

Научная статья

УДК 533.6.013

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179683>

ОСОБЕННОСТИ МИНИМИЗАЦИИ ИНДУКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕСУЩИХ СИСТЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С КОНЦЕВЫМИ КРЫЛЫШКАМИ

Виктория Геннадьевна Борисова¹✉, Владимир Александрович Силантьев²

^{1,2}Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С.А. Чаплыгина,
Новосибирск, Россия

¹sa01borisova@gmail.com✉

Аннотация. В работе рассмотрены особенности оптимизации несущих систем летательных аппаратов (ЛА) с концевыми крылышками при ограничении на деформацию геометрии базового крыла. Отмечается необходимость использования в процессе оптимизации эффективных программ обтекания пространственных компоновок. Показано хорошее согласование расчетов по быстродействующей программе, использующей панельный метод Морино, с результатами расчета коммерческих программ на базе осредненных уравнений Навье-Стокса с различными моделями турбулентности.

Ключевые слова: оптимизация, индуктивное сопротивление, концевые аэродинамические поверхности (КАП), дискретный П-образный вихрь, плоскость

Трефтца, циркуляция, аэродинамическое проектирование, модель турбулентности, осредненные уравнения Навье-Стокса

Для цитирования: Борисова В.Г., Силантьев В.А. Особенности минимизации индуктивного сопротивления несущих систем летательных аппаратов с концевыми крылышками // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179683>

Original article

FEATURES OF MINIMIZING THE INDUCED DRAG OF LIFTING SYSTEMS WITH WINGLET

Victoria G. Borisova¹, **Vladimir A. Silantiev²**

^{1,2}Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin, Novosibirsk

¹sa01borisova@gmail.com

Abstract. The presented article considers specifics of the aircraft lifting systems with winglets optimizing with a restriction on the geometry deformation of the base wing. The presented numerical approach to aerodynamic design allows increasing the aircraft aerodynamic lift-to-drag ratio by reducing the lifting system drag in the cruising flight mode.

The drag minimization problem is focused in this article on the induced drag reducing, which is stipulated by the shroud of free vortices. The well-known Munk's stagger theorem application allows correctly compute optimal distribution of the circulation intensity in the Treftz plane and, as a consequence, find the minimum induced

drag. The numerical approach to optimization is based on the idea of the aircraft lifting system replacing with a system of the discrete U-shaped vortices. According to the Munk's theorem, lifting vortex systems can be translocated along the free-stream velocity into one vertical plane with the the air load retaining (velocity circulation) along the wingspan, which ensures an optimal solution along the lifting system.

However, in the case of employing this approach for a long-range aircraft, with mainly swept wings and high subsonic cruising speeds, there is an intensive increase in the air load in the end wing sections, which increases even more, when induced drag is minimized over the entire lifting system (full optimization). This leads to the earlier compressibility stall development or the aerodynamic shock stall. In such cases, optimization of only a part of the lifting system (partial optimization) is possible, where the basic wing geometry is fixed, and the induced drag minimization is being performed on account of special wingtips or the winglets installing.

In the case of the partial optimization, a fundamentally new approach, formulated in the form of a new numerical method, which accounts for the mutual interference of the wing and the winglet, both separately and on each other is employed.

At the initial stage, the known initial geometry of the base wing is used and the initial geometry of the winglet is specified. Then, using a direct computational program (AEROJET program, based on the Morino's panel method), the initial air load distribution along the wingspan and the winglet span is being determined for a given lift coefficient. This condition of retaining the air load distribution nature along the base wing span serves in a first approximation as a condition for the invariance of its geometry. The load

distribution along the winglet span (wingtip) is being optimized and its geometry is being determined based on the obtained data by the proposed numerical method using the direct computational program (AEROJET). Since in view of the changes in the winglet geometry, the air load distribution along the base wing does not correspond to its geometry, the iterations continue until convergence is reached.

With the new numerical approach application, optimization and aerodynamic design of the model of the advanced technology demonstrator aircraft, developed at the Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin, were performed. The aerodynamic lift-to-drag ratio increase was obtained due to the optimized winglets installation and was about 8.8%

To assess the effect of viscosity on the wake vortex computing, comparison of the results obtained by the AEROJET program (non-viscous fluid) with the results of computations by the OPENFORM program, based on the averaged Navier-Stokes equations (viscous fluid) were performed. The study of the wing model in the framework of the viscous fluid was performed with two turbulence models namely Spalart Allmaras and $k-\omega$ SST. The ordered computational grid with the corresponding block structure has a total number of elements - 10 million cells, the number of cells on the profile is 342 pieces.

When analyzing the results, a good agreement between the computations for both turbulence models and with the results obtained by the new numerical approach with the correct adjustment for flow viscosity when making estimates is marked.

Keywords: optimization, induced drag, wingtip devices, discrete U-shaped vortex, Trefftz plane, circulation, aerodynamic design, turbulence model, averaged Navier-Stokes equations

For citation: Borisova V.G., Silantiev V.A. Features of minimizing the induced drag of lifting systems with winglet. *Trudy MAI*, 2024, no. 135. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179683>

Введение

За последние десятилетия накоплено уже большое количество исследований и опыта в разработке и производстве самолетов классических аэродинамических схем [1, 2], а также активно появляются наработки по различным нетрадиционным схемам ЛА [3, 4]: ромбовидные крылья [5], сочлененные с горизонтальным оперением (ГО), крылья замкнутого типа со сложной геометрией (например, ТВС-2ДТС), самолеты с различными видами концевых крылышек [6] и прочие. При этом остаются актуальными исследования по минимизации индуктивного сопротивления таких несущих систем (полная оптимизация). Особый случай — это минимизация индуктивного сопротивления при модернизации действующего парка самолетов путем установки концевых крылышек, так как в процессе оптимизации необходимо учитывать сохранение геометрии базового крыла (частичная оптимизация).

Основы теории индуктивного сопротивления и его оптимизации были заложены еще в прошлом веке и отображены в трудах Л. Прандтля, А. Бетца, М. Мунка [7–10]. Среди современных авторов, продолжающих исследование этой задачи, можно выделить работы А. А. Павленко [11], А. Г. Захарова и О. В. Кудрявцева [12] и Л. Л. Теперина, Т. М. Притуло и др. [13]. Данные труды очень полезны прежде всего при изучении нестреловидных крыльев, рассматриваемых целиком как несущая система.

В данном исследовании при проведении оптимизации индуктивного сопротивления магистральных самолетов [14], имеющих в основном стреловидные крылья и высокие дозвуковые скорости крейсерского полета, было отмечено интенсивное возрастание волнового сопротивления, при котором проведение минимизации c_x всей несущей системы целиком (полная оптимизация) вызывает еще больший опасный прирост волнового сопротивления. В таких случаях проведение полной оптимизации нецелесообразно, и поэтому необходимо использовать частичную оптимизацию, где геометрия базового крыла фиксирована, а минимизация индуктивного сопротивления выполняется за счет установки концевых крылышек.

Корректность разработанных авторами методов и программ была успешно проверена известными точными решениями [15], а также была подтверждена результатами экспериментальных исследований в аэродинамической трубе Т-203 СибНИА [16].

Особенности минимизации индуктивного сопротивления

Основная идея обоих методов оптимизации опирается на выведенную ранее [7–10, 17–19] взаимосвязь подъемной силы и индуктивного сопротивления с интенсивностью пелены свободных вихрей в плоскости Трефтца (1) и (2), а также на его теорему Мунка «о выносе» [8], согласно которой можно перемещать несущие вихревые системы вдоль скорости набегающего потока при сохранении нагрузки вдоль размаха, не изменяя при этом циркуляцию скорости. Благодаря простоте и эффективности метода дискретных П-образных вихрей, при больших числах разбиения по размаху несущей системы можно легко обеспечить необходимую точность. Тогда коэффициенты индуктивного сопротивления и подъемной силы записывают следующим образом:

$$c_{x_i} = \frac{2}{SV_\infty^2} \int_0^s \Gamma(s) W_n(s) ds = \frac{2}{SV_\infty^2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i W_i^n \Delta s_i, \quad (1)$$

$$Y_a = 2\rho_\infty V_\infty \sum_{i=1}^n \Gamma_i \Delta z_i; \quad c_{y_a} = \frac{4}{SV_\infty} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \Delta z_i. \quad (2)$$

Здесь s — контур вихревого следа в плоскости Трефтца, S — площадь крыла, V_∞ — скорость набегающего потока, W_i^n — нормальная к поверхности вихревой пелены составляющая скорости, индуцируемая свободными вихрями в плоскости Трефтца на i -ом элементе пелены. В процессе оптимизации определяется распределение циркуляции Γ_i вдоль размаха несущей системы при заданной подъемной силе (или коэффициенте подъемной силы). Также возможен учет других ограничений (в частности, на величину изгибающего момента).

Для частичной оптимизации, имеющей сильное ограничение на неизменность геометрии базового крыла, требуется другой подход. В этом случае индуктивное

сопротивление должно учитывать взаимовлияние крыла и крылышка в следующем виде:

$$c_{x_i} = c_{x_{i1}} + c_{x_{i2}} + c_{x_{i3}} + c_{x_{i4}}, \quad (3)$$

где $c_{x_{i1}} = -\frac{4}{S} \sum_{k=1}^m \Gamma_k \Delta s_k \times \sum_{l=1}^m B_{kl} \Gamma_l$ — коэффициент индуктивного сопротивления на

крыле от скосов крыла,

$c_{x_{i2}} = -\frac{4}{S} \sum_{k=1}^m \Gamma_k \Delta s_k \times \sum_{j=1}^n B_{kj} \Gamma_j$ — коэффициент индуктивного сопротивления на крыле

от скосов крылышка,

$c_{x_{i3}} = -\frac{4}{S} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \Delta s_i \times \sum_{l=1}^m B_{il} \Gamma_l$ — коэффициент индуктивного сопротивления на

крылышке от скосов крыла,

$c_{x_{i4}} = -\frac{4}{S} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \Delta s_i \times \sum_{j=1}^n B_{ij} \Gamma_j$ — коэффициент индуктивного сопротивления на

крылышке от скосов крылышка, $B_{kl}, B_{kj}, B_{il}, B_{ij}$ — коэффициенты аэродинамического влияния.

Выражение для подъемной силы остается в прежнем виде (2). При этом все геометрические и аэродинамические параметры разделяются на два массива: для крыла $z_{k,l}, y_{k,l}, \Gamma_{k,l}$, где k, l изменяются от 1 до m и для концевого крылышка $z_{i,j}, y_{i,j}, \Gamma_{i,j}$, где i, j варьируется от 1 до n .

Несмотря на неизменность геометрии базового крыла, нагрузка по его размаху в процессе оптимизации будет несколько изменяться (особенно в концевых сечениях). Поэтому в данном методе используется итерационный подход, где на

начальном этапе задается некоторая исходная геометрия крылышка. Затем с помощью программы прямого расчета (программа AEROJET на базе панельного метода Морино [20, 21] определяется распределение исходной нагрузки по размаху крыла и концевой крылышка Γ_k^0 и Γ_i^0 (при заданном c_{y_a} задан). Далее, в процессе оптимизации вводится компенсирующая поправка на угол атаки $\delta\alpha$, а вариация циркуляции на крылышке описывается как $\delta\Gamma_i$.

Условие сохранения характера распределения нагрузки по размаху базового крыла служит в первом приближении условием неизменности его геометрии:

$$\Gamma_k = \Gamma_k^0 + \frac{\partial\Gamma_k}{\partial\alpha} \delta\alpha. \quad (4)$$

Тогда как на концевой крылышке распределение нагрузки запишется следующим образом:

$$\Gamma_i = \Gamma_i^0 + \frac{\partial\Gamma_i}{\partial\alpha} \delta\alpha + \delta\Gamma_i. \quad (5)$$

Производные $\partial\Gamma_k/\partial\alpha$ и $\partial\Gamma_i/\partial\alpha$, как и исходные циркуляции Γ_k^0 и Γ_i^0 , также получаются при проведении прямого расчета по программе AEROJET.

Затем составляется функционал Лагранжа и соответствующая система линейных уравнений (6), вычисляемая методом Гаусса. Необходимо отметить, что при частичной оптимизации запись функционала будет иметь значительно более сложный вид, чем в случае полной оптимизации, но на скорость вычисления это не влияет.

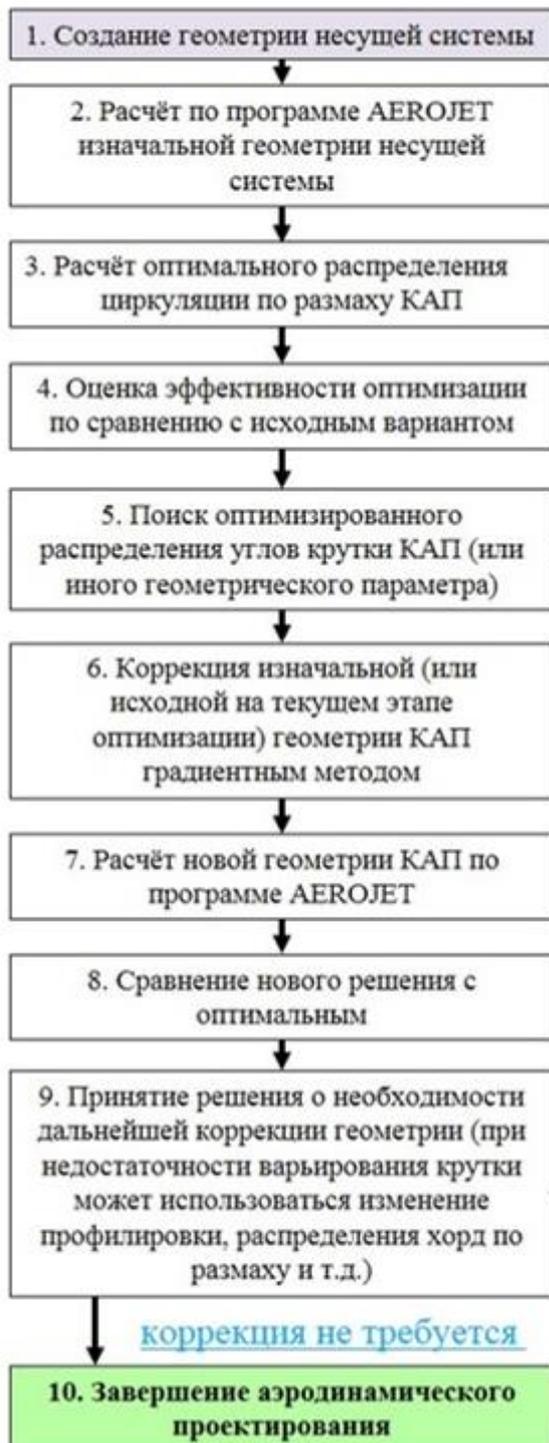
$$\Phi(\delta\Gamma_i, \delta\alpha) = c_{x_i} + \frac{4\kappa}{S} \left[\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial\Gamma_k}{\partial\alpha} \Delta z_k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Gamma_i}{\partial\alpha} \Delta z_i \right) \delta\alpha + \sum_{i=1}^n \Delta z_i \delta\Gamma_i \right],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\delta \Gamma_i)} = 0 \text{ — } n \text{ уравнений } (i = 1 \dots n),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\delta \alpha_i)} = 0 \text{ — } 1 \text{ уравнение,}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = 0 \text{ — } 1 \text{ уравнение,} \quad (6)$$

где k — неопределенный множитель Лагранжа.



По результатам этапа оптимизации и получения закона распределения Γ_i корректируется геометрия крылышка с помощью программы AEROJET. Полученная геометрия служит начальным условием для следующего этапа оптимизации с новой исходной геометрии крылышка.

Естественно, результат оптимизации не зависит от выбора исходной геометрии. Так, в расчетах на примере модели разрабатываемого в ФАУ «СибНИА им. С. А. Чаплыгина» самолёта-демонстратора перспективных технологий (расчетная схема несущей

системы которого представлена на рисунке 2) использовались исходные варианты крылышек с кривой $\varphi_k = 10^\circ$ и -10° . Оптимизация за 3–4 итерации приводит к одному результату — $\varphi_{k. \text{опт}} = -2,6^\circ$ (установка такой кривой концевой аэродинамической поверхности (КАП) обеспечивает прирост K_{max} приблизительно на 8,8 % по сравнению с крылом без специального концевой устройства, что было продемонстрировано в работе [16]). Полученные в итоге оптимизации геометрические параметры являются законченным результатом аэродинамического проектирования. Для удобства представления общий алгоритм аэродинамического проектирования показан на рисунке 1.

Стоит отметить, что в методе частичной оптимизации широко используется программа прямого расчета AEROJET для вычисления распределения циркуляции вдоль размаха несущей системы. В то же время вязкость заметно влияет на несущие свойства рассматриваемых систем, и соответственно, на интенсивность вихревой пелены в плоскости Трэфтца, в которой и определяется индуктивное сопротивление.

Для оценки влияния вязкости на расчет вихревого следа было проведено сопоставление результатов, полученных с помощью панельной программы AEROJET (невязкая жидкость), с результатами расчетов по программе OPENFORM, использующей при вычислении осредненные уравнения Навье-Стокса (вязкая жидкость).

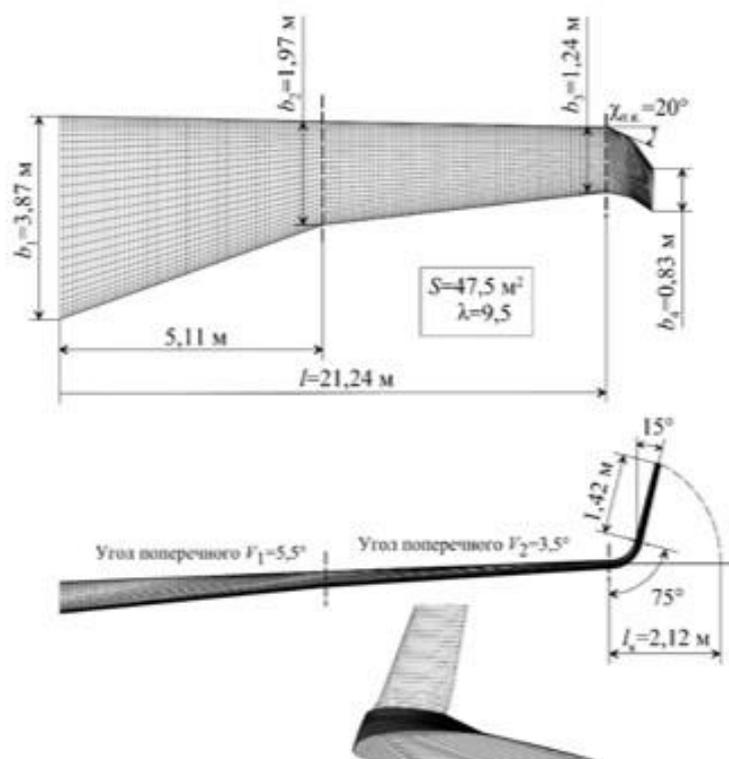


Рисунок 2 — Расчётная схема крыла самолёта-демонстратора перспективных технологий с концевым крылышком для проведения оптимизации.

Крутка концевого крылышка $\varphi_k = -10^\circ, -2,6, 10^\circ$

Исследование модели крыла (рисунок 3) в рамках вязкой жидкости проводилось с использованием двух моделей турбулентности: Spalart Allmaras и $k-\omega$ SST.

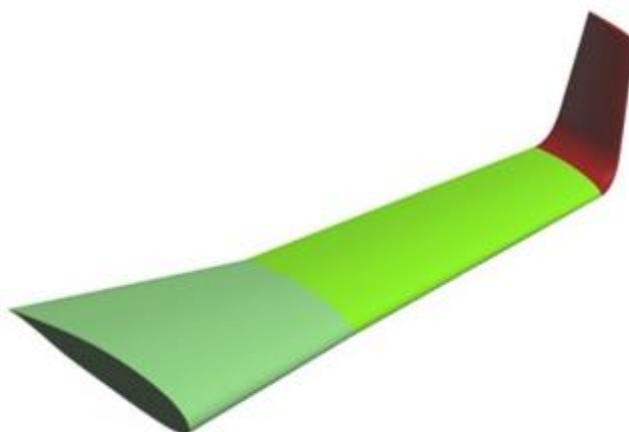


Рисунок 3 — Геометрия модели крыла самолёта-демонстратора

перспективных технологий с концевым крылышком для расчета в OPENFORM.

Показан пример с оптимизированной круткой концевого крылышка $\varphi_k = -2,6^\circ$

Для этого была подготовлена упорядоченная сетка с соответствующей блочной структурой: общее количество элементов — 10 млн. ячеек, число ячеек на профиле — 342 шт.

Расчет проводился с двойной точностью при использовании производных 2-го порядка в схемах дискретизации в диапазоне изменения угла атаки $\alpha = -2^\circ \dots 10^\circ$ с шагом в 2 градуса, так как наибольший интерес представляет именно крейсерский режим, углы атаки на котором, как правило, малы (рисунки 4–5). При анализе графиков отмечается закономерное завышение данных по c_{y_a} , полученных в рамках идеальной жидкости (т.е. по программе AEROJET), и хорошее согласование результатов расчетов по обеим моделям турбулентности между собой.

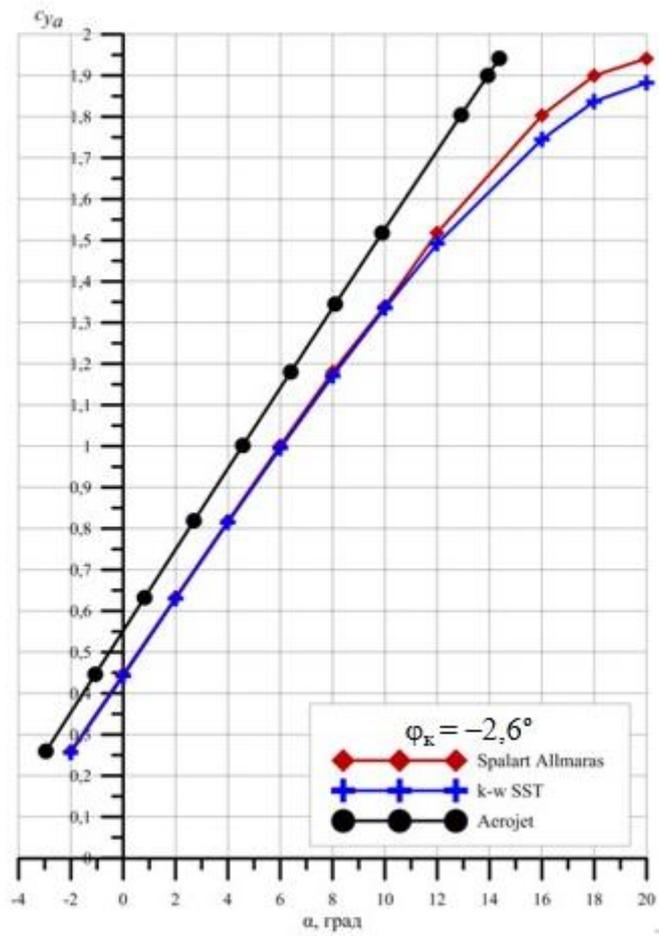


Рисунок 4 — Зависимость c_{y_a} от угла атаки α для варианта с оптимизированной круткой конечного крылышка $\varphi_k = -2,6^\circ$

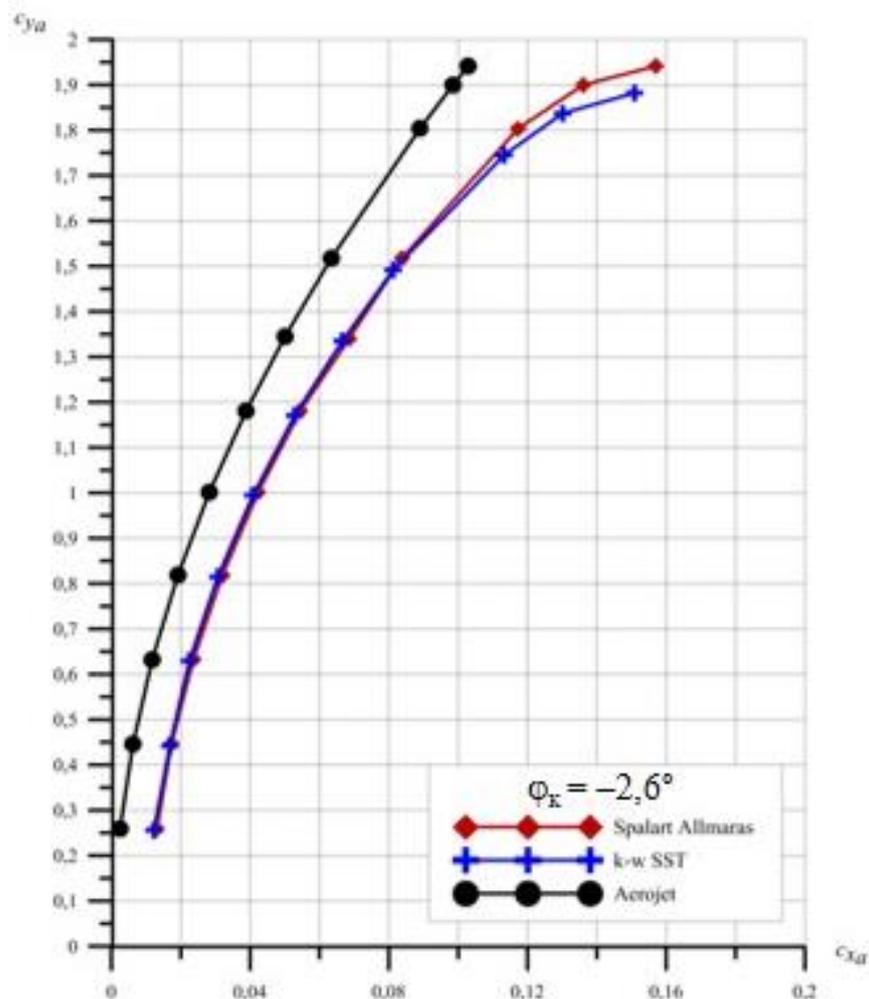


Рисунок 5 — Зависимость c_{ya} от c_{xa} для варианта с оптимизированной кривкой
концевого крылышка $\varphi_k = -2,6^\circ$

Сопоставление полученных результатов

Вязкость заметно снижает несущие свойства крыла (рисунок 4). Но индуктивное сопротивление сравнивается при одинаковых коэффициентах подъемной силы c_{ya} , как правило, на крейсерском режиме полета. При этом величина индуктивного сопротивления определяется законом распределения циркуляции Γ (или коэффициентом $c_{y_{сеч.}}$) по размаху.

При оптимизации c_{x_i} крыла с концевым крылышком на всех этапах минимизации индуктивное сопротивление определялось с помощью программы AEROJET. Поэтому необходимо оценить влияние вязкости на это распределение. В качестве примера рассмотрим вариант крыла с оптимизированной геометрией концевого крылышка (рисунок 6).

Проанализируем более подробно распределение коэффициента давления по размаху крыла при одинаковом $c_{y_a} \approx 0,62$. Здесь, на рисунке 6 сравниваются результаты расчетов крыла с оптимизированным вариантом концевого крылышка ($\varphi_k = -2,6^\circ$) в каждом из контрольных сечений по размаху. Необходимо отметить, что распределение давления в различных сечениях крыла и крылышка практически совпадают.

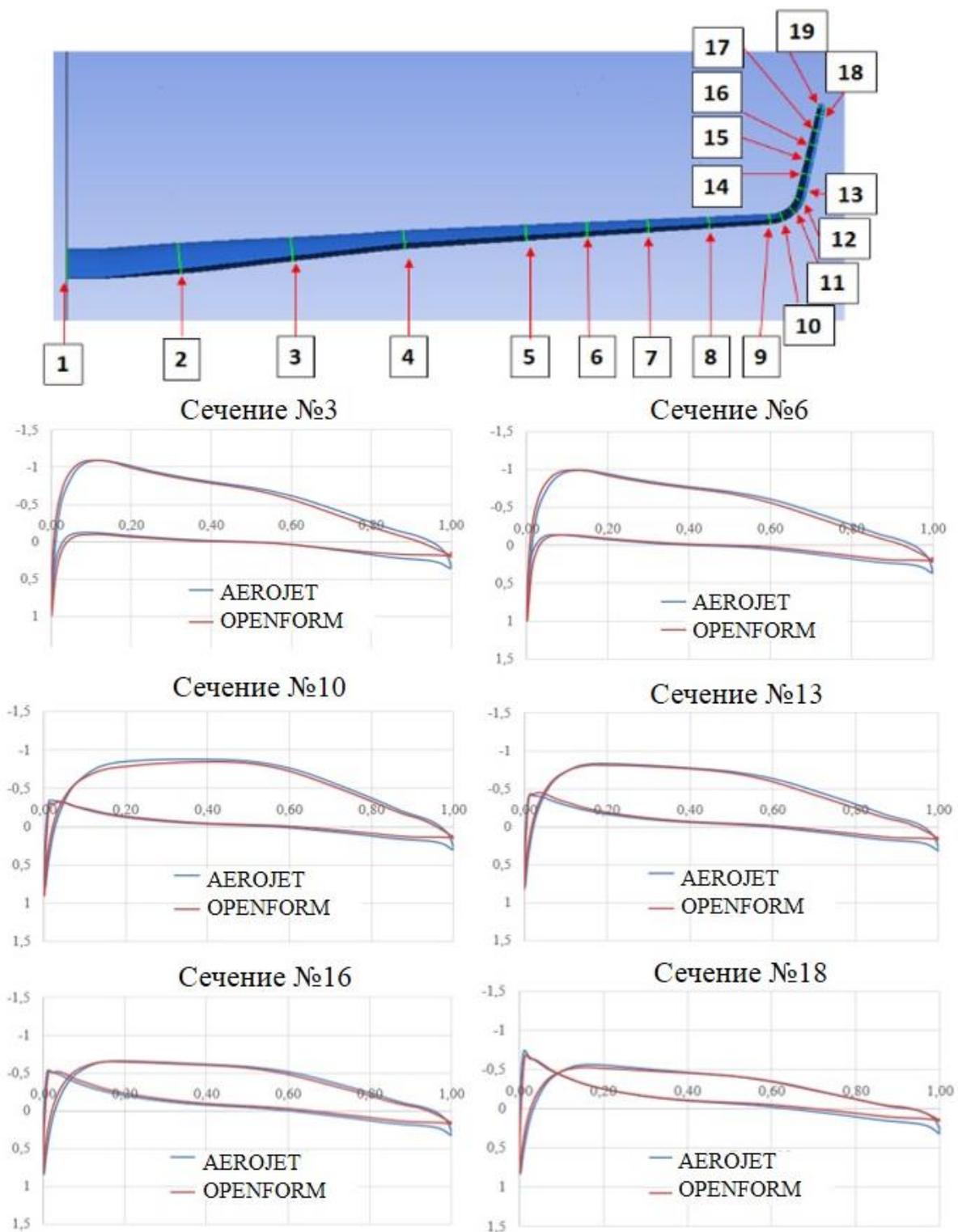


Рисунок 6 — Распределение c_p по размаху крыла в сечениях; $c_{y_a} \approx 0,62$

При этом поля давлений (распределение коэффициента давления на верхней поверхности крыла), построенные с использованием программы PARAVIEW, будут вести себя аналогичным образом (рисунок 7).

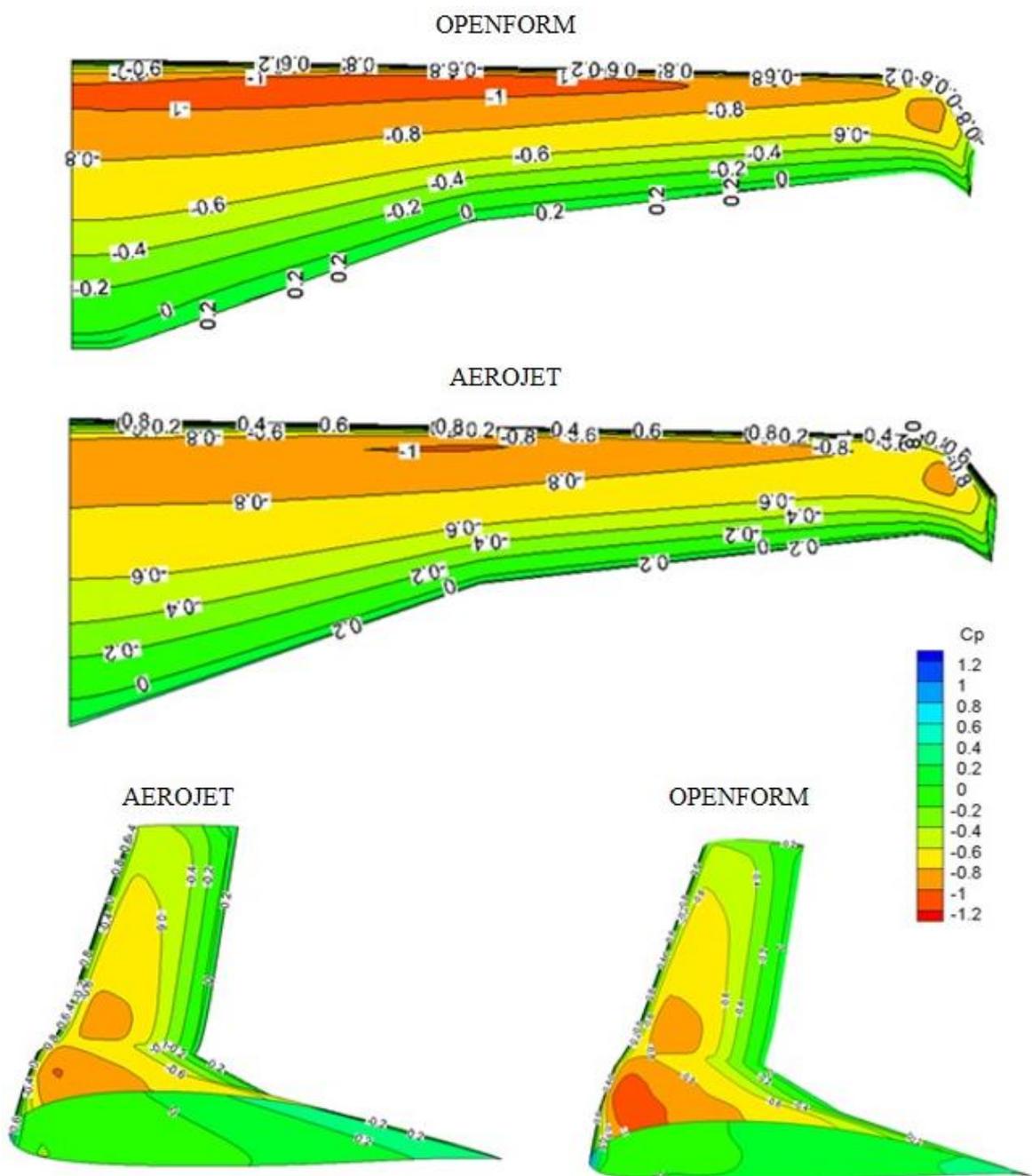


Рисунок 7 — Распределение c_p для варианта с оптимизированной круткой
концевого крылышка $\varphi_k = -2,6^\circ$ при $c_{y_a} \approx 0,62$

Для других вариантов геометрии несущей системы результат аналогичный.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для задач предварительного аэродинамического проектирования облика несущей системы ЛА реализованные методы оптимизации демонстрируют хорошее согласование с

результатами численного эксперимента, что обеспечивает их преимущество как быстродействующих (расчет вариантов КАП был проведен в течение 1–2 минут) и эффективных вычислительных инструментов.

Заключение

Благодаря гибкости настроек ограничений на этапе формирования функционала Лагранжа, реализованные методы оптимизации обеспечивают возможность минимизации индуктивного сопротивления несущих систем ЛА и/или их концевых частей любой сложности. А подтвержденное хорошее согласование с известными точными решениями, испытаниями в аэродинамической трубе и результатами численного эксперимента позволяет использовать его как быстродействующий вычислительный инструмент, позволяющий корректно сформулировать рекомендации по разработке геометрии несущей системы ЛА, как на первоначальном этапе проектирования, так и при модернизации уже ранее разработанных аэродинамических схем несущей системы ЛА, а также при их доработке установкой концевых крылышек.

Список источников

1. Корнев С.В., Пименов И.А. Численное исследование поля скоростей за крылом при различном расположении горизонтального оперения по высоте // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165488>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-07)

2. Степанов Р.П., Кусюмов А.Н., Михайлов С.А., Тарасов Н.Н. Экспериментальное исследование концевых вихрей за крылом конечного размаха // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=107894>
3. Luciano Demasi, Giovanni Monegato, Antonio Dipace, Rauno Cavallaro. Minimum Induced Drag Theorems for Joined Wings, Closed Systems, and Generic Biwings: Theory // Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, vol. 169, pp. 200-235. URL: DOI: [10.1007/s10957-015-0849-y](https://doi.org/10.1007/s10957-015-0849-y)
4. Головкин М.А., Кочиш С.И., Крицкий Б.С. Методика расчета аэродинамических характеристик комбинированной несущей системы летательного аппарата // Труды МАИ. 2012. № 55. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=30023>
5. Лазарев В.В., Павленко А.А., Разов А.А., Теперин Л.Л., Теперина Л.Н. Аэродинамическое проектирование летательного аппарата ромбовидной формы в плане // Учёные записки ЦАГИ. 2011. Т. 42. № 4. С. 30-37.
6. Whitcomb R.T. A Design Approach and Selected Wing Tunnel Results at High Sub-Sonic Speed for Wing-Tip Mounted Winglets, NASA Technical Reports Server (NTRS), 1976, 33 p.
7. Prandtl L. Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics: in 2 parts. Translated by the Staff of the National Advisory Committee for Aeronautics, 1923, Rep. no. 116, pp. 157–215. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930091180>
8. Munk M. Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei, Gottingen, 1919, 31 p. URL: <https://archive.org/details/isoperimetrische00munk/mode/2up>

9. Munk M. The Minimum Inducted Drag of Airfoils, U.S. NACA, 1921, Rep. no. 121, pp. 95–110. URL: https://archive.org/details/nasa_techdoc_19800006779/mode/2up
10. Betz A. Behavior of Vortex Systems, Technical Memorandum, NACA–TM–713, 1933, 32 p. URL: <http://hdl.handle.net/2060/19930094704>
11. Павленко А.А. Метод расчета минимального индуктивного сопротивления пространственных несущих систем // Ученые записки ЦАГИ. 1997. Т. 28. № 2. С. 56–61.
12. Захаров А.Г., Кудрявцев О.В. Определение минимального индуктивного сопротивления сложных несущих конфигураций с использованием методов оптимизации распределения циркуляции в плоскости Трэфтца // Труды ЦАГИ. 2014. Вып. 2734. С. 1–31.
13. Теперин Л.Л., Притуло Т.М., Орфинежад Ф.Э., Мьё Тхейн. Средства снижения индуктивного сопротивления крыла самолета // Труды МФТИ. 2017. № 4. С. 94–105.
14. Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Скоморохов С.И., Чернышёв И.Л. Расчётно-экспериментальные исследования скоростных крыльев перспективных магистральных самолётов // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=96601>
15. Borisova V.G., Silant'ev V.A. Optimization and Design of a Subsonic Aircraft Lifting System with the View to Minimize Induced Drag // Russian Aeronautics, 2020, vol. 63, pp. 50–58. DOI: [10.3103/S1068799820010079](https://doi.org/10.3103/S1068799820010079)

16. Borisova V.G., Silant'ev V.A. Optimization of winglets of lifting systems based on the minimum induced drag criterion // *Thermophysics and Aeromechanics*, 2022, vol. 29, no. 3, pp. 411–422. DOI: [10.1134/S086986432203009X](https://doi.org/10.1134/S086986432203009X)
17. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М.: Изд-во «Наука», 1965. - 242 с.
18. Дюрэнд В.Ф. Аэродинамика. – М.-Л.: Оборонгиз, 1939. Т.2. - 408 с.
19. Юрьев Б.Н. Экспериментальная аэродинамика. - М.-Л.: Изд-во Наркомата оборонной промышленности, 1938. Ч. 2. - 300 с.
20. Silantiev V.A., Ryaguzov E.A. Aerodynamic Analysis of Complex Aircraft Configurations with Engine Simulation Using The Potential Panel Method // *Proceedings of the Fourth Sino-Russian Symposium on Aerodynamics*, Chinese Aeronautical Establishment, 1995, pp. 41–56.
21. Morino L., Kuo S.S. Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configurations: General Theory // *Ayaa Journal*, 1974, vol. 12, no. 2. DOI: [10.2514/3.49191](https://doi.org/10.2514/3.49191)

References

1. Kornev S.V., Pimenov I.A. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165488>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-07)
2. Stepanov R.P., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A., Tarasov N.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 107. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107894>
3. Luciano Demasi, Giovanni Monegato, Antonio Dipace, Rauno Cavallaro. Minimum Induced Drag Theorems for Joined Wings, Closed Systems, and Generic Biwings: Theory,

- Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, vol. 169, pp. 200-235. URL: DOI: [10.1007/s10957-015-0849-y](https://doi.org/10.1007/s10957-015-0849-y)
4. Golovkin M.A., Kochish S.I., Kritskii B.S. *Trudy MAI*, 2012, no. 55. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=30023>
 5. Lazarev V.V., Pavlenko A.A., Razov A.A., Teperin L.L., Teperina L.N. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2011, vol. 42, no. 4, pp. 30-37.
 6. Whitcomb R.T. *A Design Approach and Selected Wing Tunnel Results at High Subsonic Speed for Wing-Tip Mounted Winglets*, NASA Technical Reports Server (NTRS), 1976, 33 p.
 7. Prandtl L. *Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics: in 2 parts. Translated by the Staff of the National Advisory Committee for Aeronautics*, 1923, Rep. no. 116, pp. 157–215. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930091180>
 8. Munk M. *Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges*, Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei, Gottingen, 1919, 31 p. URL: <https://archive.org/details/isoperimetrische00munk/mode/2up>
 9. Munk M. *The Minimum Inducted Drag of Airfoils*, U.S. NACA, 1921, Rep. no. 121, pp. 95–110. URL: https://archive.org/details/nasa_techdoc_19800006779/mode/2up
 10. Betz A. *Behavior of Vortex Systems*, Technical Memorandum, NACA-TM-713, 1933, 32 p. URL: <http://hdl.handle.net/2060/19930094704>
 11. Pavlenko A.A. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1997, vol. 28, no. 2, pp. 56–61.
 12. Zakharov A.G., Kudryavtsev O.V. *Trudy TsAGI*, 2014, no. 2734, pp. 1–31.

13. Teperin L.L., Pritulo T.M., Orfinezhad F.E., M'e Tkhein. *Trudy MFTI*, 2017, no. 4, pp. 94–105.
14. Bolsunovskii A.L., Buzoverya N.P., Skomorokhov C.I., Chernyshev I.L. *Trudy MAI*, 2018, no. 101. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=96601>
15. Borisova V.G., Silant'ev V.A. Optimization and Design of a Subsonic Aircraft Lifting System with the View to Minimize Induced Drag, *Russian Aeronautics*, 2020, vol. 63, pp. 50–58. DOI: [10.3103/S1068799820010079](https://doi.org/10.3103/S1068799820010079)
16. Borisova V.G., Silant'ev V.A. Optimization of winglets of lifting systems based on the minimum induced drag criterion, *Thermophysics and Aeromechanics*, 2022, vol. 29, no. 3, pp. 411–422. DOI: [10.1134/S086986432203009X](https://doi.org/10.1134/S086986432203009X)
17. Belotserkovskii S.M. *Tonkaya nesushchaya poverkhnost' v dozvukovom potoke gaza* (A thin lifting surface in the subsonic gas stream), Moscow, Izd-vo «Nauka», 1965, 242 p.
18. Dyurend V.F. *Aerodynamic Theory*, Julius Springer, Berlin, vol. 2, 1935, 392 p. URL: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.20039/mode/2up>
19. Yur'ev B.N. *Eksperimental'naya aerodinamika*. Ch. 2 (Experimental aerodynamics. Part 2), Moscow-Leningrad, Izd-vo Narkomata oboronnoi promyshlennosti, 1938, 300 p.
20. Silantiev V.A., Ryaguzov E.A. Aerodynamic Analysis of Complex Aircraft Configurations with Engine Simulation Using the Potential Panel Method, *Proceedings of the Fourth Sino-Russian Symposium on Aerodynamics*, Chinese Aeronautical Establishment, 1995, pp. 41–56.
21. Morino L., Kuo S.S. Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configurations: General Theory, *AYAA Journal*, 1974, vol. 12, no. 2. DOI: [10.2514/3.49191](https://doi.org/10.2514/3.49191)

Статья поступила в редакцию 21.03.2024

Одобрена после рецензирования 25.03.2024

Принята к публикации 26.04.2024

The article was submitted on 21.03.2024; approved after reviewing on 25.03.2024;
accepted for publication on 26.04.2024