_1 = 0$. Тогда из соотношений (2.7) получаем функции Грина $G_i^{(el)}(x, \tau)$ упругой задачи [24]

$$\begin{aligned}
G_1^{(el)}(x, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2 + a)\gamma(\lambda_n)} \sin \lambda_n x, \quad \gamma(\lambda_n) = \frac{\lambda_n^2}{\sqrt{\lambda_n^2 + a}}, \\
G_2^{(el)}(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda_n^2 \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2 + a)\gamma(\lambda_n)} \sin \lambda_n x, \\
G_3^{(el)}(x, \xi, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2 + a)\gamma(\lambda_n)} \sin \lambda_n x \sin \lambda_n \xi.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

2) *Статический изгиб.* Полагая в граничных условиях (2.1)

$$f_k(\tau) = \tilde{f}_k H(\tau), \quad f_3(\xi, \tau) = \tilde{f}_3(\xi) H(\tau),$$

и переходя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$ получаем решение задачи об изгибе консольно-закрепленной балки под действием статической нагрузки, приложенной к свободному концу. Здесь $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Функции Грина статической задачи $G_{mk}^{(st)}(x)$ выражаются через функции Грина $G_{mk}(x, \tau)$ динамической задачи с помощью соотношений [24, 27]

$$G_{mk}^{(st)}(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [G_{mk}(x, \tau) * H(\tau)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s G_{mk}^L(x, s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G_{mk}^L(x, s). \quad (4.2)$$

Преобразуя свертки (2.2) с помощью (4.2), получаем решение статической задачи

$$\begin{aligned} v^{(st)}(x) &= G_{11}^{(st)}(x) \tilde{f}_1 + G_{12}^{(st)}(x) \tilde{f}_2 + \int_0^1 G_{13}^{(st)}(x, \xi) \tilde{f}_3(\xi) d\xi, \\ \vartheta^{(st)}(x) &= G_{21}^{(st)}(x) \tilde{f}_1 + G_{22}^{(st)}(x) \tilde{f}_2 + \int_0^1 G_{23}^{(st)}(x, \xi) \tilde{f}_3(\xi) d\xi, \\ H_q^{(st)}(x) &= G_{q+2,1}^{(st)}(x) \tilde{f}_1 + G_{q+2,2}^{(st)}(x) \tilde{f}_2 + \int_0^1 G_{q+2,3}^{(st)}(x, \xi) \tilde{f}_3(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Вычисляя указанный предел, получаем следующие выражения для функций $G_{mk}^{(st)}(x, \xi)$ ($k = \overline{1, N+2}$, $m = \overline{1, N+3}$)

$$\begin{aligned} G_{11}^{(st)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{11n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n^3}, \\ G_{12}^{(st)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{12n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x, \\ G_{13}^{(st)}(x, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{13n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x \sin \lambda_n \xi = -2 \Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n x \sin \lambda_n \xi, \\ G_{q+2,3}^{(st)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{q+2,3n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x = -2 \Lambda_{11}^{(q)} \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Остальные функции равны нулю. Здесь введены следующие обозначения

$$\Phi = \frac{\prod_{j=1}^N D_1^{(j)}}{\prod_{j=1}^N D_1^{(j)} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \prod_{r=1, r \neq j}^N D_1^{(r)}}, \quad \Phi_q = \frac{\prod_{r=1, r \neq q}^N D_1^{(r)}}{\prod_{j=1}^N D_1^{(j)} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \prod_{r=1, r \neq j}^N D_1^{(r)}}. \quad (4.5)$$

При этом, очевидно, что

$$\Phi - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Phi_j = 1. \quad (4.6)$$

С учетом предельного перехода (4.2), система уравнений (3.1) запишется так:

$$\sum_{j=1}^2 \tilde{a}_{ij} \tilde{f}_j = \tilde{\Phi}_i, \quad (4.7)$$

где с учетом формул (4.4) – (4.6)

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= G_{11}^{(st)'}(0), \quad \tilde{a}_{12} = G_{12}^{(st)'}(0), \\ \tilde{a}_{21} &= G_{11}^{(st)''}(1) + b_1 G_{21}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,1}^{(st)}(1), \\ \tilde{a}_{22} &= G_{12}^{(st)''}(1) + b_1 G_{22}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,2}^{(st)}(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= - \int_0^1 G_{13}^{(st)'}(0, \xi) \tilde{f}_3(\xi) d\xi, \\ \tilde{\Phi}_2 &= - \int_0^1 \left[G_{13}^{(st)''}(1, \xi) + b_1 G_{23}^{(st)}(1, \xi) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,3}^{(st)}(1, \xi) \right] \tilde{f}_3(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

Решение системы (4.7) находится по формулам (3.4). При этом используются следующие соответствия:

$$y_{m-1/2}^i \leftrightarrow \tilde{f}_j^*, \quad A_{1/2}^{ij} \leftrightarrow \tilde{a}_{ij}, \quad b_{m-1/2}^i \leftrightarrow \tilde{\Phi}_i.$$

5. Пример расчета

В качестве расчетного примера рассматривается задача для шарнирно опертого трехкомпонентного дюралюминиевого стержня (компоненты цинк и медь диффундируют в алюминии), характеризующегося следующими физическими параметрами [28]:

$$C_{1122} = 6.93 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, C_{1212} = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}, T_0 = 700 K, \rho = 2700 \frac{кг}{M^3}, c_0 = 920 \frac{Дж}{кг \cdot K},$$

$$\alpha_{11}^{(1)} = 1.55 \cdot 10^7 \frac{Дж}{кг}, \alpha_{11}^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \frac{Дж}{кг}, D_{11}^{(1)} = 2.62 \cdot 10^{-12} \frac{M^2}{с}, D_{11}^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-14} \frac{M^2}{с},$$

$$b_{11} = 4,94 \cdot 10^6 \frac{H}{K \cdot M^2}, \kappa_{11} = 134 \frac{Вт}{M \cdot K}, m^{(1)} = 0.065 \frac{кг}{моль}, m^{(2)} = 0.064 \frac{кг}{моль},$$

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{1122} + 2C_{1212}, n_0^{(1)} = 0.0084, n_0^{(2)} = 0.045.$$

Стержень имеет прямоугольное сечение: $h \times b = 0.05l \times 0.05l$: длина $l = 0.01$ м.

Будем считать, что распределённый погонный момент $m(x, \tau)$ отсутствует.

Поперечную распределённую нагрузку, действующую на стержень зададим в виде

$$q(x, \tau) = 2J_3 \sin \frac{\pi x}{2} H(\tau).$$

Тогда

$$f_3(x, \tau) = \frac{q(x, \tau) + m'(x, \tau)}{J_3} = 2 \sin \frac{\pi x}{2} H(\tau).$$

Решая систему (3.2) и подставляя найденные оттуда по формулам (3.4) функции в свертки (3.5), получаем результаты, изображенные на рисунках 2-6. Здесь одна единица безразмерного времени соответствует $1,6 \cdot 10^{-6}$ секундам. Для обеспечения приемлемой точности при численном решении интегральных уравнений использовалось $N_\tau = 40$ точек разбиения и 40 членов ряда Фурье для вычисления функций Грина.

На рисунке 2 показаны графики прогибов балки с учетом тепломассопереноса в различные моменты времени. Жирной линией отмечен прогиб, соответствующий статическому нагружению. При этом тепломассоперенос практически не влияет на механическое поле, т.е. прогибы для упругой балки имеют точно такой же вид.

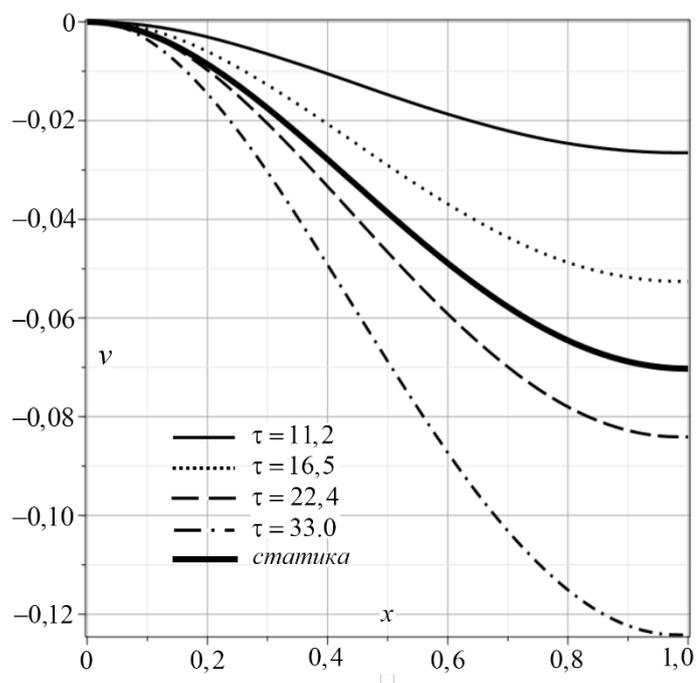


Рис. 2. Прогибы балки.

Однако нестационарный изгиб порождает тепловые и диффузионные поля. На рисунке 3 показана начальная стадия распространения температурной волны. Развитие процесса теплопереноса представлено на рисунке 4.

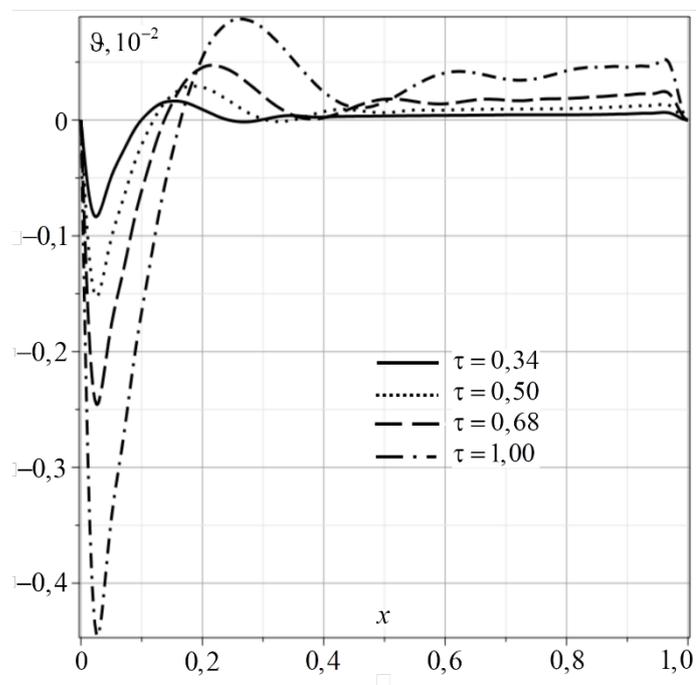


Рис. 3. Плотность приращения температуры (начальная стадия)

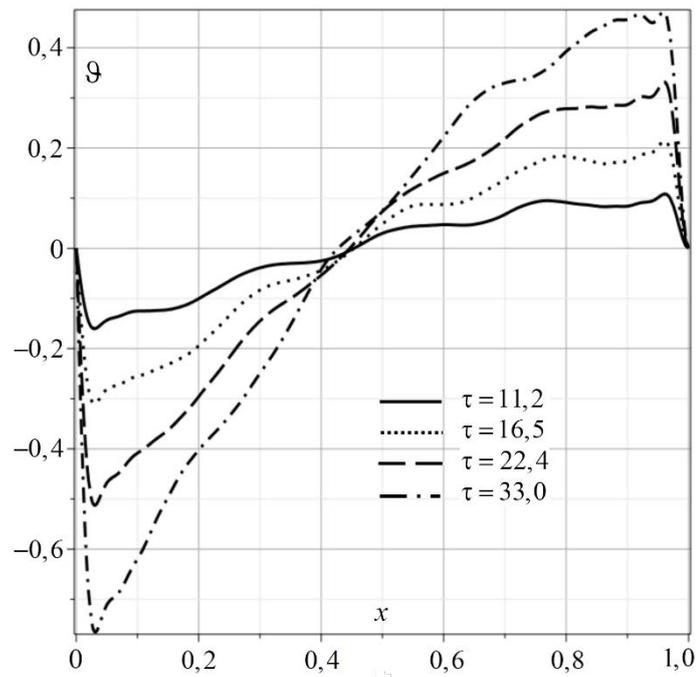


Рис. 4. Плотность приращения температуры (развитие процесса)

Приращения концентраций цинка и меди показаны на рисунках 5 и 6. Жирной линией отмечены диффузионные поля, соответствующие статическому нагружению.

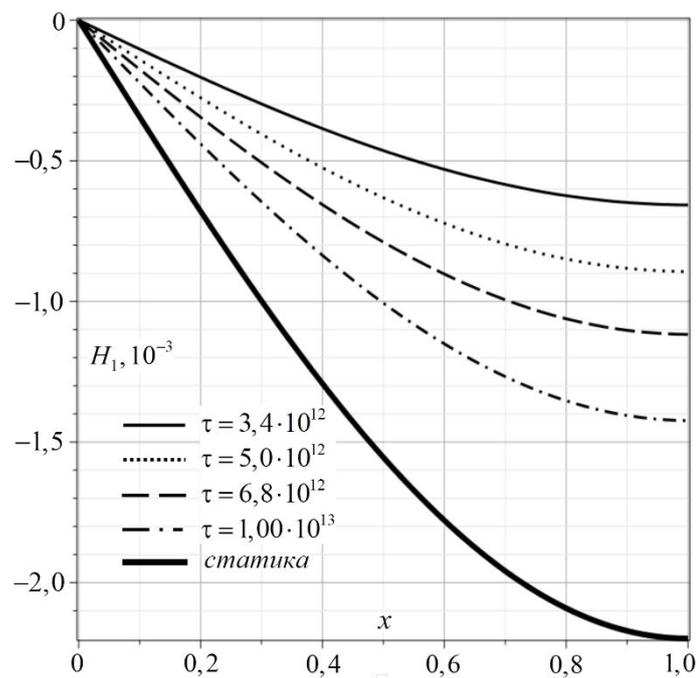


Рис. 5. Плотность приращения концентрации цинка

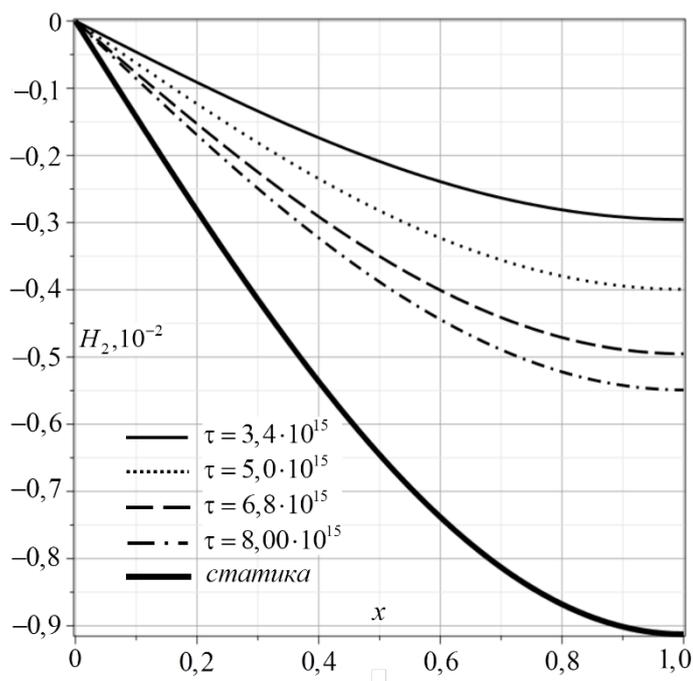


Рис. 6. Плотность приращения концентрации меди.

По графикам видно, что влияние механического поля на теплоперенос проявляется более существенно, чем на диффузионные процессы. При заданной нагрузке максимальная плотность приращения температуры материала составляет более 75% (рис. 4). Переходя к размерным величинам, с учетом заданных размеров балки, получаем, что приращение температуры на поверхности балки $x_2^* = h/2$ равно:

$$T - T_0 = \theta T_0 = x_2^* \vartheta T_0 = \frac{x_2^*}{l} \vartheta T_0 = \frac{h}{2l} \vartheta T_0 = \frac{0,05}{2} \cdot 0,75 \cdot 700 \text{ K} \approx 13,1 \text{ K}.$$

При этом изменение плотности концентрации веществ (цинк и медь) даже на очень значительном промежутке времени не превосходит 1% по отношению к начальным плотностям концентраций (рис. 6), что при переходе к размерным величинам даёт пренебрежимо малое значение. Это, в свою очередь, подтверждается экспериментальными исследованиями [29], согласно которым влияние механических нагрузок на диффузионное поле очень слабо проявляется при упругих деформациях.

То же самое можно сказать и о влиянии упругих деформаций на температурное поле. В результате, температурное и диффузионное поля, порожденные нестационарным изгибом балки, уже практически не влияют на механическое поле.

Выводы

Предложен алгоритм решения задачи о нестационарном изгибе консольно-закрепленной ортотропной балки Бернулли-Эйлера с учетом тепломассопереноса, основанный на использовании преобразования Лапласа, разложений в тригонометрические ряды Фурье и метода эквивалентных граничных условий.

На примере изгиба балки под действием распределенной механической нагрузки продемонстрирован эффект взаимодействия механических, температурных и диффузионных полей. Показано, что нестационарный изгиб инициирует процесс тепломассопереноса. Однако в силу своей малой величины температурное и диффузионное поле практически не оказывает никакого влияния на прогибы балки. При этом статический изгиб влияет только на процесс массопереноса и не вызывает температурных изменений внутри балки.

Результаты расчетов согласуются с результатами, полученными авторами в предыдущей работе [24]. Следует также отметить, что на качественном уровне полученные результаты согласуются с выводами экспериментальных исследований [29], которые свидетельствуют о том, что взаимодействие механических и диффузионных полей становится существенным только при пластических деформациях, тогда как в режиме упругих деформаций оно остается пренебрежимо малым.

Список источников

1. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
2. Князева А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов. – Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. – 172 с.
3. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR). 2014. V. 2, No. 5. P. 151-159.
4. Aouadi M., Copetti M.I.M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 2015. P. 1-24. DOI: [10.1002/zamm.201400285](https://doi.org/10.1002/zamm.201400285)
5. Aouadi M., Copetti M.I.M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia // Applied Numerical Mathematics. 2018. V. 126, P. 113-137. DOI: [10.1016/j.apnum.2017.12.007](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.12.007)
6. Aouadi M., Copetti M.I.M. Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound // Mathematics and Computers in Simulation. 2021. V. 187, P. 586-613. DOI: [10.1016/j.matcom.2021.03.026](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.026)
7. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin’s model // Asymptotic Analysis. 2015. V. 95, P. 129-160. DOI: [10.3233/ASY-151330](https://doi.org/10.3233/ASY-151330)

8. Copetti M.I.M., Aouadi M. A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // Applied Numerical Mathematics. 2016. V. 109, P. 157-183. DOI: [10.1016/j.apnum.2016.06.011](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.011)
9. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects // Composite Structures. 2021. V. 270, P. 114104. DOI: [10.1016/j.compstruct.2021.114104](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114104)
10. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of Nanoscale Beam due to Various Sources in Modified Couple Stress Thermoelastic Diffusion with Phase Lags // Mechanics and Mechanical Engineering. 2019. V. 23, P. 36–49. DOI: [10.2478/mme-2019-0006](https://doi.org/10.2478/mme-2019-0006)
11. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory // Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V. 36, No. 5. P. 619-632. DOI: [10.1007/s10483-015-1930-7](https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7)
12. Aouadi M., Miranville A. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // Evolution equations and control theory. 2015. V. 4, No. 3. P. 241-263. DOI: [10.3934/eect.2015.4.241](https://doi.org/10.3934/eect.2015.4.241)
13. Хоа В.Д., Зверьев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462>
14. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate // Coupled Systems Mechanics. 2019. V. 8, No. 1. P. 39-53. DOI: [10.12989/csm.2019.8.1.039](https://doi.org/10.12989/csm.2019.8.1.039)
15. Nachtrieb N.H., Handler G.S. A relaxed vacancy model for diffusion in crystalline metals // Acta Metall. 1954. V. 2, No. 6. P. 797–802.

16. Petit J., Nachtrieb N.H. Self-diffusion in liquid gallium // Journal Chemical Physics. 1956. V. 24, P. 1027. DOI: [10.1063/1.1742671](https://doi.org/10.1063/1.1742671)
17. Миколайчук М.А., Князева А.Г., Грабовецкая Г.П., Мишин И.П. Изучение влияния механических напряжений на диффузию в пластине с покрытием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета (ПНИПУ). 2012. № 3. С. 120–134.
18. До Нгок Дат, Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (простейшая модель) // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183451>
19. Боршевецкий С.А. Методика определения расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины Кирхгофа при произвольном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179681>
20. Левицкий Д.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное напряженно-деформированное состояние пластины Тимошенко // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
21. Земсков А.В., Хао Ле Ван. Нестационарные термоупругодиффузионные колебания балки Бернулли – Эйлера под действием распределенной поперечной нагрузки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 3. С. 75–85. DOI: [10.15593/perm.mech/2023.3.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.07)
22. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V. Unsteady elastic-diffusion vibrations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed

- transverse load action // Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. 2021. V. 141, P. 487-499. DOI: [10.1007/978-3-030-54928-2_36](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_36)
23. Zemskov A.V., Le Van Hao, Tarlakovskii D.V. Bernoulli-Euler Beam Unsteady Bending Model with Consideration of Heat and Mass Transfer // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2023. V. 9, No. 1. P. 168-180. DOI: [10.22055/jacm.2022.40752.3649](https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40752.3649)
24. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Faykin G.M. Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli–Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 2022. DOI: [10.1002/zamm.202100107](https://doi.org/10.1002/zamm.202100107)
25. Вольфсон Е.Ф. Эффект Горского (к 80-летию выдающегося открытия В.С. Горского) // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2016. Т. 59, № 5. С. 357-359.
26. Кукушкин С.А., Осипов А.В. Эффект Горского при синтезе пленок карбида кремния из кремния методом топохимического замещения атомов // Письма в Журнал Технической Физики. 2017. Т. 43, С. 81-88.
27. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. - М.: Высшая школа, 1965. – 586 с.
28. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. Физические величины: Справочник / Под общей редакцией Григорьева И.С., Мелихова И.З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

29. Nirano K., Cohen M., Averbach V., Ujiye N. Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow // Transactions of the Metallurgical Society AIME. 1963. V. 227, P. 950.

References

1. Eremeev V.S.. *Diffuziya i napryazheniya* (Diffusion and stresses). Moscow: Energoatomizdat Publ., 1984. 182 p.
2. Knyazeva A.G. *Vvedenie v termodinamiku neobratimyykh protsessov* (Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes). Tomsk: Izd-vo «Ivan Fedorov» Publ., 2014. 172 p.
3. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell. *International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR)*. 2014. V. 2, No. 5. P. 151-159.
4. Aouadi M., Copetti M.I.M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2015. P. 1-24. DOI: [10.1002/zamm.201400285](https://doi.org/10.1002/zamm.201400285)
5. Aouadi M., Copetti M.I.M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia. *Applied Numerical Mathematics*. 2018. V. 126, P. 113-137. DOI: [10.1016/j.apnum.2017.12.007](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.12.007)
6. Aouadi M., Copetti M.I.M. Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound. *Mathematics and*

- Computers in Simulation*. 2021. V. 187, P. 586-613. DOI: [10.1016/j.matcom.2021.03.026](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.026)
7. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin’s model. *Asymptotic Analysis*. 2015. V. 95, P. 129-160. DOI: [10.3233/ASY-151330](https://doi.org/10.3233/ASY-151330)
 8. Copetti M.I.M., Aouadi M. A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory. *Applied Numerical Mathematics*. 2016. V. 109, P. 157-183. DOI: [10.1016/j.apnum.2016.06.011](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.011)
 9. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects. *Composite Structures*. 2021. V. 270, P. 114104. DOI: [10.1016/j.compstruct.2021.114104](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114104)
 10. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of Nanoscale Beam due to Various Sources in Modified Couple Stress Thermoelastic Diffusion with Phase Lags. *Mechanics and Mechanical Engineering*. 2019. V. 23, P. 36–49. DOI: [10.2478/mme-2019-0006](https://doi.org/10.2478/mme-2019-0006)
 11. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. V. 36, No. 5. P. 619-632. DOI: [10.1007/s10483-015-1930-7](https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7)
 12. Aouadi M., Miranville A. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory. *Evolution equations and control theory*. 2015. V. 4, No. 3. P. 241-263. DOI: [10.3934/eect.2015.4.241](https://doi.org/10.3934/eect.2015.4.241)
 13. Khoa V.D., Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Analytical solution for thermally stressed two-layer elastic strip. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.) URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178462>
 14. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick

- circular plate. *Coupled Systems Mechanics*. 2019. V. 8, No. 1. P. 39-53. DOI: [10.12989/csm.2019.8.1.039](https://doi.org/10.12989/csm.2019.8.1.039)
15. Nachtrieb N.H., Handler G.S. A relaxed vacancy model for diffusion in crystalline metals. *Acta Metall.* 1954. V. 2, No. 6. P. 797–802.
 16. Petit J., Nachtrieb N.H. Self-diffusion in liquid gallium. *Journal Chemical Physics*. 1956. V. 24, P. 1027. DOI: [10.1063/1.1742671](https://doi.org/10.1063/1.1742671)
 17. Mikolaichuk M.A., Knyazeva A.G., Grabovetskaya G.P., Mishin I.P. Research of the stress influence on the diffusion in the coating plate. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta (PNIPU)*. 2012. No. 3. P. 120–134. (In Russ.)
 18. Do Ngok Dat, Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Action of Transverse Non-Stationary Force on a Hinged Moment Elastic Rectangular Plate (Simplified Model). *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183451>
 19. Borshevetskii S.A. Method for determining the location of additional supports of a simply supported Kirchhoff plate under random action. *Trudy MAI*. 2024. No. 135. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179681>
 20. Levitskii D.YU., Fedotenkov G.V. Non-stationary stress-strain state of the Timoshenko plate. *Trudy MAI*. 2022. No. 125. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168157>. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
 21. Zemskov A.V., Hao Le Van. Unsteady thermoelastic diffusion vibrations of the Bernoulli-Euler beam under the action of a distributed transverse load. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2023. No. 3.

P. 75–85. (In Russ.). DOI: [10.15593/perm.mech/2023.3.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.07)

22. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V. Unsteady elastic-diffusion vibrations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action. *Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials*. 2021. V. 141, P. 487-499. DOI: [10.1007/978-3-030-54928-2_36](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_36)

23. Zemskov A.V., Le Van Hao, Tarlakovskii D.V. Bernoulli-Euler Beam Unsteady Bending Model with Consideration of Heat and Mass Transfer. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2023. V. 9, No. 1. P. 168-180. DOI: [10.22055/jacm.2022.40752.3649](https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40752.3649)

24. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Faykin G.M. Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli–Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2022. DOI: [10.1002/zamm.202100107](https://doi.org/10.1002/zamm.202100107)

25. Vol'fson E.F. The Gorsky Effect (on the 80th anniversary of the outstanding discovery of V.S. Gorsky). *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Chernaya metallurgiya*. 2016. V. 59, No. 5. P. 357-359. (In Russ.)

26. Kukushkin S.A., Osipov A.V. Gorsky effect in the synthesis of silicon carbide films from silicon by the method of topochemical substitution of atoms. *Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*. 2017. V. 43, P. 81-88. (In Russ.)

27. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (Handbook of Operational Calculus). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1965. 586 p.

28. Babichev A.P., Babushkina N.A., Bratkovskii A.M. ets. *Fizicheskie velichiny:*

Spravochnik / Pod obshchei redaktsiei Grigor'eva I.S., Melikhova I.Z. (Physical quantities: Handbook). Moscow: Energoatomizdat Publ., 1991. 1232 p.

29. Nirano K., Cohen M., Averbach V., Ujiye N. Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow. *Transactions of the Metallurgical Society AIME*. 1963. V. 227, P. 950.

Статья поступила в редакцию 11.01.2025

Одобрена после рецензирования 13.01.2025

Принята к публикации 25.02.2025

The article was submitted on 11.01.2025; approved after reviewing on 13.01.2025; accepted for publication on 25.02.2025