УДК 681.03.06:531.383:532.516

Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой

Блинкова А. Ю.,[1*] Иванов С.В.,[2] Кузнецова Е.Л.,[3***] Могилевич Л.И.[4****]**

[1]Саратовский Государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., ул. Политехническая, 77, Саратов, 400054, Россия

[2]Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

[3]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

[4]Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский филиал), ул. Астраханская, 1а, Саратов, 410790, Россия

**e-mail: anblinkova26@gmail.com*

***e-mail: evilgraywolf@gmail.com*

****e-mail: lareyna@mail.ru*

*****e-mail: mogilevich@sgu.ru*

Аннотация

Получено уравнение, обобщающее известное уравнение Гарднера, описывающее волны деформации с помощью асимптотических методов решения связанной задачи гидроупругости, включающей уравнения динамики геометрически нелинейной вязкоупругой оболочки, окруженной упругой средой с учетом уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, находящейся внутри оболочки, с соответствующими

граничными условиями. Вследствие того, что радиус срединной поверхности оболочки значительно меньше длины волны деформации, в уравнениях динамики вязкой несжимаемой жидкости сделан асимптотический переход к классическому уравнению гидродинамической теории смазки.

В данной работе при численном решения задачи Коши для полученного нового уравнения, с учетом влияния жидкости и окружающей оболочку упругой среды, применяется подход к построению разностной схемы, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы и получаемая разностная схема, автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из базовых конечных объемов.

Наличие жидкости в оболочке, окруженной упругой средой, приводит к росту амплитуды волны деформации или ее падению в зависимости от величины коэффицинта Пуассона для вязкоупругой среды. Упругая среда, окружающая оболочку, приводит к увелечению скорости нелинейной волны деформации.

Использование данных моделей в свою очередь позволит существенно расширить возможности анализа экспериментальных данных по исследованию систем подачи топлива, систем охлаждения для авиакосмической техники, и т.д. динамика которых носит принципиально нелинейный характер.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические вязкоупругие оболочки, окружающая упругая среда.

Введение

В современных приборах и инженерных устройствах аэрокосмической техники одним из основных элементов конструкции является трубопровод, который служит для подвода жидкости. Система трубопроводов широко используется в ракетных двигателях, гидроприводах современных летательных аппаратов (ЛА), системах охлаждения и дозирования (ЛА) и др. Встречаются трубопроводы окруженные упругой средой, с которой они взаимодействуют.

Для абсолютно жесткой трубы кругового сечения ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы кольцевого сечения (в виде двух упругих соосных цилиндрических оболочек) аналогичное исследование проведено в [2].

Настоящее исследование посвящено анализу распространения волн деформаций при взаимодействии вязкой несжимаемой жидкости с вязкоупругими стенками цилиндрической оболочки.

1. Волновые процессы в вязкоупругих и нелинейно вязкоупругих оболочках не взаимодействующих с вязкой жидкостью рассмотрены в [1-3].

Получим, уравнения динамики с учётом наличия вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой, с помощью асимптотических методов для решения связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями.

Рассмотрим бесконечно длинную вязкоупругую цилиндрическую оболочку, взаимодействуюшую с упругой окружающей средой, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [4]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{1}{2}V^2 + \mathrm{rot}\overline{V}\times\overline{V} + \frac{1}{\rho}grad\cdot p \quad = -\nu\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\overline{V}, \\ &div\overline{V} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U\frac{\partial V_r}{\partial x} - W\frac{\partial V_r}{\partial r},\ \frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U\frac{\partial V_x}{\partial x} - W\frac{\partial V_x}{\partial r} \quad \text{ï ðè} \quad r = R_1 - W. \tag{2}$$

Здесь t - время; V_r, V_x - проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; p - давление; ρ - плотность; ν - кинематический коэффициент вязкости; U - продольное упругое перемещение оболочек по оси x; W - прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; R_1 - внутренний радиус оболочки.

В случае осевой симметрии используя гипотезу Кирхгофа-Лява, имеем связь между компонентами деформаций ε_x , ε_y перемещениями [5]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial x})^2, \varepsilon_y = -\frac{1}{R}W, \qquad (3)$$

где R - радиус срединой поверхности оболочки, z - расстояние от нее. Связь между компонентами напряжений σ_x, σ_y и деформаций зададим уравнениями линейной теории вязкоупругости [6], учитывающей линейную упругость объёмных деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) - \frac{E}{1+\mu_0}\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_x d\tau, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) - \frac{E}{1+\mu_0}\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_y d\tau. \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь E - модуль Юнга, μ_0 - коэффициент Пуассона материала оболочки, t - время; α, β - параметры вязкоупругости; e_x, e_y - компоненты девиатора деформаций

$$e_x = \frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y, \quad e_y = \frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x. \qquad (5)$$

Разлагая функции e_x, e_y в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$, при условии $\beta t >> 1$ сохраняем два члена разложения из формул (4) получим приближенные уравнения состояния [1-3]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) + p[\frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) + p[\frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x] \end{aligned} \qquad (6)$$

где введен оператор p, такой, что

$$pf = \frac{E}{1+\mu_0}(\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta})f \qquad (7)$$

Вычисляя с использованием усилия и моменты по формулам

$$N_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz, N_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_y dz, M_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz, M_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_{yz} z dz \qquad (8)$$

и подставим (8) в систему уравнений динамики оболочек [5]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_y + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial W}{\partial x} N_x) - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -q_n + \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} k_1 W \qquad (9)$$

здесь ρ_0 - плотность материала оболочки, h_0 - толщина оболочки; q_x, q_n напряжения, действующие со стороны жидкости на поверхность оболочки, снесенные на невозмущенную поверхность оболочки $(W << R)$

$$q_x = [\rho\nu(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x})]_{r=R}, q_n = [-p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}]_{r=R} \qquad (10)$$

Выражение $-\rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} k_1 W$ характеризует реакцию на сдавливание (сжатие) упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения [7].

2. Принимая за характерную длину - длину волны деформации l, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений динамики оболочек (3)-(9)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 \left(1 - \mu_0^2\right)}}. \qquad (11)$$

здесь c_0 - скорость звука в материале оболочки

Положим

$$\begin{aligned} &\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad &&\frac{w_m}{R} = O(\varepsilon), \quad &&\frac{\alpha}{\beta} = O(1), \\ &\frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l} = O(\varepsilon), \quad &&\frac{R}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad &&\frac{h_0}{R} = O(\varepsilon), \end{aligned} \qquad (12)$$

где $\varepsilon << 1$ - малый параметр задачи.

Применим метод двухмасштабных разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \tag{13}$$

где c - безразмерная неизвестная скорость волны, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру ε:

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \ldots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \ldots \tag{14}$$

Подставляя (11), (13), (14) в уравнения (3-9) с учетом оценок (12), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m}{R} u_{30} = \mu_1 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \mu_1 = \frac{\mu_0 + \frac{1}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}}{1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}} \tag{15}$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = [1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}](1-\mu_1^2). \tag{16}$$

Из следующего приближения по ε, учитывая (15) и (16), находится уравнения для определения u_{10}:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \mu_1^2 \frac{c}{2} \frac{R^2}{l^2 \varepsilon} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \frac{c}{2} \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ -\frac{1}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{c_0}{l\varepsilon}(1+\mu_1+\mu_1^2)\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}\frac{\mu_1^2}{2c} k_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = -\frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2 2c}[q_x - \mu_1 \frac{R}{l}\frac{\partial q_n}{\partial \xi}]\end{gathered} \tag{17}$$

3. Для определения правой части уравнения (17) ведем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, r^* = \frac{r}{R}, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l}, p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{R_1^3} P;$$

$$\psi = \frac{R_1}{l} = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \quad \lambda = \frac{w_m}{R_1}, \qquad (18)$$

$$\psi << 1, \quad \lambda << 1.$$

Подставляя (18) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру λ:

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \ldots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \ldots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \ldots \qquad (19)$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi \approx 0$ - гидравлическая теория смазки), считая $(\psi)(R_1 c_0 / \nu) << 1$ (- ползущие течения [8, 9]), и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \qquad (20)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} & r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0 \qquad \text{ïðè } r^* = 0, \\ & v_r^0 = -\frac{\partial u_{30}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial t^*} \qquad \text{ïðè } r^* = 1. \end{aligned} \qquad (21)$$

Из решения задачи (20), (21) следует, что

$$\begin{aligned} P^0 \quad & = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_{30}}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \quad & = \frac{1}{2} r^* \frac{\partial P_0}{\partial x^*}. \end{aligned} \qquad (22)$$

С принятой точностью по $\varepsilon, \psi, \lambda$ из (5) найдем

$$q_x = \rho\nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}|_{r^*=1}, \quad q_n = -\rho\nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{l}{R_1} P^0,$$

и выражение в квадратных скобках правой части (2.7) имеем вид

$$[q_x - \mu_1 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \varepsilon}] = \rho\nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} [(\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*})_{r^*=1} + \mu_1 \frac{R}{l} \frac{l}{R_1} \frac{\partial P^0}{\partial x^*}] = \rho\nu \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{1}{2} \frac{\partial P^0}{\partial \xi} [1 + 2\mu_1 \frac{R}{R_1}] \qquad (23)$$

Учитывая, что были введены переменные (13), (14) и имея соотношения (15) (16), имеем

$$P^0 = 8c \frac{u_m R_1}{w_m l} [2\mu_1 \frac{R}{R_1} - 1] u_{10}, c = \sqrt{[1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}](1-\mu_1^2)}. \qquad (24)$$

Следовательно, в правой части уравнения (17) остается выражение

$$2 \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon} [1 - (2\mu_1 \frac{R}{R_1})^2] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \qquad (25)$$

с принятой точностью по ψ, ε положим $R_1 \approx R.$

Подставляя (23) в уравнение (17), окончательно получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{c}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} (\frac{R}{l})^2 \mu_1^2 \frac{c}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \\ &- \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l\varepsilon} (1-\mu_0)(1+\mu_1+\mu_1^2) \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \frac{R^2}{l^2 \varepsilon} \frac{\mu_1^2}{2c} k_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - 2[1-(2\mu_1)^2] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \qquad (26)$$

При отсутствии жидкости $(\rho = 0)$ последнее слагаемое выпадает и уравнение превращается в уравнения Гарднера-Бюргерса, для $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$ имееющие точное частное решение. В зависимости от физичеких параметров величина μ_1 может быть больше $\frac{1}{2}$, меньше $\frac{1}{2}$ или равна $\frac{1}{2}$. Последний случай эквивалентен отсутствию жидкости, но означает, что она не влияет на волну деформации.

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_3\phi, \quad \eta = c_1\xi, \quad t = c_2\tau \tag{27}$$

позволяет записать уравнение (26) в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + 6\phi\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} - \sigma_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \sigma_3\frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \sigma\phi = 0. \tag{28}$$

здесь $\sigma = 1$ при $\mu_1 < \frac{1}{2}$, $\sigma = -1$ при $\mu_1 > \frac{1}{2}$ и $\sigma = 0$ при $\mu_1 = \frac{1}{2}$.

Постоянные c_3, c_1, c_2 определяются формулами

$$c_2 = 2\sigma[1-(2\mu_1)^2]\frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon}, c_1 = \left[c_2\varepsilon\left(\frac{l}{R}\right)^2\frac{2}{c\mu_1^2}\right]^{1/3}, c_3 = 6\frac{c_2}{c_1}\frac{2l\varepsilon}{cu_m}.$$

При этом вводятся обозначения

$$\sigma_2 = \frac{c_1^2}{c_2}\frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{c_0}{l\varepsilon}(1-\mu_0)(1+\mu_1+\mu_1{}^2), \ \sigma_3 = \frac{c_1}{c_2}\frac{R^2}{l^2\varepsilon}\frac{\mu_1^2}{2c}k_1. \tag{29}$$

4. Запишем уравнение (28) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega}(-3\phi^2 - \phi_{\eta\eta} + \sigma_2\phi_\eta - \sigma_3\phi)dt + \phi d\eta - \iint_\Omega \sigma\phi dt d\eta = 0 \tag{30}$$

для любой области Ω. Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \phi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 2.

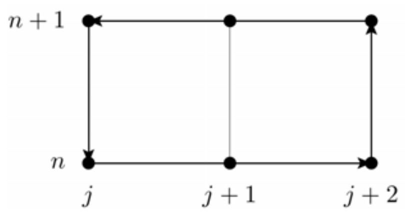

Рис. 1: Базовой контур для уравнения (28).

Добавим интегральные соотношения

$$
\begin{aligned}
\int_{\eta_j}^{\eta_j} u_\eta \, d\eta \quad &= u(t,\eta_{j+1}) - u(t,\eta_j), \\
\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta\eta} \, d\eta \quad &= u_\eta(t,\eta_{j+1}) - u_\eta(t,\eta_j).
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (30), (31) в виде

$$
\begin{gathered}
\left(-3\left({u^2}_j^n + {u^2}_j^{n+1} - {u^2}_{j+2}^n - {u^2}_{j+2}^{n+1}\right) - \left({u_{\eta\eta}}_j^n + {u_{\eta\eta}}_j^{n+1} - {u_{\eta\eta}}_{j+2}^n - {u_{\eta\eta}}_{j+2}^{n+1}\right) + \sigma_2\left({u_\eta}_j^n + {u_\eta}_j^{n+1} - {u_\eta}_{j+2}^n - {u_\eta}_{j+2}^{n+1}\right) - \right. \\
\left. - \sigma_3\left(u_j^n + u_j^{n+1} - u_{j+2}^n - u_{j+2}^{n+1}\right)\right) \cdot \frac{\tau}{2} + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \cdot 2h - \sigma(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n) \cdot h\tau = 0, \\
({u_\eta}_{j+1}^n + {u_\eta}_j^n) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n, \\
{u_{\eta\eta}}_{j+1}^n \cdot 2h = {u_\eta}_{j+2}^n - {u_\eta}_j^n.
\end{gathered}
\tag{32}
$$

В результате разностная схема для уравнения (28) определяется как условие совместности для данной системы разностных уравнений (32). Таким образом получается разностная схема [10, 11, 12], автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из базовых конечных объемов.

Для построения разностной схемой воспользуемся приведенной ниже программой написанной на языке системы компьютерной алгебры Singular (http://www.singular.uni-kl.de/).

```
ring r = (0, h, tau, sigma2, sigma3, sigma), (Tx, Tt), (c, dp);
// u_xx, u_x, u, u^2
```

```
vector eq1 = [-(1+Tt-Tx^2-Tt*Tx^2)*tau/2,
              sigma2*(1+Tt-Tx^2-Tt*Tx^2)*tau/2,
              (1-Tt)*2*h -sigma3*(1+Tt-Tx^2-Tt*Tx^2)*tau/2 - sigma*(1+Tt)*h*tau,
             -3*(1+Tt-Tx^2-Tt*Tx^2)*tau/2];
vector eq2 = [0, (Tx+1)*h/2,-(Tx-1), 0];
vector eq3 = [Tx*2*h,-(Tx^2-1), 0, 0];
module m = eq1, eq2, eq3;
std(m)[1]/(4*tau*h**3);
quit;
```

В первой строке программы описан полиномиальный модуль с переменными Tx, Tt с исключающим по позиции упорядочением над кольцом рациональных чисел с параметрами $h, tau, sigma2, sigma$. Как видно из следующего комментария программы первой позиции соответствует функция u_{xx}, а затем по порядку u_x, u, u^2. Переменные Tx, Tt соответствуют операторам сдвига по переменным η и t. За счет выбора исключающим по позиции упорядочения нелинейная часть $3u^2$ не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера командой *std(m)*. В приведенном ниже результате вычислений первый элемент базиса Грёбнера представляет собой искомую разностную схему для уравнения (28), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности.

```
[0,0,1/(4*h^3)*Tx^4*Tt+1/(4*h^3)*Tx^4+(h^2*sigma3-2*h*sigma2-
2)/(4*h^3)*Tx^3*Tt+(h^2*sigma3-2*h*sigma2-
```

2)/(4*h^3)*Tx^3+(sigma2)/(h^2)*Tx^2*Tt+(sigma2)/(h^2)*Tx^2+(-2*h^3*tau*sigma-4*h^3-h^2*tau*sigma3-2*h*tau*sigma2+2*tau)/(4*h^3*tau)*Tx*Tt+(-2*h^3*tau*sigma+4*h^3-h^2*tau*sigma3-2*h*tau*sigma2+2*tau)/(4*h^3*tau)*Tx-1/(4*h^3)*Tt-1/(4*h^3),3/(4*h)*Tx^3*Tt+3/(4*h)*Tx^3-3/(4*h)*Tx*Tt-3/(4*h)*Tx]

Перепишем полученною разностную схему в обычных обозначениях

$$\begin{gathered}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+3\frac{({u^2}_{j+1}^{n+1}-{u^2}_{j-1}^{n+1})+({u^2}_{j+1}^{n}-{u^2}_{j-1}^{n})}{4h}+\\+\frac{(u_{j+2}^{n+1}-2u_{j+1}^{n+1}+2u_{j-1}^{n+1}-u_{j-2}^{n+1})+(u_{j+2}^{n}-2u_{j+1}^{n}+2u_{j-1}^{n}-u_{j-2}^{n})}{4h^3}-\\-\sigma_2\frac{(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})+(u_{j+1}^{n}-2u_j^{n}+u_{j-1}^{n})}{2h^2}+\sigma_3\frac{(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})+(u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n})}{4h}-\sigma\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2}=0.\end{gathered}\tag{33}$$

5. Полученная неявная разностная схема имеет квадратичную нелинейность для следующего временного слоя. При построении ее решения методом простой итерации использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^2=v_{k+1}^2-v_k^2+v_k^2=(v_{k+1}-v_k)(v_{k+1}+v_k)+v_k^2\approx v_{k+1}\cdot 2v_k-v_k^2.$$

В качестве начального условия при решении задачи Коши для уравнения (28) можно выбрать следующее точное решение уравнения при $\sigma=0$.

$$\varphi=\frac{5}{3}\frac{\omega}{\sigma_2}+\frac{1}{50}\sigma_2^2-\frac{1}{25}\sigma_2^2 tanh(\theta)-\frac{1}{50}\sigma_2^2 tanh^2(\theta),\quad \theta=\frac{1}{10}\sigma_2\left(x-\left(\omega\frac{10}{\sigma_2}+\sigma_3\right)t\right)\tag{34}$$

Из формулы (35) следует, что упругая окружающая среда увеличивает скорость нелинейной волны в вязкоупругой оболочке на σ_3.

Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η. Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (http://www.scipy.org/).

Результаты проведенного компьютерного моделирования представлены на рис. 2-4. Наличие жидкости в оболочке приводит к существенному изменению характера распространения в ней продольных волн деформаций. Если в оболочке нет жидкости (эквивалентно условию $\sigma = 0$), уединенная волна (имеет структуру ударной волны) движется, сохраняя свою первоначальную форму и скорость (см. рис. 2).

Наличие жидкости в оболочке при $\sigma = 1$ ведет к росту амплитуды волны (см. рис. 3). Таким образом, можно утверждать, что при при $\mu_1 < \frac{1}{2}$ жидкость способствует постоянной дополнительной «подпитке» энергией (из источника первоначального возбуждения), обеспечивающей рост амплитуды.

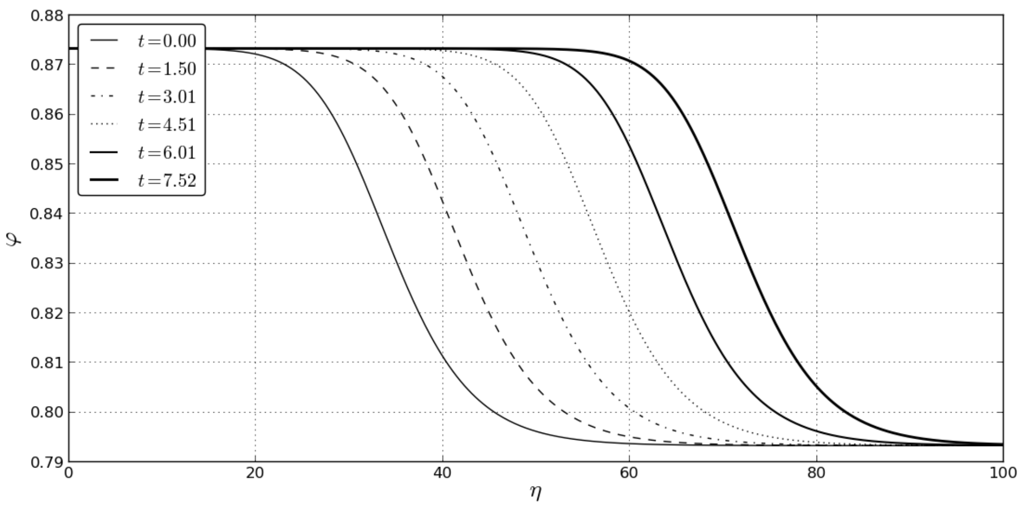

Рис. 2: График численного решения уравнения (28) с начальным условием (7) при $\sigma = 0.0$, $\sigma_2 = 1.0$, $\sigma_3 = 1.0$, $\omega = 0.5$ и для $t = 0.0\ldots7.52$

Наличие жидкости в оболочке при $\sigma = -1$ ведет к быстрому уменьшению амплитуды волны, то есть к её затуханию (см. рис. 4). Для поддержки процесса распространения волны при $\mu_1 > \frac{1}{2}$ необходимо периодическое её возбуждение.

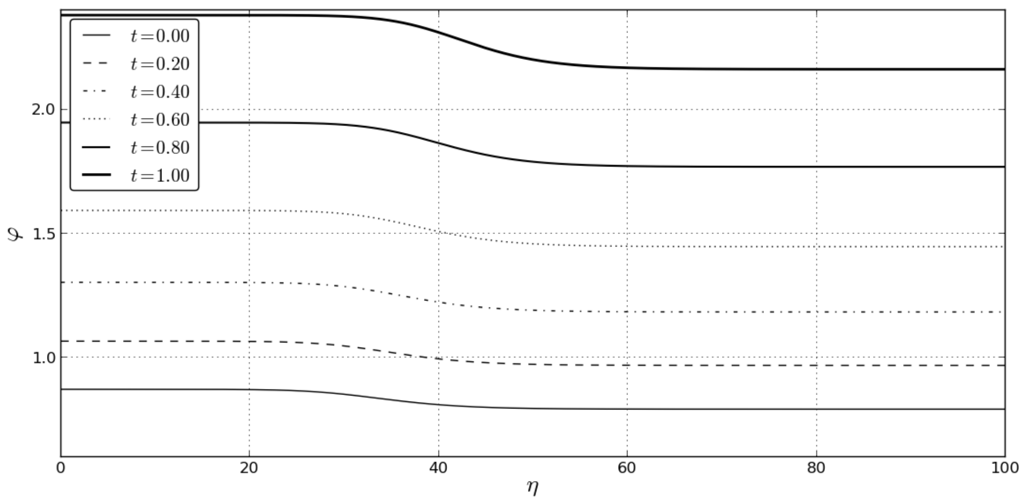

Рис. 3: График численного решения уравнения (28) с начальным условием (7) при $\sigma = 1.0$, $\sigma_2 = 1.0$, $\sigma_3 = 1.0$, $\omega = 0.5$ и для $t = 0.0 \ldots 1.00$

Заключение

Проведенное моделирование с использованием компьютерной алгебры позволило выявить особенности поведения волн в физически линейных вязкоупругих цилиндрических оболочках, окруженных упругой средой, содержащих вязкую несжимаемую жидкость.

Использование базиса Грёбнера для генерации разностной схемы при численном решении задачи Коши для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка по пространственной переменной, позволило получить результат расчета без осцилляций вызываемых численной реализацией. Численная схема также была протестирована на точном решении для $\sigma = 0$ (см. рис. 2).

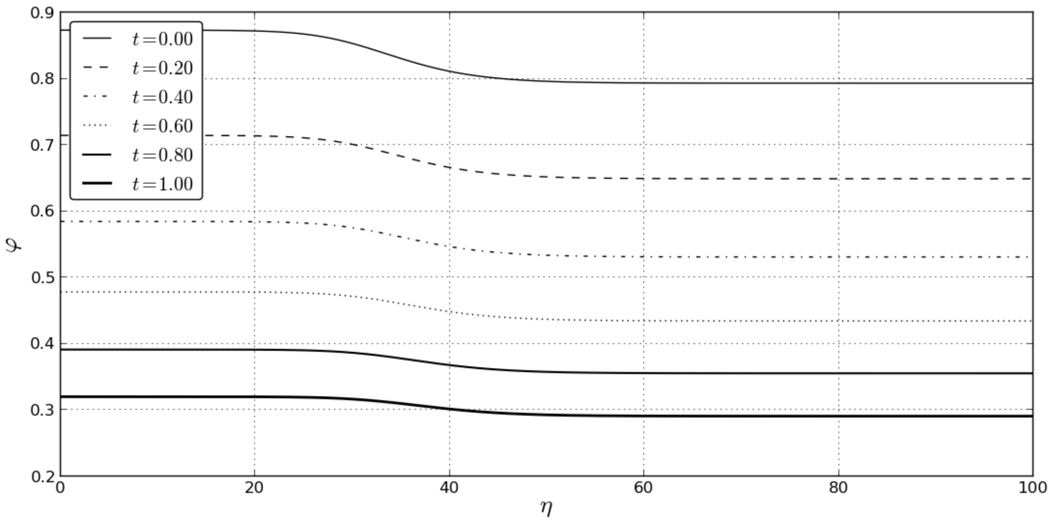

Рис. 4: График численного решения уравнения (28) с начальным условием (7) при $\sigma = -1.0$, $\sigma_2 = 1.0$, $\sigma_3 = 1.0$, $\omega = 0.5$ и для $t = 0.0 \ldots 1.00$

Полученный расчет показал влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в оболочке в зависимости от величины μ_1, характеризующей материал оболочки: рост амплитуды волны для $\mu_1 < \frac{1}{2}$, падения амплитуды волны для $\mu_1 > \frac{1}{2}$, отсутствие влияния жидкости для $\mu_1 = \frac{1}{2}$. За счет рассеяния энергии в вязкоупругом материале оболочки происходит сглаживаие профиля волны деформации (см. рис. 3, 4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РФФИ проект 13-01-00049-а.

Библиографический список

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических

оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. – Саратов, Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. - 132 с.

2. Аршинов Г. А.,Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журнал. 2000. Т.46. № 1. С. 116-117.

3. Аршинов Г. А., Могилевич Л. И. Статические и динамические задачи вязкоупругости. – Саратов. СГАУ имени Н.И. Вавилова, 2000. - 152 с.

4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.

5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.: Наука, 1972. – 432 с.

6. Москвитин В. В. Сопротивление вызко-*упругих* материалов. - М.: Наука, 1972. – 328 с.

7. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960. - 490 С.

8. Чивилихин С. А., Попов И .Ю., Гусаров В. В. Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой жидкости // Доклады РАН. 2007. Т. 412, № 2. С. 201-203.

9. Попов Ю. И., Розыгина О. А., Чивилихин С. А., Гусаров В. В. Солитоны в стенке нанотрубки и стоксово течение в ней. // Письма в Журнал технической физики. 2010. Т. 36. вып. 18. С. 42-54.

10. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргерса построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. Т. 32. № 2. С. 71–

74.

11. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and *Geometry*: Methods and Applications. 2006. Vol. 2. P. 26. http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html.

12. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Springer Berlin / Heidelberg, 2009. Vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science. Pp. 94–105.