

Труды МАИ. 2024. № 139
Trudy MAI. 2024. No. 139. (In Russ.)

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183448>

EDN: <https://www.elibrary.ru/BXRWVH>

ДИНАМИЧЕСКИЙ НАГРЕВ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПОДВИЖНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЁТОМ ТЕПЛООТДАЧИ НА ПОВЕРХНОСТИ

Татьяна Сергеевна Терещенко

Московский авиационный институт (национальный технический университет),

Москва, Россия

tereschenkots@mai.ru

Аннотация. Решается задача об определении напряженно-деформированного состояния металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полуплоскости. Для решения поставленной задачи проводится дополнительное исследование по решению вспомогательной задачи о нестационарном нагреве изотропной полуплоскости подвижным поверхностным источником тепла. Для этого строится математическая модель для обобщенного уравнения теплопроводности на основе классической теории и Грина-Нагди II типа.

Приведены математические постановки задач нестационарной теплопроводности, соответствующие моделям классической теплопроводности на основе закона Фурье и обобщённой модели Грина-Нагди II типа. С использованием интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам и Лапласа

по времени построены фундаментальные решения уравнений классической и обобщённых моделей теплопроводности, Грина-Нагди II типа. Представлены и проанализированы графические результаты. Показаны отличия рассмотренных моделей теплопроводности и даны рекомендации по их применению в практических расчётах.

Ключевые слова. нестационарная теплопроводность, обобщенные модели теплопроводности, модель Максвелла-Каттанео, модели теплопроводности Грина-Нагди, фундаментальные решения, интегральные преобразования, термоупругость, температурные напряжения, подвижный источник, лазерное излучение

Для цитирования: Терещенко Т.С. Динамический нагрев полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности

// Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183448>

Original article

DYNAMIC HEATING OF A HALF-PLANE WITH A MOBILE LASER RADIATION SOURCE CONSIDERING HEAT TRANSFER ON THE SURFACE

Tatyana S. Tereshchenko

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

tereschenkots@mai.ru

Abstract. When a solid body is exposed to laser radiation, the properties of its material change significantly. The peculiarities of heating with laser radiation are associated with high rates of temperature growth and decrease, as well as its large gradients. This leads to significant differences in the mechanisms of thermal processes compared to other types of heating.

The problem of determining the stress-strain state of a metal-powder composition in the process of selective laser melting of a half-plane is solved. To solve this problem, an additional study is conducted to solve the auxiliary problem of nonstationary heating of an isotropic half-plane with a mobile surface heat source. For this purpose, a mathematical model is constructed for the generalized heat equation based on classical theory and Green-Naghdi type II.

Mathematical formulations of problems of nonstationary thermal conductivity corresponding to models of classical thermal conductivity based on Fourier's law and the generalized Green-Naghdi type II model are presented. Using integral Fourier transforms in spatial coordinates and Laplace transforms in time, fundamental solutions of the equations of classical and generalized models of thermal conductivity, Green-Naghdi type II, are constructed. Graphical results are presented and analyzed. The differences between the considered models of thermal conductivity are shown and recommendations for their application in practical calculations are given.

The solutions found correspond to the effect of a surface heat source concentrated in time and coordinates in the form of a delta function located in a thermally conductive half-plane.

The above solutions to problems of this kind will allow us to study the effects of high-intensity thermal fluxes of energy in new materials with non-classical heat-conducting properties with a high degree of accuracy.

Keywords: nonstationary thermal conductivity, generalized thermal conductivity models, Green-Naghdi thermal conductivity models, fundamental solutions, integral transforms, thermoelasticity, thermal stresses, mobile source, laser radiation

For citation: Tereshchenko T.S. Dynamic heating of a half-plane with a mobile laser radiation source considering heat transfer on the surface. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183448>

Введение

Как и при любом другом тепловом воздействии на материал неизменной характеристикой термического процесса является тепловой поток. Перенос тепла в твердых телах осуществляется известными механизмами теплопроводности [1-8].

При высокоинтенсивном нагреве, как правило, используется импульсный источник, время действия которого составляет порядка пикосекунд [9-**Error! Reference source not found.**]. В таком случае классическая модель теплопроводности Фурье не работает и необходимо использовать уравнения Каттанео Вернотта [13,14].

При воздействии на твердое тело лазерным излучением происходит изменение оптических и теплофизических свойств материала при его термическом расширении, а также имеют место фазовые переходы из твердого состояния в жидкое в процессе

плавления [15,16]. Возможны также диффузионные процессы и некоторые химические реакции на поверхности и в приповерхностной области твердого тела.

Особенности нагрева материала лазерным излучением связаны с высокими скоростями роста и снижения температуры, а также большими её градиентами. Это приводит к значительным отличиям в механизмах протекания тепловых процессов по сравнению с другими видами нагрева.

Как известно, перенос тепловой энергии в веществе определяется процессами теплопроводности. Процесс переноса теплоты теплопроводностью возможен при условии, что температура в различных точках тела неодинакова и сопровождается изменением температуры на в пространстве, так и во времени.

Здесь решается задача об определении напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего вследствие селективного лазерного плавления в нестационарной постановке.

Для определения НДС, возникающего в процессе селективного лазерного плавления металлопорошковой композиции в пределах одного слоя, необходимо знать распределение поля температур в полуплоскости от воздействия лазерного источника [16]. Перенос тепла в твердых телах осуществляется известными механизмами теплопроводности. Для решения поставленной задачи делается дополнительное исследование по исследованию вспомогательной задачи о нестационарном нагреве изотропной полуплоскости подвижным поверхностным источником тепла. Для этого строится математическая модель для обобщенного

уравнения теплопроводности на основе классической теории и Грина-Нагди II типа [18].

Найденные решения соответствуют воздействию сосредоточенного во времени и координатах поверхностного источника тепла в виде дельта функции, расположенного в теплопроводящей полуплоскости. Для решения поставленной задачи используется интегральные одномерное преобразование Фурье по координате и интегральное преобразование Лапласа по времени. Соответствующие оригиналы построены последовательным обращением преобразования Лапласа и Фурье.

Постановка задачи

Положим, что в начальный момент времени $t=0$ в начале прямоугольной декартовой системы координат Oxz , связанной с поверхностью полуплоскости $z \geq 0$ начинает действовать источник тепла $q(x, z, t)$, который движется по поверхности полупространства $z=0$ по закону движения $x = x_0 + Vt$. Схематично данный процесс можно представить, как показано на рисунке 1.

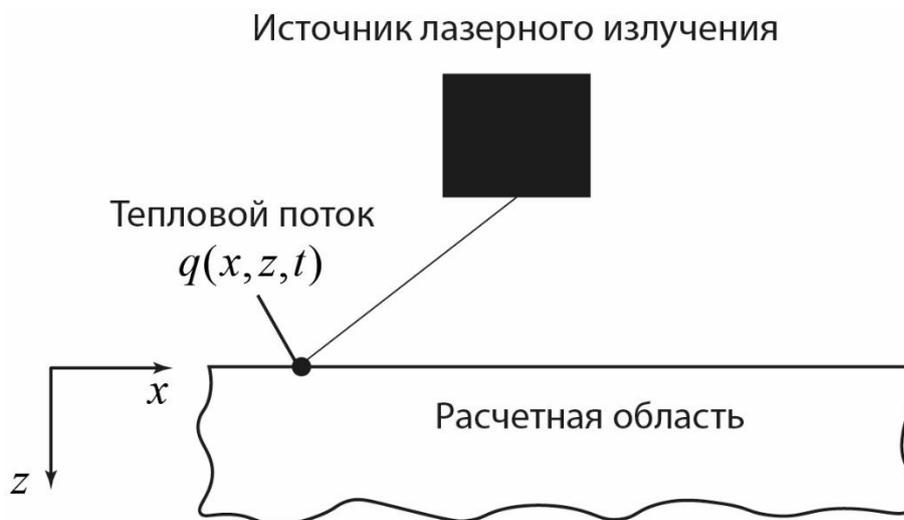


Рис. 1. Схематическое описание моделируемого процесса трехмерной

печати.

Координаты положения центра пятна нагрева в моменты времени $t > 0$ определяются параметрической зависимостью:

$$x = \varphi(t). \quad (1)$$

Полагаем, что среда является однородной и изотропной, а также что плотность и теплофизические постоянные не зависят от температуры. В этом случае распределение температуры $T(x, z, t)$ в среде подчиняется уравнению теплопроводности. При этом рассматриваются классическое уравнение теплопроводности и уравнение Грина-Нагди II.

Модель теплопроводности Грина-Нагди

Для вывода линеаризованного уравнения теплопроводности используется второй закон термодинамики, математическим выражением которого является уравнение баланса энтропии. При этом, с учетом физического закона для энтропии приходим к общему уравнению теплопроводности (здесь рассматривается плоская задача $y = 0$)

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q^{(e)}. \quad (3)$$

где ρ – плотность среды, c_ε – коэффициент удельной теплоёмкости при постоянной деформации, $T = T_1 - T_0$ – приращение температуры. T_0 – начальная температура, $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ – вектор объёмной плотности теплового потока, $q^{(e)}$ – массовая

плотность объёмных источников тепла. Здесь и далее точка над функцией означает её производную по времени.

Из общего уравнения теплопроводности вытекают как классическая, так и различные обобщённые теории [2]. Различия между ними состоят в разных законах теплопроводности, связывающих приращение температуры $T(x, z, t)$ с плотностью теплового потока $\mathbf{q}(x, z, t)$.

Существуют три типа модели теплопроводности Грина-Нагди [2]. Модель первого типа совпадает с классической моделью теплопроводности, в основе которой лежит закон Фурье.

$$\mathbf{q}(x, z, t) = -\kappa \text{grad } T(x, z, t) \quad (4)$$

Здесь κ - коэффициент температуропроводности.

Модели второго и третьего типа сильно отличаются, поскольку они основаны на дополнительном параметре теплового состояния, названным *тепловое смещение* $\alpha(\mathbf{x}, t)$, которое определяется как:

$$\alpha(x, y, z, t) = \alpha_0 + \int_0^t T(x, z, t) d\xi, \quad \alpha_0 = \alpha|_{t=0}. \quad (5)$$

Модель Грина-Нагди III типа характеризуется следующим законом теплопроводности:

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = -\kappa \text{grad } T(x, y, z, t) - \tilde{\kappa} \text{grad } \alpha(x, y, z, t), \quad (6)$$

где $\tilde{\kappa}$ – скорость теплопроводности.

Если в (6) положить $\tilde{\kappa} = 0$, то придём к классической модели теплопроводности Фурье (модель Грина-Нагди I типа). Если же положить $\kappa = 0$, то получим модель теплопроводности Грина-Нагди II типа.

Отметим, что уравнение нестационарной теплопроводности Грина-Нагди II имеет гиперболический тип – единственное из всех уравнений имеющее вид классического волнового уравнения.

На основе представленных выше моделей рассмотрим нестационарные процессы распространения тепла в неограниченной теплопроводной среде в двумерной постановке. Введём декартову прямоугольную систему координат Oxz . В дальнейшем всем функциям, переменным и параметрам придадим безразмерную форму. Для этого используем систему безразмерных величин (размерные величины обозначены символом «*»):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad z = \frac{z^*}{L}, \quad t = \frac{c_T t^*}{L}, \quad c_T^2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\rho c_\varepsilon}, \\ T &= \frac{T^*}{T_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{\rho c_\varepsilon c_T L}, \quad q^{(e)} = \frac{q^{*(e)} L}{c_\varepsilon c_T T_0}, \quad t_R = \frac{c_T t_R^*}{L}. \end{aligned} \quad (7)$$

где L – характерная длина.

В безразмерных величинах (7) уравнения, представленных выше теорий теплопроводности, примут следующий вид.

Теория Грина-Нагди I типа (классическое уравнение теплопроводности):

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \Delta T(x, y, z, t) \quad (8)$$

Теория Грина-Нагди II типа:

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \Delta T(x, y, z, t) \quad (9)$$

В случае неограниченной среды полагаем, что решения уравнений (8-9) должны удовлетворять условию ограниченности на бесконечности:

$$T(x, z, t)|_{r \rightarrow \infty} = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (10)$$

Полагаем, что начальные условия являются однородными:

$$T(x, y, z, t)|_{t=0} = \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (11)$$

На поверхности полупространства имеют место граничные условия второго рода. Они принимают следующий вид:

$$-\kappa \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} + \beta T(x, y, z, t) \Big|_{z=0} = q[x - \varphi(t), t]. \quad (12)$$

На бесконечности температура полагается ограниченной

$$T(r, t) = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Функция влияния поверхностного источника тепла

Для решения поставленной задачи решим вспомогательную задачу о сосредоточенном источнике тепла на поверхности полуплоскости. В этом случае будем рассматривать плоскую задачу (Рис. 1).

Начально-краевая задача на основе теории Грина-Нагди I типа будет

иметь вид:

$$\frac{\partial G(x, z, t)}{\partial t} = \Delta G(x, z, t) \quad (14)$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$-\kappa \frac{\partial G(x, z, t)}{\partial z} + \beta G(x, z, t) \Big|_{z=0} = \delta(x)\delta(t), \quad (15)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, β - коэффициент теплообмена на границе $z = 0$.

$$G(x, z, t) = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Функцию $G(r, t)$ как решение задачи (14-16) назовём *функцией влияния поверхностного источника тепла*. В дальнейшем будем называть её просто *поверхностной функцией влияния*.

Исходя из принципа суперпозиции решение исходной задачи (14-16) является свёрткой функции влияния с правой частью граничного условия (12) по переменным x и по времени t :

$$T(x, z, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, z, t - \tau) q[\xi - \varphi(\tau), \tau] d\xi. \quad (17)$$

Таким образом, ключевым моментом является построение функции влияния поверхностного источника.

Для решения поставленной задачи применим к (14-16) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования

Фурье по пространственной переменной x с соответствующим параметром p (индекс « FL » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$\frac{d^2 G^{FL}(p, z, s)}{dz^2} - (s + p^2) G^{FL}(p, z, s) = 0, \quad (18)$$

$$-\kappa \frac{dG^{FL}(p, z, s)}{dz} + \beta G^{FL}(p, z, s) \Big|_{z=0} = 1, \quad G^{FL}(p, z, s) = O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Ограниченное при $z \rightarrow \infty$ решение уравнения (18) имеет вид:

$$G^{FL}(p, z, s) = A e^{-z\sqrt{s+p^2}} \quad (20)$$

Постоянную A находим из первого граничного условия в (26):

$$A = \frac{1}{\beta + \kappa\sqrt{s+p^2}}$$

В итоге получаем

$$G^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s+p^2}}}{\beta + \kappa\sqrt{s+p^2}} \quad (21)$$

Для построения оригинала сначала обратим интегральное преобразование Лапласа:

$$G^F(p, z, t) = \frac{e^{-p^2 t}}{\kappa} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4at}}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}\beta}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left(\frac{\beta}{\kappa^2} + z\right)}}{\kappa} \right]. \quad (22)$$

Здесь $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительная функция ошибок, которая определяется через функцию ошибок $\operatorname{erf}(x)$

Затем последовательно обращаем интегральные преобразования Фурье используя соотношения [19]:

$$e^{-p^2 t} \xrightarrow{F} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \quad (23)$$

Тогда

$$G(x, z, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\kappa\sqrt{\pi t}} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}\beta}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left(\frac{t\beta}{\kappa^2} + z\right)}}{\kappa} \right] \quad (24)$$

$$\text{При } \beta = 0 \quad G_0(x, z, t) = \frac{e^{-\frac{x^2+z^2}{4t}}}{2\kappa\pi t} \quad (25)$$

Функции влияния (24-25) позволяет определить поле температур поставленной задачи используя интеграл свертки (17). Рассмотрим сосредоточенный подвижный источник

$$q(x, t) = \delta[x - \varphi(t)] H(t) \quad (26)$$

Тогда из интеграла свертки (17) с учетом выражения (24) получаем:

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, z, t - \tau) \delta[\xi - \varphi(\tau)] H(\tau) d\xi = \\ &= \int_0^t G(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (27)$$

С учетом функции влияния (24) поле температур (27) для произвольного движения источника по поверхности рассматриваемого плоского тела $\varphi(\tau)$ будет иметь вид:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{[x-\varphi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\beta\sqrt{t-\tau}}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left[\frac{\beta(t-\tau)}{\kappa^2} + z\right]}}{\kappa} \right] d\tau$$

(28)

В качестве тестового примера рассмотрим равномерное движение источника по границе $z=0$ полуплоскости. В этом случае полагаем в выражении (28) $\varphi(\tau) = V\tau$ здесь V - некоторая постоянная размерности скорости. Тогда получаем:

$$T(x, z, t) = \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(x-V\tau)^2}{4(t-\tau)}} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\beta\sqrt{t-\tau}}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left[\frac{\beta(t-\tau)}{\kappa^2} + z\right]}}{\kappa} \right] d\tau$$

(29)

Температурный поток в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{dT(x, y, z, t)}{dz} = \frac{1}{\kappa\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(x-V\tau)^2}{4(t-\tau)}} \left\{ -\frac{2ze^{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}}}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^2} + \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{e^{-\left[\frac{z^2}{4(t-\tau)} + \frac{z\beta}{\kappa} + \frac{\beta^2}{\kappa^2} + \frac{z\beta^2(t-\tau)}{\kappa^3}\right]}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\beta\sqrt{t-\tau}}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left[\frac{\beta(t-\tau)}{\kappa^2} + z\right]} \right] \right\} d\tau \quad (30)$$

Начально-краевая задача на основе теории Грина-Нагди II типа будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 G(x, z, t)}{\partial t^2} = \Delta G(x, z, t) \quad (31)$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$-\kappa \frac{\partial G(x, z, t)}{\partial z} + \beta G(x, z, t) \Big|_{z=0} = \delta(x) \delta(t), \quad (32)$$

$$G(x, z, t) = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Для решения этой задачи применим к (31-33) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной x с соответствующим параметром p (индекс « FL » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$\frac{d^2 G^{FL}(p, z, s)}{dz^2} - (s^2 + p^2) G^{FL}(p, z, s) = 0, \quad (34)$$

$$-\kappa \frac{dG^{FL}(p, z, s)}{dz} + \beta G^{FL}(p, z, s) \Big|_{z=0} = 1, \quad G^{FL}(p, z, s) = O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Ограниченное при $z \rightarrow \infty$ решение уравнения (40) имеет вид:

$$G^{FL}(p, z, s) = A e^{-z\sqrt{s^2+p^2}} \quad (36)$$

Постоянную A находим из первого граничного условия в (35):

$$A = \frac{1}{\beta + \kappa\sqrt{s^2 + p^2}}$$

В итоге получаем

$$G^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\beta + \kappa\sqrt{s^2 + p^2}} \quad (37)$$

Сначала найдем оригинал выражения (37) для $\beta = 0$.

$$G_0^{LF}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\kappa\sqrt{s^2+p^2}} \quad (38)$$

Обратное интегральное преобразование по Фурье будет:

$$G_0^L(r, z, s) = \frac{K_0(sr)}{\kappa\pi}. \quad (39)$$

Здесь $K_0(x)$ – функция Макдональда, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$

Затем обращаем интегральные преобразования Лапласа и получаем оригинал поверхностной функции влияния:

$$G_0(x, z, t) = \frac{H\left(t - \sqrt{x^2 + z^2}\right)}{\kappa\pi\sqrt{t^2 - x^2 - z^2}} \quad (40)$$

Далее найдем оригинал выражения (37). Для этого представим его в виде:

$$G^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\kappa\sqrt{s^2+p^2}} - \frac{e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\kappa\sqrt{s^2+p^2}} \frac{\beta}{\beta + \kappa\sqrt{s^2+p^2}} \quad (41)$$

Оригинал первого слагаемого в (47) найден ранее (см. выражение (40)), оригинал второго слагаемого в найти с помощью свойств преобразования Лапласа и Фурье затруднительно. Поэтому найдем асимптотическое решение в окрестности точки $s \rightarrow \infty$, то есть при малых временах $t \rightarrow 0$. Используем первые четыре слагаемых в асимптотическом разложении, тогда:

$$-\frac{\beta e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\kappa\sqrt{s^2+p^2}(\beta + \kappa\sqrt{s^2+p^2})} \xrightarrow{\text{Асимпт}} \beta \frac{e^{-zs}}{\kappa^2} \left[-\frac{1}{s^2} + \frac{z\left(\frac{2\beta}{zk} - p^2\right)}{2s^3} \right] \quad (42)$$

Обратное преобразование Лапласа выражения (47) определяется достаточно просто с помощью таблиц и свойств преобразования Лапласа:

$$\frac{\beta e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\kappa\sqrt{s^2+p^2}\left(\beta+\kappa\sqrt{s^2+p^2}\right)} \xrightarrow{\text{Асимпт } L} H(t-z) \frac{\beta}{\kappa^2} \left[-(t-z) + \frac{z\left(\frac{2\beta}{z\kappa} - p^2\right)}{4} (t-z)^2 \right] \quad (43)$$

Обратное преобразование Фурье выражения (43) найдем, используя формулу обращения преобразования Фурье:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2\beta}{zk}}} \left[\left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} \right)^2 - p^2 \right]^{\frac{3}{2}} \cos(xp) dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(2\sqrt{\frac{2\beta}{x^2 zk}} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} x \right) \quad (44)$$

Учитывая выражение (44), получаем оригинал второго слагаемого (41) в виде:

$$\frac{\beta e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\tilde{\kappa}}+p^2}}}{\kappa\sqrt{\frac{s^2}{\tilde{\kappa}}+p^2}\left(\beta+\kappa\sqrt{\frac{s^2}{\tilde{\kappa}}+p^2}\right)} \xrightarrow{LF} H(t-z) \frac{\beta}{\kappa^2} \left[-(t-z)\delta(x) + \frac{z}{4}(t-z)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(2\sqrt{\frac{2\beta}{x^2 zk}} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} x \right) \right] \quad (45)$$

В результате оригинал выражения (41) будет иметь вид:

$$G(x, z, t) = G_0(x, z, t) + H(t-z) \frac{\beta}{\kappa^2} \left[-(t-z)\delta(x) + \frac{z}{4}(t-z)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(2\sqrt{\frac{2\beta}{x^2 zk}} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} x \right) \right] \quad (46)$$

В этом выражении $H(\bullet)$ - функция Хевисайда, $\Gamma(\bullet)$ - гамма-функция, $J_{\frac{3}{2}}(\bullet)$ - функция Бесселя дробного порядка.

Используя полученную функцию влияния (46) поле температур для поставленной задачи определяется с помощью интеграла (27), тогда для сосредоточенного подвижного источника получаем:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, t) &= \int_0^t G(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau = \\
 &= \int_0^t G_0(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau + \\
 &+ \frac{\beta}{\kappa^2} \int_z^t \left[-(t - z)\delta(x) + \frac{z}{4}(t - z)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{x - \varphi(\tau)} \sqrt{\frac{2\beta}{zk}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \right. \\
 &\left. \times \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} x - \varphi(\tau) \right) \right] d\tau
 \end{aligned} \tag{47}$$

Анализируя полученные выражения и литературные данные можно с достаточной степенью точности положить в (47) $\beta = 0$ и для определения функции влияния при решения поставленной задачи возможно использовать оригинал трансформанты (38).

Найдем поле температур для этого случая, тогда полагая $\beta = 0$, получаем

$$T_0(x, z, t) = \int_0^t G_0(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau \tag{48}$$

Функция влияния (40) позволяет определить поле температур, поставленной задачи используя первый интеграл свертки (47). Здесь, как и ранее, используем формулу, описывающую сосредоточенный подвижный источник (26), тогда получаем:

$$\begin{aligned}
T_0(x, z, t) &= \int_0^t G_0(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau = \\
&= \int_0^{t - \sqrt{x^2 + z^2}} \frac{d\tau}{\kappa\pi\sqrt{(t - \tau)^2 - [x - \varphi(\tau)]^2 - z^2}} \quad (49)
\end{aligned}$$

Если положить в выражении (49) $\varphi(\tau) = V\tau$, где V - некоторая постоянная размерности скорости. Тогда поле температур определится из соотношения:

$$T_0(x, z, t) = \int_0^{t - \sqrt{x^2 + z^2}} \frac{d\tau}{\kappa\pi\sqrt{(t - \tau)^2 - (x - V\tau)^2 - z^2}} \quad (50)$$

На рис. 2 представлены распределения полей температур по времени, где T_1 - классическая теория, T_2 - теория Нагди II типа при различных значениях x вблизи верхней границы полуплоскости $z = 0.01$.

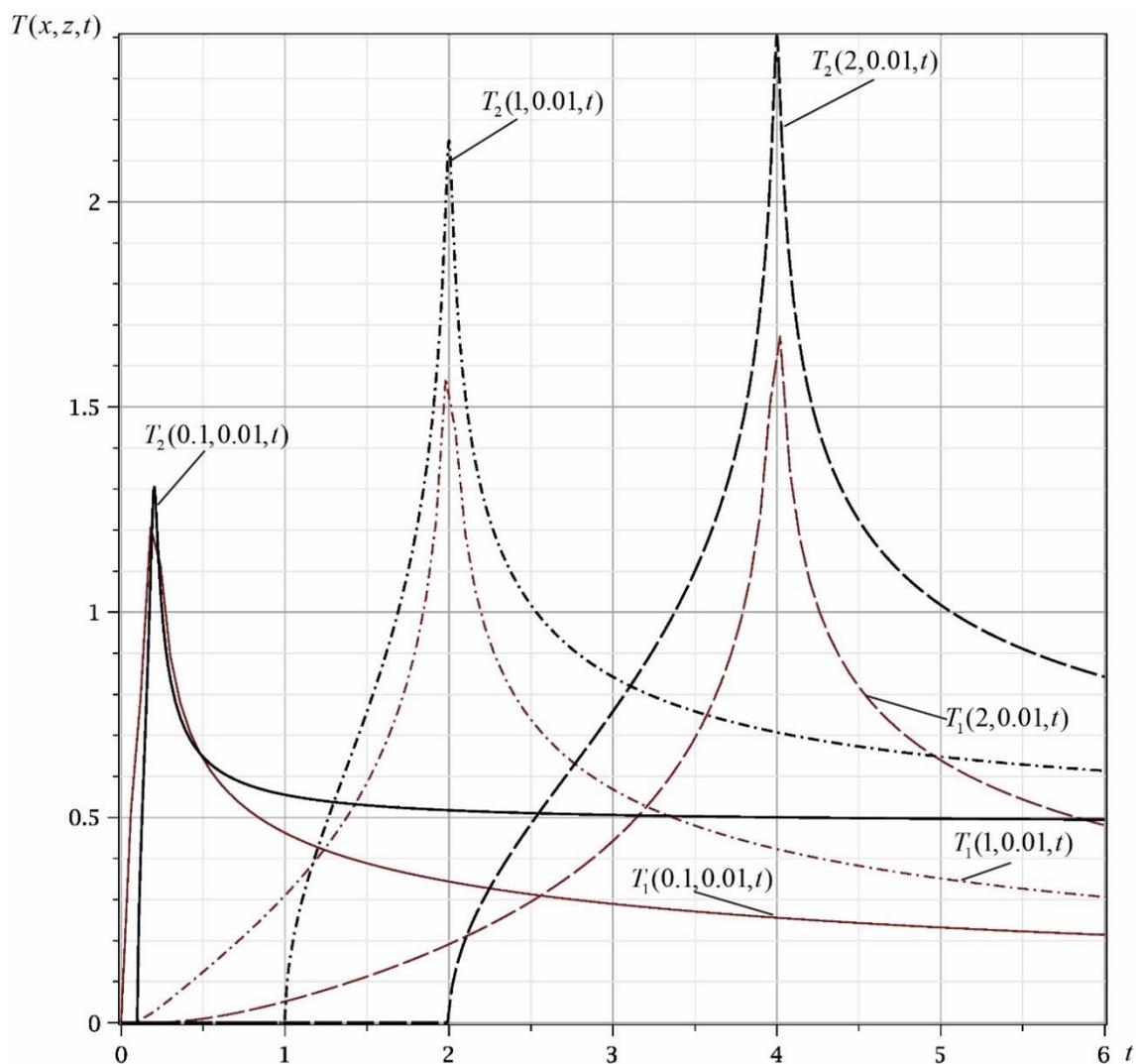


Рис. 2. Распределение полей температур в зависимости от времени t .

Из рис. 2 видно, что при достаточно малых значениях времен, поля температур для обеих теорий совпадают, поэтому для дальнейших расчетов в качестве температурной составляющей при определении напряженно-деформированного состояния будем использовать температуру, полученную по теории Нагди II.

На рисунках 3-5 приведены распределения температурных полей по теории Нагди II типа при различных значениях параметров x, z, t .

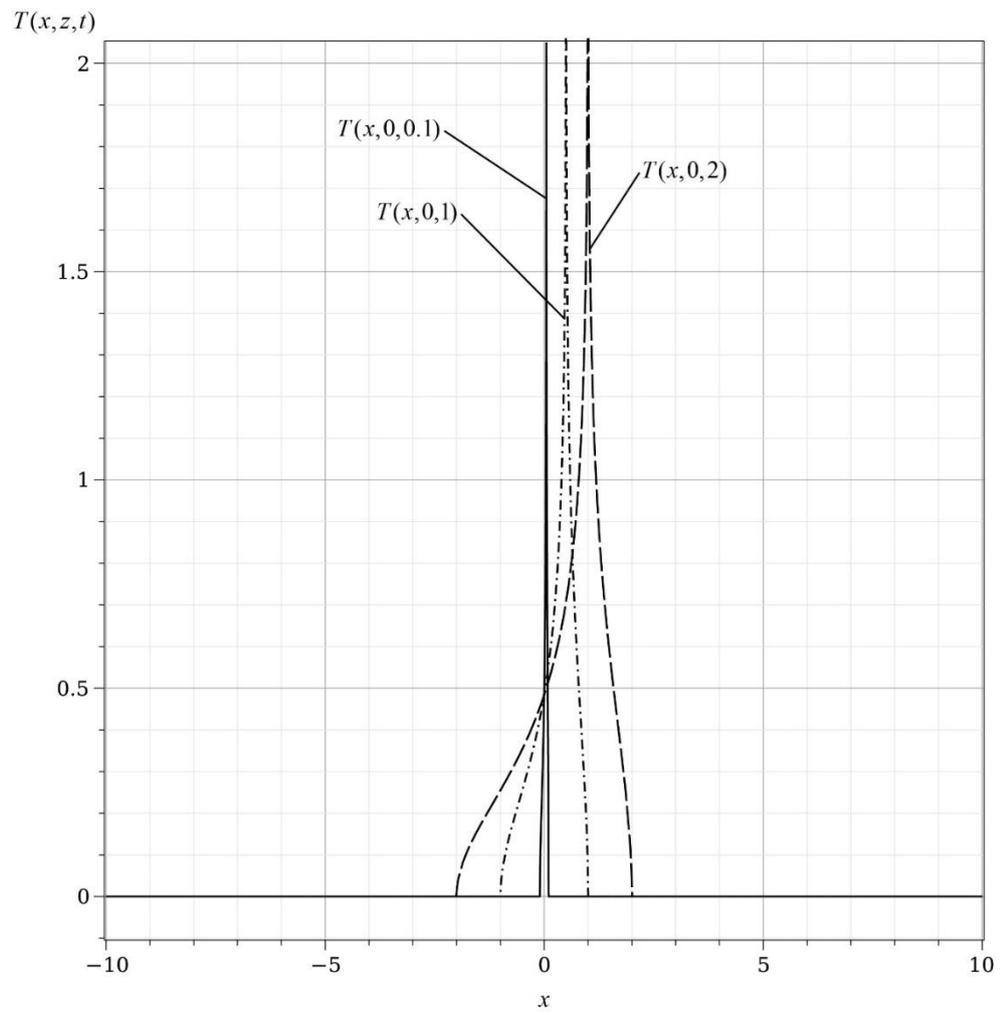


Рис. 3. Распределение полей температур вдоль верхней границы полуплоскости $z = 0$ при различном времени t .

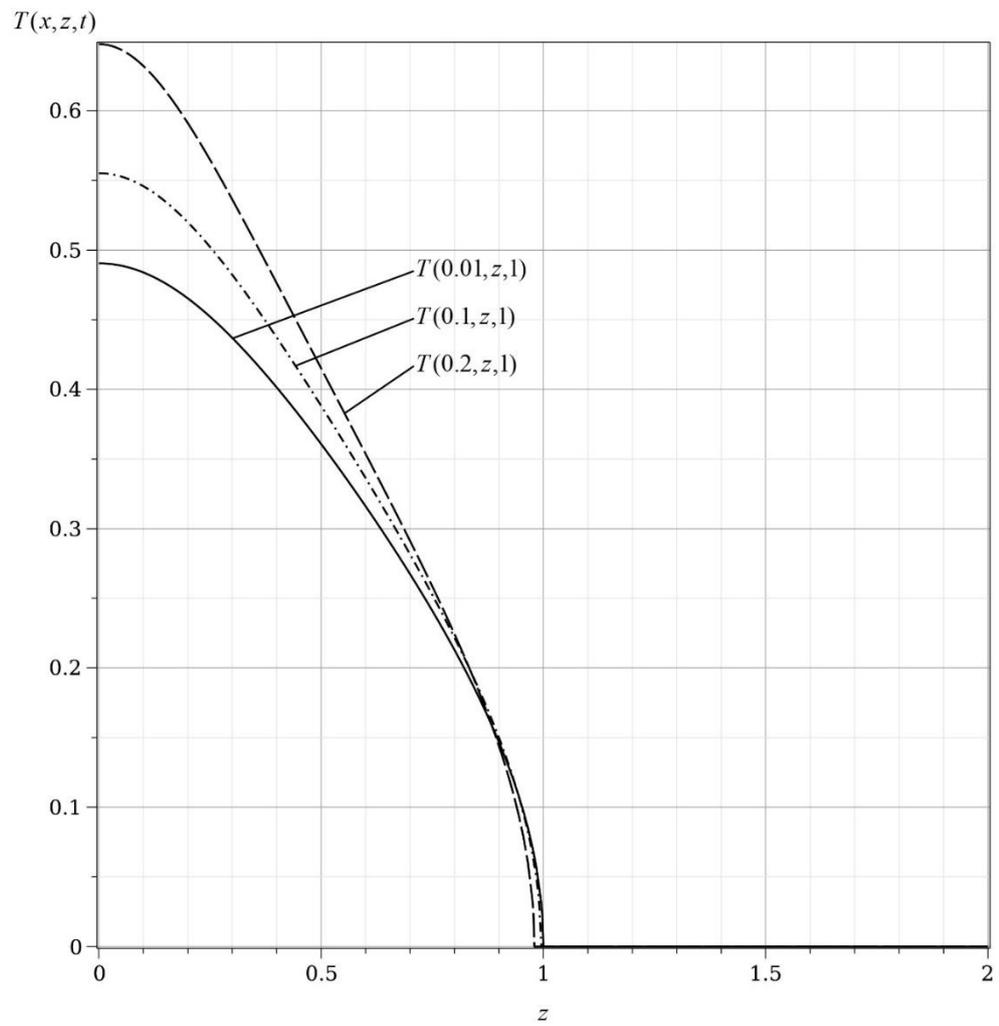


Рис. 4. Распределение полей температур по глубине в окрестности начальной точки $x = 0$ в момент времени $t = 1$.

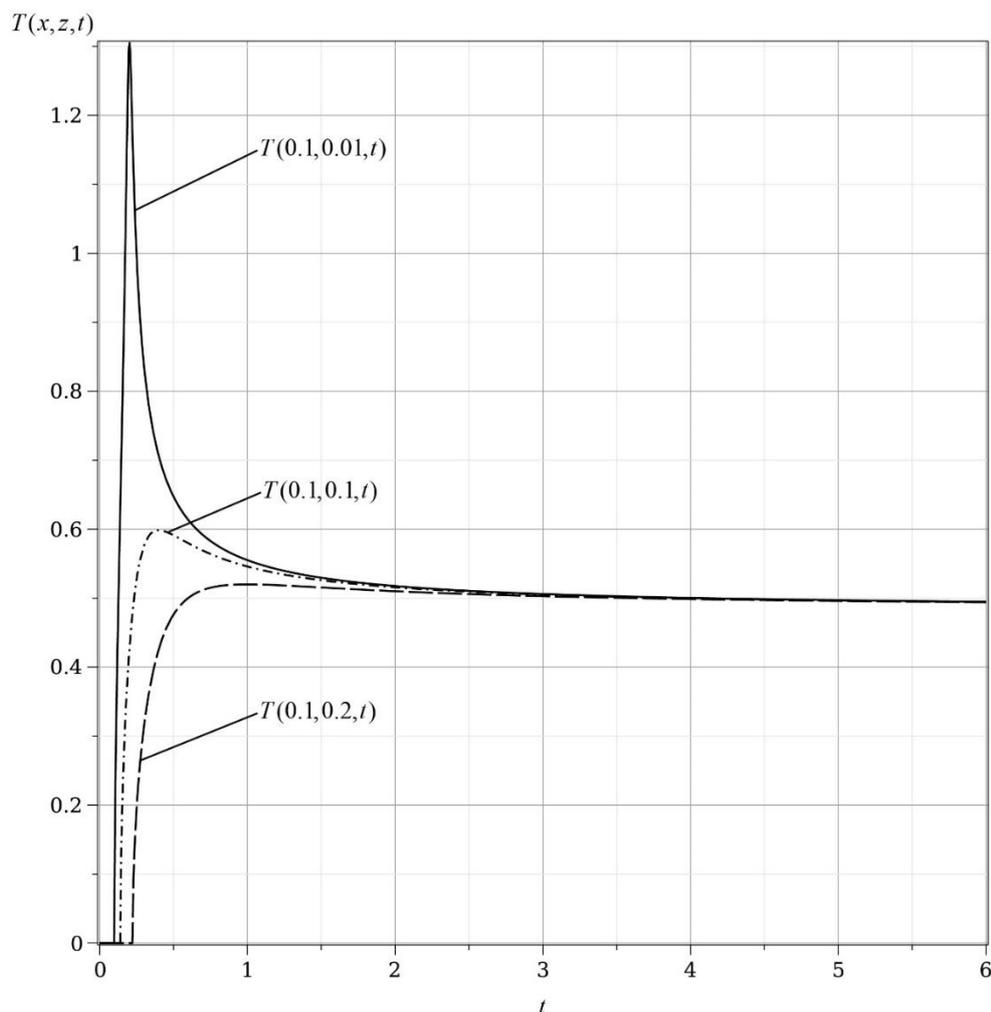


Рис. 4. Распределение полей температур по времени при $x = 0.1$ и различном z .

Расчёт напряжённо-деформированного состояния, индуцированного подвижным источником лазерного излучения

Напряжённо-деформированное состояние металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полу плоскости определим на основе решения системы дифференциальных уравнений термоупругости в предположении, что поверхностные нагрузки и массовые силы, а также внутренние источники тепла отсутствуют. Эта система уравнений состоит из уравнения теплопроводности и уравнений движения теории упругости с учётом температурных эффектов [20]:

$$\Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (51)$$

$$\Delta \mathbf{u} + \eta^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \gamma \operatorname{grad} T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (52)$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ – вектор перемещений; $\eta^2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$, λ , μ – упругие постоянные Ламе;

$\gamma = 3K\alpha$, α – коэффициент температурного расширения, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – модуль

объёмного расширения; $\chi = \frac{\gamma T_0}{\lambda}$, T_0 – начальная температура.

В этой системе уравнений пренебрегаем членом $\chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t}$ в уравнении теплопроводности. Такое пренебрежение оправдывается тем, что оно мало по сравнению со вторым слагаемым уравнения (51). Таким образом, получаем более простую несопряженную систему уравнений:

$$a\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (52)$$

$$\Delta \mathbf{u} + \eta^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \gamma \operatorname{grad} T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (53)$$

первое из которых совпадает с уравнением (31). Система уравнений (52) справедлива для пространства, для плоского случая полагаем в (53)

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u + \mathbf{k}w \quad (54)$$

тогда получаем скалярные уравнения Ламе для плоского случая:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \gamma \text{grad} T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (55)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \gamma \text{grad} T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (56)$$

Здесь $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ -параметры Ламе

Напряжения σ_{ij} связаны с деформациями ε_{ij} , $i, j = x, z$ законом Дюамеля-Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\theta - \gamma\mu T + 2\mu\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta - \gamma\mu T + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{xz} &= 2\mu\varepsilon_{xz}, \end{aligned} \quad (57)$$

Деформации и перемещения подчиняются соотношениям Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \theta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (58)$$

На рис. 6 представлены графики перемещений w от времени в различных точках полуплоскости

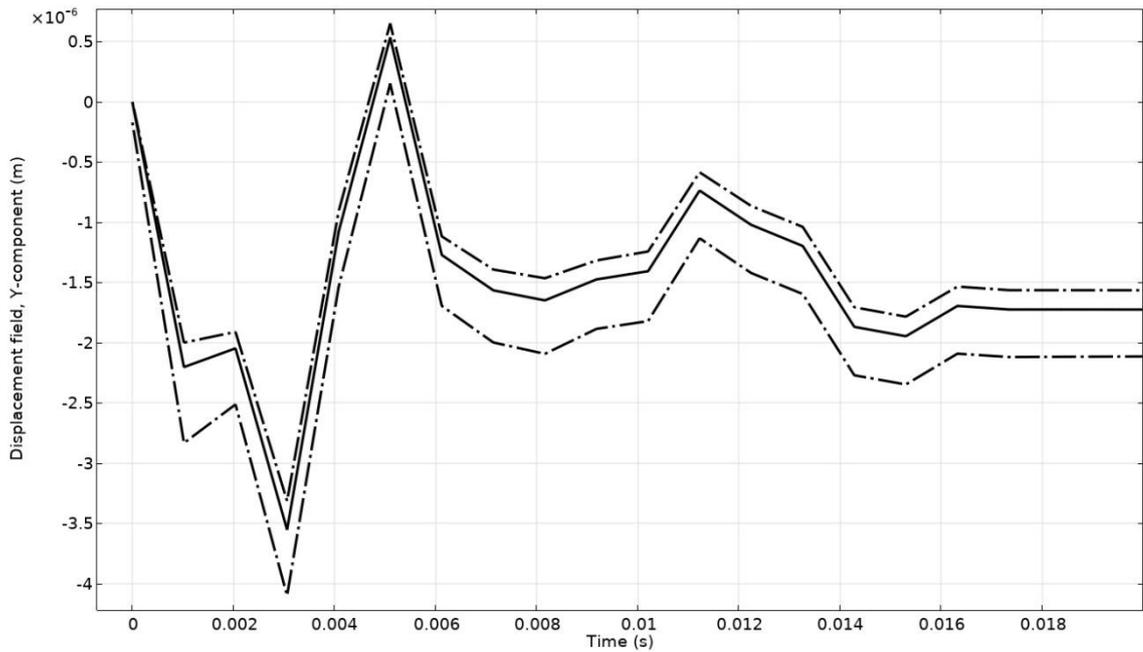


Рис. 6. Зависимость перемещений w по глубине в разные моменты времени t .

Заключение.

Получено интегральное представление, позволяющее получать решения задачи о произвольных поверхностных источниках тепла в полуплоскости.

Для определения напряженно-деформированного состояния полуплоскости при динамическом нагреве применены уравнения Ламе линейной теории несвязанной термоупругости с использованием обобщенного уравнения теплопроводности на основе классической теории и уравнения Грина-Нагди II типа с последующей его численной реализацией.

Приведенные решения задач подобного рода позволят с большой степенью точности исследовать воздействие высокоинтенсивных тепловых потоков энергии в новых материалах с неклассическими теплопроводящими свойствами.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Orekhov A.A.; Rabinskiy L.N.; Fedotenkov G.V. Fundamental Solutions of the Equations of Classical and Generalized Heat Conduction Models // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. No.165. P. 40
2. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized Unsteady Thermal Conductivity in a Half-Space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. No. 44. P. 4429–4437. DOI: [10.1134/S1995080223100086](https://doi.org/10.1134/S1995080223100086)
3. Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotenkov G. Analytical Model of Heating an Isotropic Half-Space by a Moving Laser Source with a Gaussian Distribution // Symmetry. 2022. No. 14. DOI: [10.3390/sym14040650](https://doi.org/10.3390/sym14040650)
4. Formalev V.F., Garibyan B.A., Orekhov A.A. Mathematical Modeling of Heat Transfer in Anisotropic Half-Space Based on the Generalized Parabolic Wave Heat Transfer Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. No. 43. P. 1842–1849. DOI: [10.1134/S1995080222100110](https://doi.org/10.1134/S1995080222100110)
5. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of Finite Heat Distribution Rate in the Process of Intensive Heating of Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. No. 43. P. 1832–1841. DOI: [10.1134/S1995080222100079](https://doi.org/10.1134/S1995080222100079)
6. Kuznetsova E.L., Orekhov A.A. Numerical Simulation of the Thermal Stress State in the 3D Printing Process within a Single Layer // In Proceedings of the AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2611. DOI: [10.1063/5.0121765](https://doi.org/10.1063/5.0121765)
7. Kriven G., Kuznetsova E., Rabinskiy L. The Study of the Temperature Field Propagation in a Nonlinear Anisotropic Space with the Relaxation Time of the Heat Flux //

In Proceedings of the AIP Conference Proceedings. 2023. V. 2910. DOI: [10.1063/5.0167863](https://doi.org/10.1063/5.0167863)

8. Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive Heat Transfer in Materials under Intense Heat Flows // Symmetry. 2022. No.14. DOI: [10.3390/sym14091950](https://doi.org/10.3390/sym14091950)

9. Qiu T.Q., Tien C.L. Short-pulse laser heating on metals // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1992. No. 35(3). P. 719-726. DOI: [10.1016/0017-9310\(92\)90131-B](https://doi.org/10.1016/0017-9310(92)90131-B)

10. Qiu T.Q., Tien C.L. Heat transfer mechanisms during short-pulse laser heating of metals // Journal of heat transfer. 1993. No. 115. P. 835-841. DOI: [10.1115/1.2911377](https://doi.org/10.1115/1.2911377)

11. Al-Nimr M.A., Arpaci V.S. Picosecond thermal pulses in thin metal films // Journal of Applied physics. 1999. No. 85 (5). P. 2517-2521. DOI: [10.1063/1.369568](https://doi.org/10.1063/1.369568)

12. Al- Nimr M.A. Heat transfer mechanisms during short-duration laser heating of thin metal films // International Journal of Thermophysics. 1997. V. 18 (5). P. 1257-1268. DOI: [10.1007/BF02575260](https://doi.org/10.1007/BF02575260)

13. Cattaneo Carlo. A form of heat-conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation // Comptes Rendus. 1958. V. 247. P. 431.

14. Vernotte P. Some possible complications in the phenomena of thermal conduction // Comptes Rendus. 1961. No. 252(1). P. 2190-2191.

15. Вехтева Н.А., Литовка Ю.В., Обухов А.Д. Повышение точности напечатанных изделий на фотополимерном принтере за счет преобразования положения в области печати // Труды МАИ. 2024. № 137. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181895>

16. Ермилов А.С., Балашов А.Ю., Гюльмагомедов Н.Х. Изготовление действующего макета антенной решетки изделий ракетно-космической техники с

использованием аддитивных технологий // Труды МАИ. 2024. № 135. URL:

<https://trudymai.ru/published.php?ID=179688>

17. Хоа В.Д., Зверьев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462>

18. Giorgi C., Grandi D., Pata V. On the Green-Naghdi type III heat conduction model // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2014. No. 19 (7). P. 2133-2143. DOI: [10.3934/dcdsb.2014.19.2133](https://doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.2133)

19. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. - М.: Высшая школа, 1967, - 467 с.

20. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970. - 256 с.

References

1. Orekhov A.A.; Rabinskiy L.N.; Fedotenkov G.V. Fundamental Solutions of the Equations of Classical and Generalized Heat Conduction Models. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2023. No. 165. P. 404–414. DOI: [10.26907/2541-7746.2023.4.404-414](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414)

2. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized Unsteady Thermal Conductivity in a Half-Space. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. No. 44. P. 4429–4437. DOI: [10.1134/S1995080223100086](https://doi.org/10.1134/S1995080223100086)

3. Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotenkov G. Analytical Model of Heating an Isotropic Half-Space by a Moving Laser Source with a Gaussian Distribution. *Symmetry*. 2022. No. 14. DOI: [10.3390/sym14040650](https://doi.org/10.3390/sym14040650)
4. Formalev V.F., Garibyan B.A., Orekhov A.A. Mathematical Modeling of Heat Transfer in Anisotropic Half-Space Based on the Generalized Parabolic Wave Heat Transfer Equation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. No. 43. P. 1842–1849. DOI: [10.1134/S1995080222100110](https://doi.org/10.1134/S1995080222100110)
5. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of Finite Heat Distribution Rate in the Process of Intensive Heating of Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. No. 43. P. 1832–1841. DOI: [10.1134/S1995080222100079](https://doi.org/10.1134/S1995080222100079)
6. Kuznetsova E.L., Orekhov A.A. Numerical Simulation of the Thermal Stress State in the 3D Printing Process within a Single Layer. *In Proceedings of the AIP Conference Proceedings*. 2022. V. 2611. DOI: [10.1063/5.0121765](https://doi.org/10.1063/5.0121765)
7. Kriven G., Kuznetsova E., Rabinskiy L. The Study of the Temperature Field Propagation in a Nonlinear Anisotropic Space with the Relaxation Time of the Heat Flux. *In Proceedings of the AIP Conference Proceedings*. 2023. V. 2910. DOI: [10.1063/5.0167863](https://doi.org/10.1063/5.0167863)
8. Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive Heat Transfer in Materials under Intense Heat Flows. *Symmetry*. 2022. No.14. DOI: [10.3390/sym14091950](https://doi.org/10.3390/sym14091950)
9. Qiu T.Q., Tien C.L. Short-pulse laser heating on metals. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1992. No. 35(3). P. 719-726. DOI: [10.1016/0017-9310\(92\)90131-B](https://doi.org/10.1016/0017-9310(92)90131-B)
10. Qiu T.Q., Tien C.L. Heat transfer mechanisms during short-pulse laser heating of metals. *Journal of heat transfer*. 1993. No. 115. P. 835-841. DOI: [10.1115/1.2911377](https://doi.org/10.1115/1.2911377)

11. Al-Nimr M.A., Arpaci V.S. Picosecond thermal pulses in thin metal films. *Journal of Applied physics*. 1999. No. 85 (5). P. 2517-2521. DOI: [10.1063/1.369568](https://doi.org/10.1063/1.369568)
12. Al- Nimr M.A. Heat transfer mechanisms during short-duration laser heating of thin metal films. *International Journal of Thermophysics*. 1997. V. 18 (5). P. 1257-1268. DOI: [10.1007/BF02575260](https://doi.org/10.1007/BF02575260)
13. Cattaneo Carlo. A form of heat-conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *Comptes Rendus*. 1958. V. 247. P. 431.
14. Vernotte P. Some possible complications in the phenomena of thermal conduction. *Compte Rendus*. 1961. No. 252(1). P. 2190-2191.
15. Vekhteva N.A., Litovka Yu.V., Obukhov A.D. Improving the accuracy of printed products on a photopolymer printer by transforming the position in the field of printing. *Trudy MAI*. 2024. No. 137. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=181895>
16. Ermilov A.S., Balashov A.Yu., Gyul'magomedov N.Kh. Manufacturing of the current layout of the antenna array of rocket and space technology products using additive technologies. *Trudy MAI*. 2024. No. 135. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179688>
17. Khoa V.D., Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. The stress-strain state of a thin rectangular strip under temperature exposure. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178462>
18. Giorgi C., Grandi D., Pata V. On the Green-Naghdi type III heat conduction model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*. 2014. No. 19 (7). P. 2133-2143. DOI: [10.3934/dcdsb.2014.19.2133](https://doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.2133)

19. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (Handbook of operational calculus). Moscow.: Vysshaya shkola Publ., 1967, 467 p.
20. Novatskii V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* (Dynamic problems of thermoelasticity). Moscow.: Mir Publ., 1970. 256 p.

Статья поступила в редакцию 18.11.2024

Одобрена после рецензирования 20.11.2024

Принята к публикации 25.12.2024

The article was submitted on 18.11.2024; approved after reviewing on 20.11.2024; accepted for publication on 25.12.2024