

Исследование влияния геометрических параметров цилиндрической оболочки под давлением зажатой между абсолютно жесткими пластинами на ширину зоны контакта

Аунг Чжо Тху, Бабайцев А.В.*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: Ar77eny@gmail.com*

Статья поступила 17.09.2020

Аннотация

В данной работе проводилось исследование влияния на ширину зону контакта изменения геометрических параметров цилиндрической оболочки эллиптического сечения под давлением зажатой между абсолютно жесткими пластинами. Исследование проводится путем аналитического моделирования метода в среде Wolfram Mathematica. В ходе аналитического моделирования была получена зависимость изменения ширины зоны контакта между оболочкой и жесткой преградой от действующего давления. Для полученного решения проводилось исследование влияния большой и малой полуосей, а также толщины оболочки на процесс изменения ширины зоны контакта в зависимости от действующего давления.

По результатам моделирования были получено, что увеличение малой полуоси влечет за собой уменьшение зоны контакта, а увеличение большой полуоси - увеличение ширины зоны контакта. Увеличение толщины оболочки уменьшает зону контакта оболочки с жесткой пластиной. Для изучения процесса скорости изменения

ширины зоны контакта были получены аналитические зависимости ширины зоны контакта от изменения геометрического параметра путем аппроксимации.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, жесткая поверхность, контактная зона, внутреннее давление, поперечная деформация.

1. Введение

Одним из самых распространенных типов современных и перспективных конструкций являются тонкостенные оболочки. Стремительно растет множество конструкций типа оболочек, которые находят применение в технике и строительстве. Для описания поведения оболочек при работе в тех или иных условиях существуют различные способы их классификаций [1-4].

К тонким оболочкам можно отнести такие элементы конструкций как резервуары, цистерны, газовые баллоны, корпуса аппаратов химических агрегатов и др. Тонкостенные оболочки цилиндрической или конической формы являются элементами планеров летательных аппаратов [5]. Некруговые цилиндрические оболочки используются в качестве конструкций современных пассажирских самолетов [6-7]. Тонкостенные оболочки, не являющиеся оболочками вращения, и имеющие плоскоовальную форму сечения используются в качестве теплообменников приемо-передающих модулей фазированных антенных решеток [8]. Цилиндрическая часть баллонов высокого давления, применяемых в ракетно-космической технике для хранения инертных газов, представляет собой цилиндрическую оболочку [9]. В

качестве емкостей или днищ емкостей достаточно широко используются эллипсоидальные оболочки [10,11]. Например, для сжижения углеводородных газов применяются баллоны цилиндрической формы с эллиптическими днищами.

В процессе эксплуатации оболочка подвергается воздействию со стороны соседних элементов конструкции. Также известно достаточно много работ, в которых аналитически решаются задачи деформации балок и пластин, контактирующих с жесткой поверхностью, однако исследование контакта между эллиптической цилиндрической оболочкой под давлением, нагружаемыми внутренним давлением, расположенным между жесткими плитами в них не проводилось. А при разработке систем охлаждения и прогнозирования контакта охлаждающих трубок с охлаждаемой поверхностью крайне важна знать влияние геометрического параметра оболочки на ширину зоны контакта, а так же влияние на скорость увеличения ширины при равномерном увеличении действующего внутреннего давления. [12-19]

2. Постановка задачи

Участок трехмерной модели эллиптической цилиндрической трубы плоскоовального сечения представлен на рисунке 1.

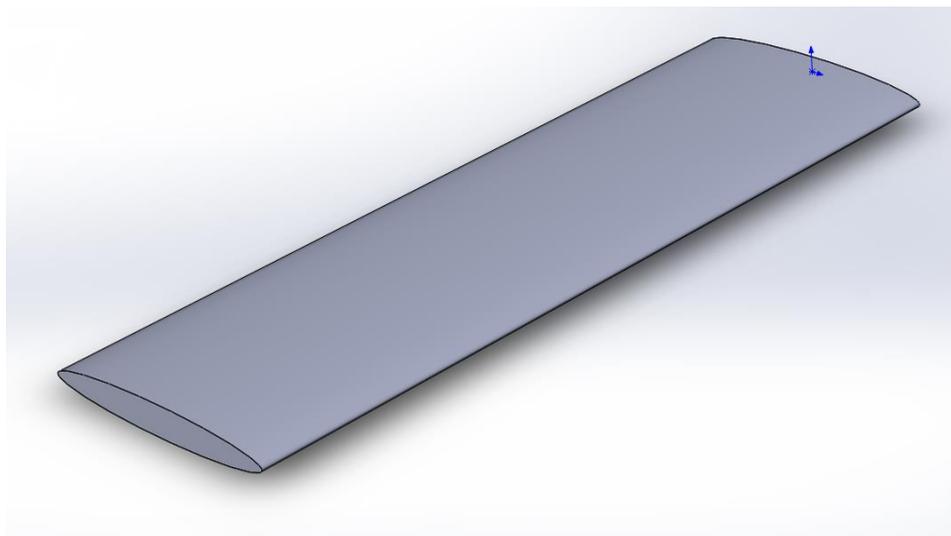


Рисунок 1. Участок трехмерной модели эллиптической цилиндрической трубы плоскоовального сечения

Геометрические параметры поперечного сечения оболочки, расположенной между двумя жесткими поверхностями минимальным с зазором w , представлены на рисунке 2. Габаритные размеры поперечного сечения эллиптической цилиндрической оболочки составляют $2b$ по вертикальной оси и $2a$ по горизонтальной оси. Ширину зоны контакта возникающей при воздействии давления внутри оболочки p обозначим $2l$.

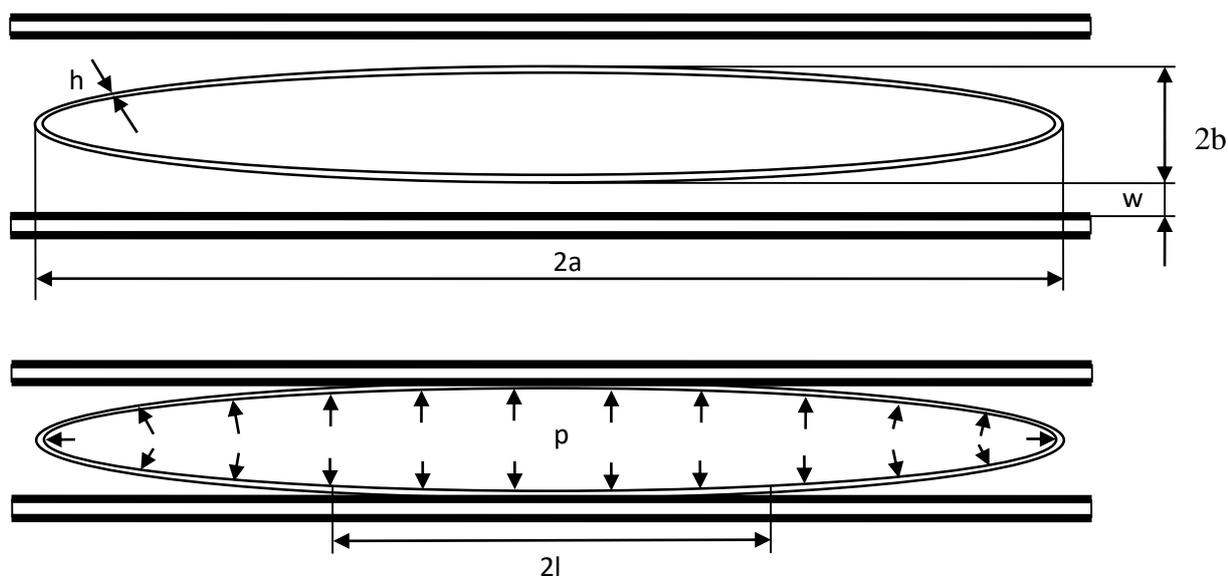


Рисунок 2. Поперечное сечение эллиптической цилиндрической оболочки

В аналитических расчетах предполагается, что оболочка нагружена постоянным внутренним давлением. Постоянное внутренне давление равно максимальному гидростатическому давлению, найденному из гидравлических расчетов. Оболочка находится в состоянии плоской деформации, то есть деформации в направлении ее образующих равны нулю. Трением в зоне контакта пренебрегаем и пренебрегаем наличием внутри оболочки жидкости, предполагая, что ее воздействие сводится только к давлению на стенки канала. Тогда задача определения зоны контакта эллиптической цилиндрической оболочки с плоской жесткой поверхностью сводится к решению задачи о деформациях балки-полоски. При этом модуль упругости в решении для балки заменяется на приведенный модуль упругости пластинки [20].

Рассматривается балка, являющаяся $\frac{1}{4}$ частью поперечного сечения эллиптической цилиндрической оболочки (Рисунок 3). Балку разделяется на две части – первая, длиной l , после воздействия распределенной нагрузки контактирует с жесткой плоской поверхностью, а вторая, длиной $a-l$, не касается поверхности.

Действие отброшенной нижней части сечения заменяется сосредоточенной силой F , приложенной в вертикальном направлении на свободном конце балки. Из условий симметрии задачи, запрещаем повороты сечения балки на свободном конце. Принимая, что в той части балки, которая прижата к поверхности, момент равен нулю. На левом конце балки задается условие отсутствия горизонтальных перемещений. Фактически, используется предположение о контакте балки с жесткой поверхностью без проскальзывания. Используем классическую теорию изгиба балок. Поэтому неизвестная длина части балки, контактирующая с жесткой плоской поверхностью после воздействия распределенной нагрузки, должна определяться из условия равенства нулю изгибающего момента на границе зоны контакта в точке $x = l$ с координатами $X(t_1) = a \cos(t_1)$, $Y(t_1) = b \cos(t_1)$, где t_1 – угловое положение искомой точки, определяющееся по формуле:

$$t_1 = \text{Arccos}(l/a) \quad (1)$$

При этом на границе зоны контакта возникает вертикальная реакция со стороны жесткой поверхности.

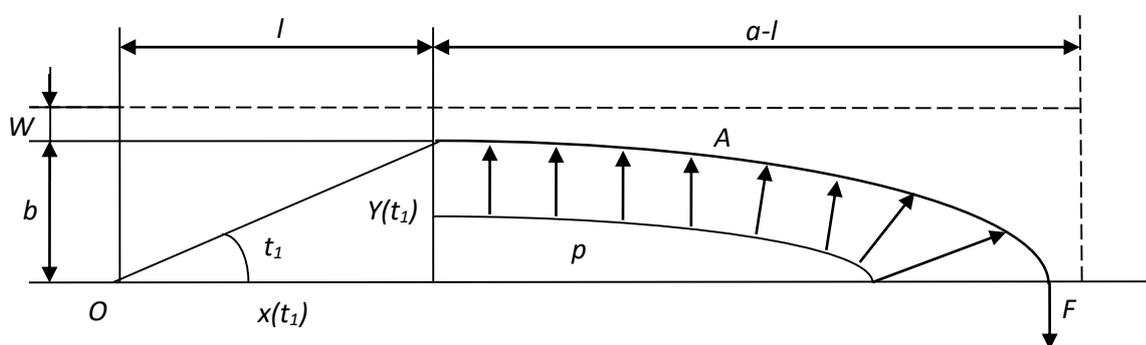


Рисунок 3. К решению задачи о деформации поперечного сечения эллиптической цилиндрической оболочки

Рассматриваемая балка нагружается, в том числе, и растягивающими усилиями, вследствие проекции от результирующего давления в закругленной части контура. Однако, деформациями, связанными с таким нагружением, при оценке ширины зоны контакта будем пренебрегать. Положение каждой точки, расположенной на поверхности оболочки, определяется по формулам $X(t) = a \cos(t)$, $Y(t) = b \cos(t)$, где t – угловое положение точки. Величина вертикального смещения δ_F участка балки не контактирующего с плоской жесткой поверхностью находится по формуле:

$$\delta_F = w + b - Y(t_1) \quad (2)$$

Решается вспомогательная задача о контакте балки – для участка балки, не касающегося поверхности (Рисунок 3). Предположение о консольной заделке соответствует, в том числе, условию контакта «без проскальзывания» между балкой и поверхностью. Задачу решаем аналитически, считая, что длина балки задана и равна a . Из полученного решения найдем значение силы F , выраженное через величину смещения w . Далее записывается выражение для изгибающего момента в точке $x = l$ с координатами $X(t_1) = a \cos(t_1)$, $Y(t_1) = b \cos(t_1)$, и приравняв изгибающий момент нулю определяется длина балки l , являющейся шириной зоны контакта.

Рассматриваемая балка (Рисунок 4) является один раз статически неопределимой. На левом конце этой части балки ($x = l$) заданы две реакции в горизонтальном F_{x0} и вертикальном F_{y0} направлениях и момент M_0 . На правом

конце балки действует момент M_1 , обеспечивающий отсутствие углов поворота.

На всем участке балки действует распределенная нагрузка p .

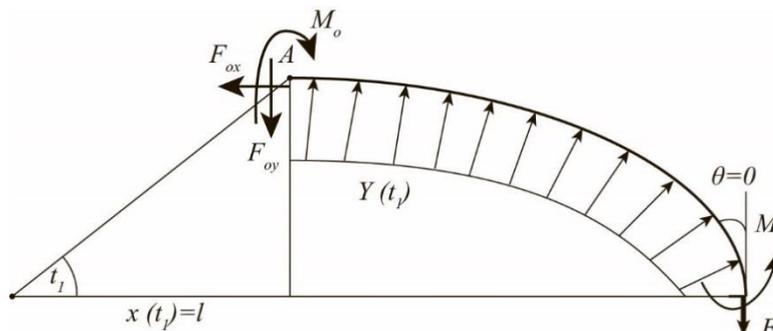


Рисунок 4. Нагрузки, действующие на балку

Записываются уравнения равновесия проекций действующих сил на горизонтальную и вертикальную оси, а также уравнения равновесия для изгибающих моментов.

В получаемых выражениях вклад в изгибающий момент от распределенной нагрузки, приложенной на скругленной части сечения, учитывались выражения для проекций результирующей этого давления на горизонтальную и вертикальную оси.

Для раскрытия статической неопределенности использовался метод сил. Выбиралась основная система, отбрасывая лишние связи и заменяя их силовыми факторами. Дополнительным соотношением для определения этого момента является каноническое уравнение метода сил, которое в данном случае сводится к

требованию равенства нулю поворота балки на свободном конце. Величины углов определяем с использованием интеграла Мора.

При действии единичного момента на всем участке балки изгибающие моменты равны единице. При изгибающем моменте равном нулю от действующей внешней нагрузки на участках балки (Рисунок 5) определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 M_{1p}(t) &= p \frac{[a - X(t)]^2 + Y^2(t)}{2} - F(t_1)[a - X(t)] = \\
 &= p \frac{a^2(1 - \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t}{2} - F(t_1)a(1 - \cos t).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

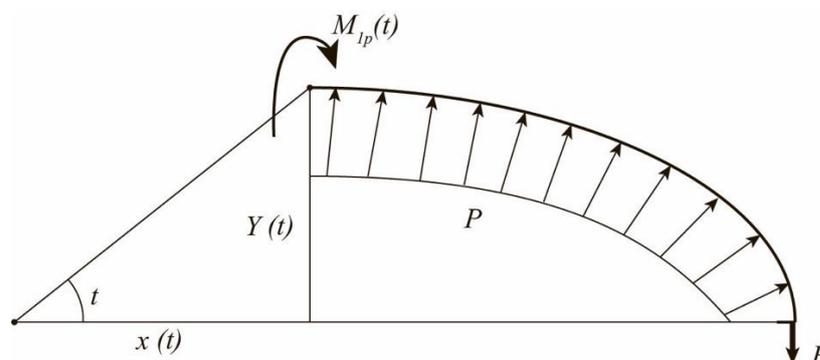


Рисунок 5. Нагрузки, действующие на балку при $M_1 = 0$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 E_0(t_1) &= \int_0^{t_1} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt, \\
 E_1(t_1) &= \int_0^{t_1} M_{1p}(t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

тогда выражения для углов поворота примет вид

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{E_0(t_1)}{D}, \\ \delta_{1p} &= \frac{E_1(t_1)}{D}.\end{aligned}\quad (5)$$

Откуда момент равен

$$M_1 = -\frac{E_1(t_1)}{E_0(t_1)}.\quad (6)$$

Далее определяется связь вертикальных перемещений δ_F и усилия F на свободном конце балки с использованием интеграла Мора:

$$\delta_F = \int_0^{t_1} \frac{M_\Sigma(t) M_{1F}(t)}{D} \sqrt{\left[\frac{dX(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dY(t)}{dt}\right]^2} dt,\quad (7)$$

где моменты вычисляются для заданной единичной силы на конце балки и для заданной внешней нагрузки по формулам:

$$\begin{aligned}M_\Sigma(t) &= M_{1p}(t) + M_1(t) M_{11}(t) = M_{1p}(t) - \frac{E_1(t_1)}{E_0(t_1)} = \\ &= p \frac{a^2(1 - \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t}{2} - F(t_1) a(1 - \cos t) - \frac{E_1(t_1)}{E_0(t_1)},\end{aligned}\quad (8)$$

$$M_{1F} = -a(1 - \cos t).$$

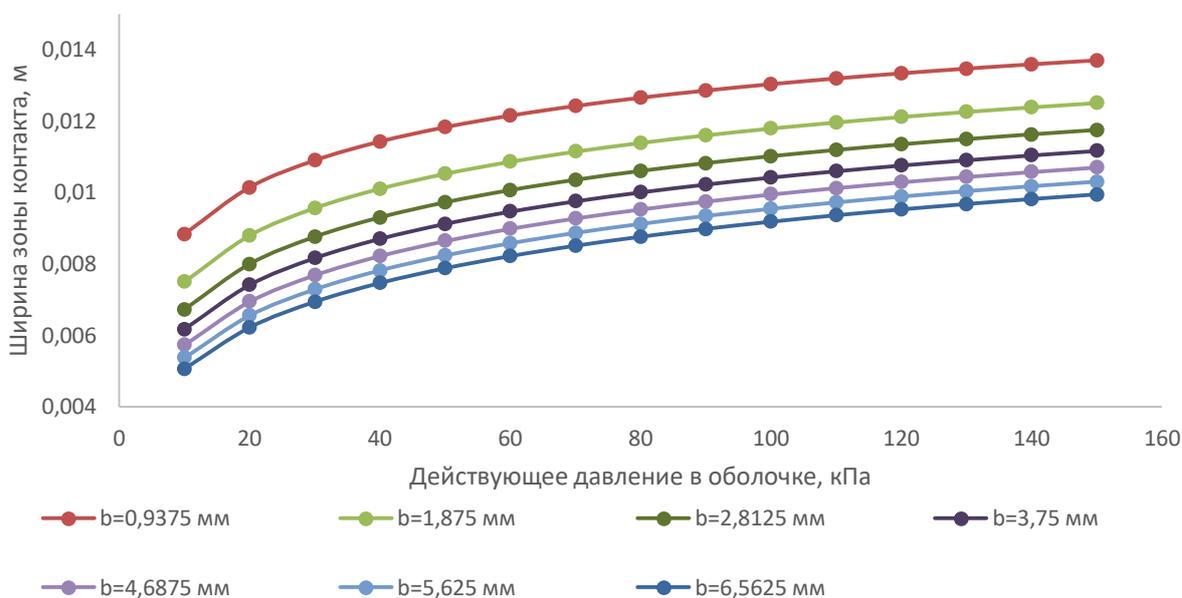
Подставляя выражение (7) в формулу (2) получим выражение для силы F .

Учитывается условие на границе контакта определяется ширина зоны контакта l .

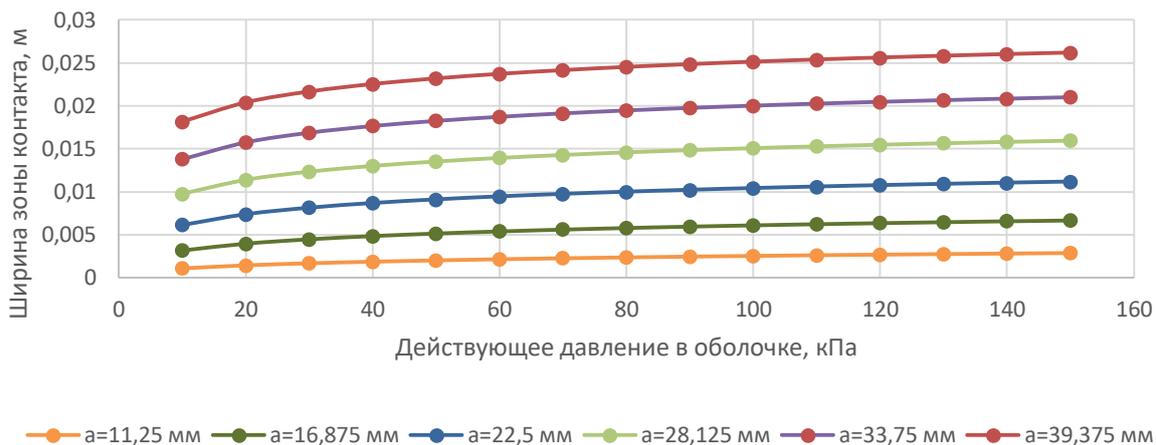
3. Результаты и обсуждение

С использованием полученного аналитического решения проводилось исследование влияния геометрических параметров на величину ширины зоны

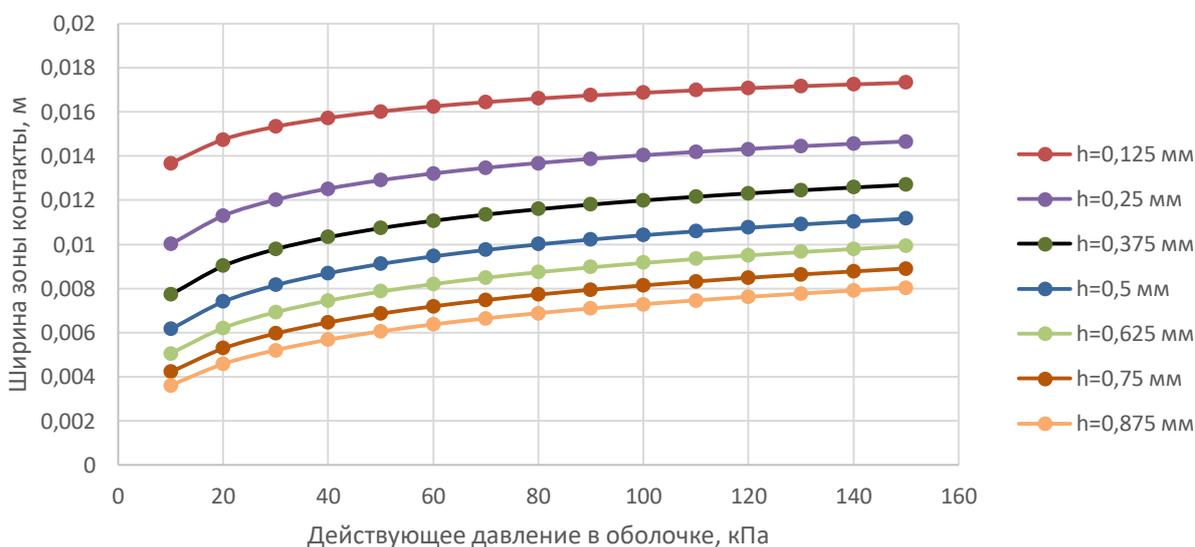
контакта в зависимости от действующего внутреннего давления. Исследование проводилось для оболочки с геометрическими параметрами: по вертикальной оси $b=3,75$, по горизонтальной оси $a=22,5$ и по толщине $h=0,5$, рисунок 2. Для каждой модели были рассмотрены 7 вариантов варьирования каждого из параметров при сохранении остальных геометрических параметров оболочки. Результаты варьирования геометрических параметров и полученной ширины зоны контакта при действии соответствующего внутреннего давления представлены на рисунке 6.



а.



б.



в.

Рисунок 6. Зависимость ширины зоны контакта от действующего давления при варьировании геометрических параметров:

а) варьирование малой полуоси b ; б) варьирование большой полуоси a ;

в) варьирование толщины оболочки h

Для анализа процесса изменения ширины зоны контакта от варьирования геометрического параметра цилиндрической оболочки эллиптического сечения были получены функции, зависящие от параметра, действующего на цилиндрическую оболочку внутреннего давления путем использования метода аналитического выравнивания.

В прямоугольной системе координат строится график, откладывая по оси ординат значение ширины зоны контакта, а по оси абсцисс – значения прикладываемого к цилиндрической оболочке давления на интервале от 10 до 80 кПа. Выбор интервала обусловлен тем, что при значениях выше 80 кПа характер изменения графика функции приближается к линейному изменению.

По совокупности точек ширины зоны контакта и значения, прикладываемого к цилиндрической оболочке давления получается поле корреляции. На основании поля корреляции можно заметить, что связь между приложенным к цилиндрической оболочке давлением и шириной зоны контакта носит степенной характер.

Степенное уравнение регрессии имеет вид:

$$y = ax^b \quad (9)$$

Оценочное уравнение регрессии (построенное по выборочным данным) будет иметь вид $y = ax^b + \varepsilon$, где e_i – наблюдаемые значения (оценки) ошибок ε_i , a и b соответственно оценки параметров α и β регрессионной модели, которые следует найти, ε - случайная ошибка (отклонение, возмущение).

Исходя из условия, что отклонение ε_i для каждого конкретного наблюдения i – случайны и их значения в выборке неизвестны, то:

1) по наблюдениям x_i и y_i можно получить только оценки параметров α и β

2) Оценками параметров α и β регрессионной модели являются соответственно величины a и b , которые носят случайный характер, т.к. соответствуют случайной выборке;

После линеаризации получаем:

$$\ln(y) = \ln(a) + b \ln(x) \quad (10)$$

Оценка параметров α и β осуществляется методом наименьших квадратов (МНК), т.к. он дает наилучшие оценки параметров уравнения регрессии. Однако, необходимо выполнить определенные предпосылки относительно случайного члена ε и независимой переменной x .

Критерий МНК записывается в виде:

$$S = \sum (y_i - y_i^*)^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

Система нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} an + b \sum x &= \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 &= \sum yx \end{aligned} \quad (12)$$

Из которой определяются эмпирические коэффициенты регрессии a , b .

Эмпирические коэффициенты регрессии a и b являются лишь оценками теоретических коэффициентов β_i , а само уравнение отражает лишь общую тенденцию в поведении рассматриваемых переменных.

Параметры уравнения регрессии.

Выборочные средние, дисперсии и среднеквадратического отклонения:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} & S^2(x) &= \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 & S(x) &= \sqrt{S^2(x)} \\ \bar{y} &= \frac{\sum y_i}{n} & S^2(y) &= \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 & S(y) &= \sqrt{S^2(y)} \\ \overline{xy} &= \frac{\sum x_i y_i}{n} \end{aligned}$$

Коэффициент корреляции b можно находить по формуле, не решая систему непосредственно:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S^2(x)} \\ a &= \bar{y} - b \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

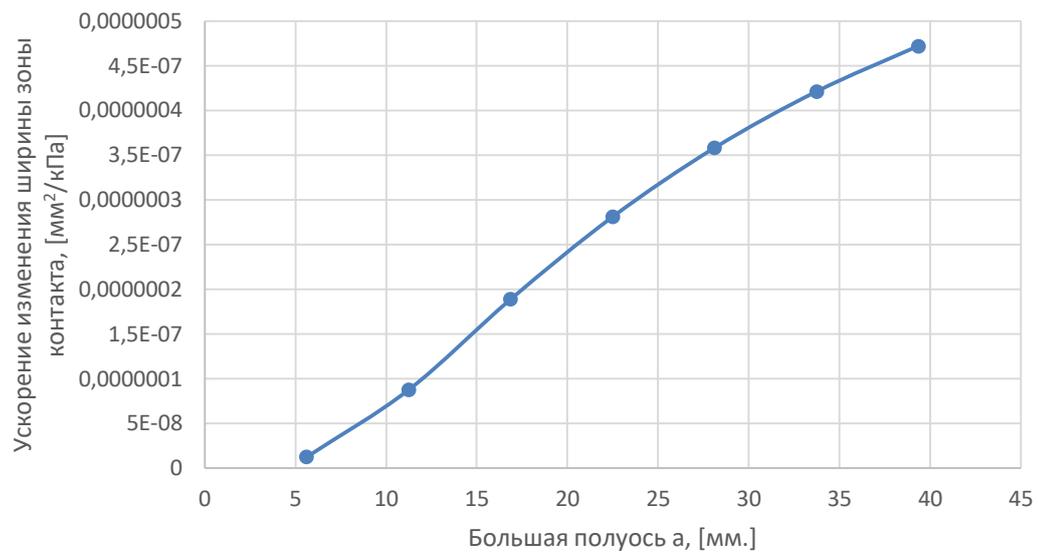
Найденные степенные уравнения регрессии при варьировании геометрических параметров оболочки представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Геометрические параметры оболочки	Функциональная зависимость ширины зоны контакта от действующего давления в диапазоне от 10 кПа до 80кПа.
По горизонтальной оси, a	
$a = 5,625$ мм	$0,000043 \cdot x^{0,4639}$
$a = 11,25$ мм	$0,0000486 \cdot x^{0,3665}$
$a = 16,875$ мм	$0,00168 \cdot x^{0,2871}$
$a = 22,5$ мм	$0,00367 \cdot x^{0,2314}$
$a = 28,125$ мм	$0,00636 \cdot x^{0,1922}$
$a = 33,75$ мм	$0,00959 \cdot x^{0,1639}$
$a = 39,375$ мм	$0,013228 \cdot x^{0,1426}$
По вертикальной оси, b	
$b = 0,9375$ мм	$0,00602 \cdot x^{0,1716}$
$b = 1,875$ мм	$0,0048 \cdot x^{0,1994}$
$b = 2,8125$ мм	$0,00413 \cdot x^{0,2175}$
$b = 4,6875$ мм	$0,00367 \cdot x^{0,2314}$
$b = 5,625$ мм	$0,00332 \cdot x^{0,2429}$
$b = 6,5625$ мм	$0,00304 \cdot x^{0,253}$
По толщине, h	
$h = 0,125$ мм	$0,011424 \cdot x^{0,08459}$
$h = 0,25$ мм	$0,00747 \cdot x^{0,1367}$
$h = 0,375$ мм	$0,00526 \cdot x^{0,1787}$
$h = 0,5$ мм	$0,00389 \cdot x^{0,2138}$
$h = 0,625$ мм	$0,00298 \cdot x^{0,2435}$
$h = 0,75$ мм	$0,00236 \cdot x^{0,269}$
$h = 0,875$ мм	$0,00191 \cdot x^{0,2909}$

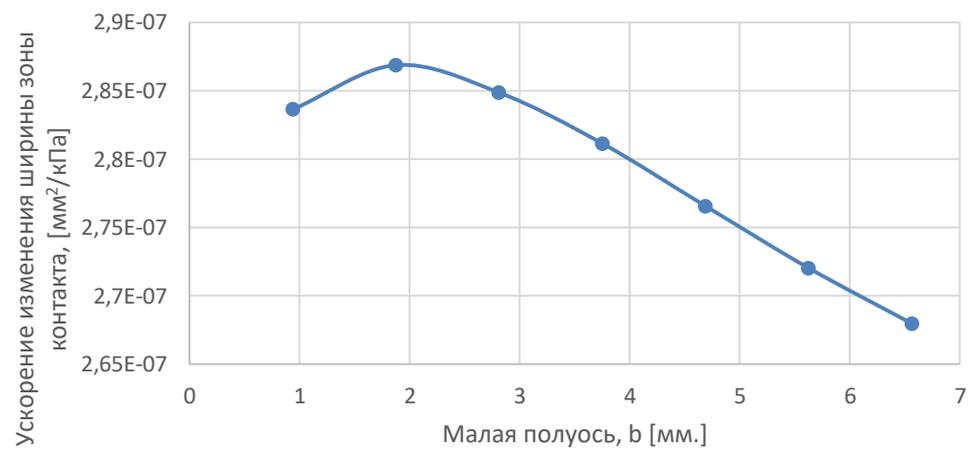
Полученные функциональные зависимости дважды дифференцировались для определения ускорения достижения ширины зоны контакта при действующем давлении. Зависимость ускорения изменения ширины зоны контакта при варьировании геометрических параметров при значении действующего давления 80кПа представлено на рисунке 7.

Варьирование большой полуоси a

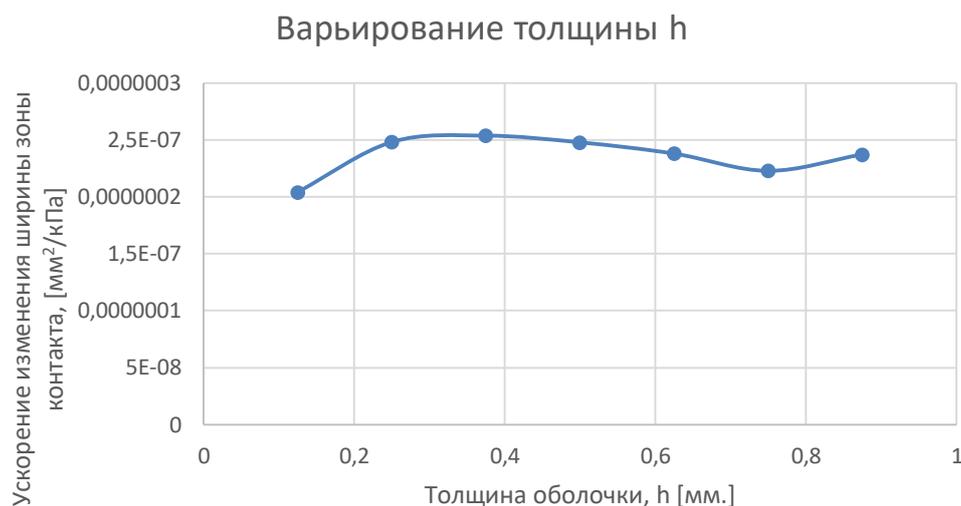


а.

Варьирование малой полуоси b



б.



в.

Рис. 7. Влияние значения параметра на ускорение изменения ширины зоны контакте: а) варьирование большой полуоси a ; б) варьирование малой полуоси b ; в) варьирование толщины оболочки h

Выводы

По результатам данного моделирования было получено, что увеличение малой полуоси влечет за собой уменьшение зоны контакта, а увеличение большой полуоси влечет за собой увеличение ширины зоны контакта, (Рис 6а,б). Увеличение толщины оболочки уменьшает зону контакта оболочки с жесткой пластиной, (Рис 6в). Из полученных результатов, рис. 7а, можно сделать выводы, что увеличение значения большой полуоси (параметр b) приводит к ускорению изменения роста ширины зоны контакта, а при уменьшении – к уменьшению. Форма кривой зависимости ускорения изменения ширины зоны контакта от действующего давления практически не практически не изменяется при рассмотрении действия давления до 80кПа.

При варьировании малой полуоси (параметр a) рис.7б, данный параметр оказывает противоположное влияние на ускорение изменения ширины зоны контакта, с увеличением его значения, ускорение изменения зоны контакта уменьшается, а при уменьшении значения параметра ширина зоны контакта растет. Форма кривой при этом имеет практически линейный характер, как и при варьировании параметра большой полуоси.

Влияние изменения толщины оболочки, рис 7в не существенно влияет на изменение ускорения изменения ширины зоны контакта, в отличие от изменения малой или большой полуосей.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного проекта Министерства образования и науки РФ код проекта “Современные технологии экспериментального и цифрового моделирования и оптимизации параметров систем космических аппаратов”, код проекта FSFF-2020-0017.

Библиографический список

1. Канчели Н.В. Строительные пространственные конструкции. - М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2004. - 119 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. - 264 с.
3. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.

4. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. – СПб.: Издательство Политехнического университета, 2006. - 168 с.
5. Ефимов В.В. Динамика и прочность авиационных конструкций. – М.: МГТУ ГА, 2014. Ч. II – 72 с.
6. Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В. Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 3. С. 119 - 125.
7. Булатов С.Н., Галимов К.З., Курочка П.Н. К теории расчета оболочек некругового очертания // Исследования по теории пластин и оболочек. 1981. № 1. С. 62 – 75.
8. Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Соляев Ю.О. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приёмопередающего модуля активной фазированной антенной решётки // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98252>
9. Егоров А.В., Азаров А.В. Численно-аналитический метод расчета металлокомпозитного цилиндрического баллона давления // Труды МАИ. 2014. № 73. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=48458>
10. Юдин А.С., Щитов Д.В. О расчете эллиптических оболочек вращения, нагруженных внутренним давлением // Естественные науки. 2004. №3. С. 29 - 36.
11. Babaytsev A.V. Rabinskiy L.N., Kyaw Thu Aung. Investigation of the contact zone of a cylindrical shell located between two parallel rigid plates with a gap // Incas bulletin, 2020, vol. 12, pp. 43 – 52. DOI: [10.13111/2066-8201.2020.12.S.4](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.4)

12. Аунг Чжо Тху, Бабайцев А.В., Егорова О.В., Мартиросов М.И., Рабинский Л.Н. Исследование влияния одностороннего тонкого полимерного покрытия на механические свойства стальных пластин в испытаниях на изгиб // Известия Тульского государственного университета. 2018. № 7. С. 175 - 182.
13. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. - Л.: Политехника, 1991. - 656 с.
14. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. Неклассические модели теории пластин и оболочек // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 5. С. 5 – 14.
15. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. - Л.: Судпромгиз, 1962. - 431 с.
16. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. - М.: Гостехиздат, 1947. - 252 с.
17. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. - М.: Гостехиздат, 1949. - 784 с.
18. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53499>
19. Низаметдинов Ф.Р., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента оболочки для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111337>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-2](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-2)
20. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. - М.: Наука, 1967. – 376 с.