



Научная статья / Original Article

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188101>

EDN: <https://www.elibrary.ru/OWZUSV>

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИГРОТЕРМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ НА ОСНОВЕ УТОЧНЁННОЙ ТЕОРИИ

Нгок Доан Чан  

Государственный технический университет им. Ле Куи Дона,

Ханой, Вьетнам

 tranngocdoan@lqdtu.edu.vn

Цитирование: Нгок Доан Чан. Анализ напряженно-деформированного состояния слоистых композиционных цилиндрических оболочек при гигротермическом нагружении на основе уточнённой теории // Труды МАИ: электрон. журнал. № 147.

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188101>

Аннотация. В данной статье рассматривается напряженно-деформированное состояние слоистой композиционной цилиндрической оболочки, находящаяся под действием механических и гигротермических нагрузок. Для вывода двумерных уравнений равновесия и граничных условий в рамках уточненной теории применяется вариационный принцип Лагранжа. При этом перемещения и компоненты напряженно-деформированное состояние оболочки аппроксимируются по нормальной координате полными полиномами третьей степени, что обеспечивает более точный учёт поперечных сдвиговых деформаций. Распределение температуры и влажности по толщине оболочки предполагается линейным. Краевые задачи решаются аналитическим методом с применением преобразования Лапласа. Для уточнения поперечных напряжений используются уравнения трёхмерной теории упругости. Проведено сравнение

результатов, полученных в данной работе, с данными расчётов по другим теоретическим моделям, включая трёхмерную теорию упругости, что подтверждает высокую точность и достоверность предложенного подхода для расчёта оболочек с различной относительной толщиной. На основе численных расчётов выявлено влияние толщины оболочки и граничных условий на распределение прогибов и напряжений в середине оболочки и в приграничной зоне.

Ключевые слова: слоистая композиционная оболочка; цилиндрическая оболочка; напряженно-деформированное состояние; уточнённая теория оболочек; гигротермическая нагрузка.

ANALYSIS OF THE STRESS–STRAIN STATE OF LAMINATED COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS SUBJECTED TO HYGROTHERMAL LOAD BASED ON A REFINED THEORY

Ngoc Doan Tran ✉ 

Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam

✉ tranngocdoan@lqdtu.edu.vn

Citation: Ngoc Doan Tran. Analysis of the stress–strain state of laminated composite cylindrical shells subjected to hygrothermal load based on a refined theory // Trudy MAI. 2026. No. 147. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188101>

Abstract. Laminated composite cylindrical shells are widely used as primary load-bearing elements in various engineering fields, including aerospace, shipbuilding, and civil engineering. During operation, composite shells are often subjected to high pressures, temperatures, and moisture, leading to significant hygrothermal deformations and stresses due to the heterogeneity and anisotropy inherent in composite materials. Accurate determination of the mechanical and hygrothermal behavior of composite shells is a prerequisite for ensuring structural integrity and preventing failure modes such as delamination. In this paper the stress–strain state of a laminated composite cylindrical shell subjected to mechanical and hygrothermal loads is investigated. Within the framework of a refined theory, the variational principle of

Lagrange is employed to derive the two-dimensional equilibrium equations and boundary conditions. The displacements and stress–strain components of the shell are approximated along the thickness coordinate using full third-order polynomials, which provides a more accurate account of transverse shear deformations. The temperature and moisture distributions through the shell thickness are assumed to be linear. Boundary value problems are solved analytically using the Laplace transform method. The equations of three-dimensional elasticity theory are used to refine the transverse stress components. A comparison of the results obtained in this study with those from other theoretical models, including three-dimensional elasticity theory, demonstrates the high accuracy and reliability of the proposed approach for the analysis of shells with various relative thicknesses. Based on numerical analysis, the influence of shell thickness and boundary conditions on the distribution of deflections and stresses in the central part of the shell and in the boundary zone is revealed.

Keywords: laminated composite shell; cylindrical shell; stress–strain state; refined shell theory; hygrothermal load.

Введение

Слоистые композиционные цилиндрические оболочки широко применяются в качестве основных несущих элементов в различных областях техники, в том числе в авиационной, ракетно-космической, судостроительной и гражданской, благодаря их высокому отношению прочности к массе и эксплуатационной долговечности. В авиационных и ракетно-космических системах такие конструкции используются в качестве элементов фюзеляжей, корпусов ракет и силовых отсеков. В процессе эксплуатации композиционные оболочки часто подвергаются воздействию высоких давлений, температур и влажности, что приводит к возникновению значительных гигротермических деформаций и напряжений вследствие присущих композиционным материалам неоднородности и анизотропии. Точное определение механического и гигротермического поведения композиционных оболочек является

необходимым условием обеспечения конструктивной прочности и предотвращения таких видов разрушения, как расслоение.

В силу относительной простоты математической формулировки, классическая теория типа Кирхгофа-Лява [1], а также теория сдвиговых деформаций первого порядка типа Тимошенко-Рейсснера [2] широко используются при анализе тонкостенных элементов конструкций типа пластин и оболочек. Классическая теория, предполагающая сохранение нормали к срединной поверхности прямой и перпендикулярной после деформации, не учитывает поперечные касательные и нормальные напряжения и, хотя остаётся вычислительно эффективной для тонких оболочек, даёт существенные погрешности при исследовании толстых композиционных оболочек или зон искажения напряжённого состояния [3-5]. Теория сдвиговых деформаций первого порядка частично устраняет эти ограничения за счёт учёта постоянной по толщине поперечной деформации сдвига; однако необходимость введения поправочных коэффициентов для приближения реального распределения касательных напряжений и несоблюдение граничных условий на свободных поверхностях ограничивают её применимость [6, 7]. Кроме того, обе теории неадекватно описывают поведение оболочек в пограничных слоях, где наблюдается резкая концентрация напряжений и существенная роль поперечных нормальных напряжений [8].

В современных исследованиях все большее внимание уделяется термоупругому анализу многослойных [9, 10] и функционально-градиентных композиционных материалов [11, 12], включая материалы с углеродными нанотрубками (FG-CNTRC) [13, 14]. В работах Редди (Reddy) [10], Хдейра (Khdeir) [15] и других авторов применялись различные теории сдвиговой деформации для анализа температурных напряжений. Тем не менее, многие из этих исследований пренебрегают поперечной нормальной деформацией, что приводит к неточностям в прогнозировании межслойных напряжений, которые являются основными причинами расслоения в толстых композиционных конструкциях. Кроме того, наблюдается недостаток исследований напряженно-деформированного состояния (НДС) в зонах искажения напряженного состояния

композиционных цилиндрических оболочек при комбинированном механическом и гигротермическом нагружении с использованием теорий сдвиговых деформаций высокого порядка.

В данной работе предлагается анализ механического и гигротермического поведения слоистых композиционных цилиндрических оболочек на основе уточнённой (квази-трёхмерной) теории оболочек. Данная теория использует полиномиальные разложения третьего порядка для компонентов перемещений, что позволяет явным образом учитывать поперечные деформации сдвига и нормального растяжения-сжатия. Применяя полуаналитический подход, основанный на тригонометрических рядах и преобразовании Лапласа, данное исследование направлено на анализ термовлажно-упругого поведения слоистых композиционных цилиндрических оболочек на основе теории сдвиговых деформаций третьего порядка.

Основные уравнения расчета слоистой композиционной оболочки

Оболочка рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат ξ, θ, z (рисунок 1).

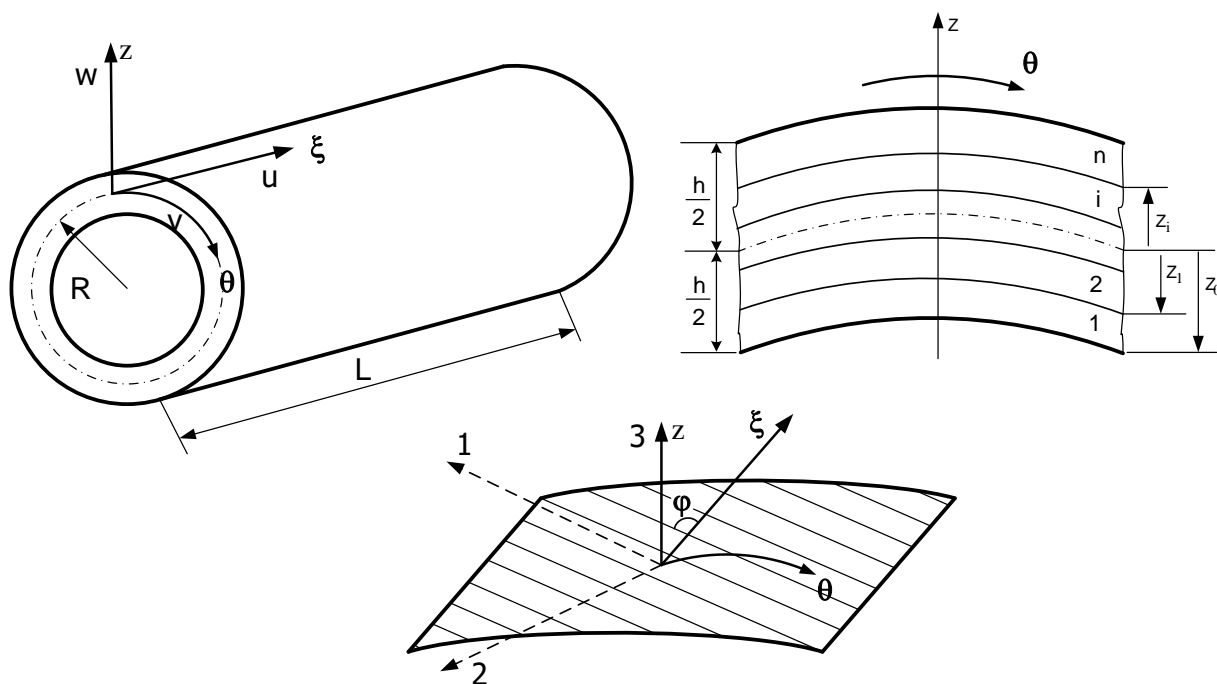


Рисунок 1 - Композиционная цилиндрическая оболочка

Перемещения $u(\xi, \theta, z)$, $v(\xi, \theta, z)$, $w(\xi, \theta, z)$ оболочки представляются в виде разложений по нормальной координате

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + z u_1(\xi, \theta) + \frac{z^2}{2!} u_2(\xi, \theta) + \frac{z^3}{3!} u_3(\xi, \theta), \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + z v_1(\xi, \theta) + \frac{z^2}{2!} v_2(\xi, \theta) + \frac{z^3}{3!} v_3(\xi, \theta), \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + z w_1(\xi, \theta) + \frac{z^2}{2!} w_2(\xi, \theta) + \frac{z^3}{3!} w_3(\xi, \theta). \end{aligned} \quad (1)$$

Линейные геометрические соотношения для слоистой композиционной цилиндрической оболочки в ортогональной криволинейной системе координат имеют вид:

$$\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon_0\}_k + \{\varepsilon_T\}_k + \{\varepsilon_M\}_k \quad (2)$$

где, $\{\varepsilon_0\}_k$, $\{\varepsilon_T\}_k$ и $\{\varepsilon_M\}_k$ - деформации оболочки, обусловленные механической, температурной и влажностной нагрузками соответственно.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\}_k &= \{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{\xi z}\}_k^t, \\ \varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Закон Гука для k -го слоя в локальной системе координат $O123$ (рисунок 1) имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta M \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}^{(k)}, \quad (4)$$

где,

$$C_{12}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} (v_{21}^{(k)} + v_{31}^{(k)} v_{23}^{(k)})}{\nu^{(k)}}, \quad C_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} (1 - v_{23}^{(k)} v_{32}^{(k)})}{\nu^{(k)}},$$

$$C_{13}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} (v_{31}^{(k)} + v_{21}^{(k)} v_{32}^{(k)})}{\nu^{(k)}}, C_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} (1 - v_{13}^{(k)} v_{31}^{(k)})}{\nu^{(k)}},$$

$$C_{23}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} (v_{32}^{(k)} + v_{12}^{(k)} v_{31}^{(k)})}{\nu^{(k)}}, C_{33}^{(k)} = \frac{E_3^{(k)} (1 - v_{12}^{(k)} v_{21}^{(k)})}{\nu^{(k)}},$$

$$C_{44}^{(k)} = G_{12}^{(k)}, C_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, C_{66}^{(k)} = G_{23}^{(k)},$$

$$\nu^{(k)} = \left(1 - v_{12}^{(k)} v_{21}^{(k)} - v_{23}^{(k)} v_{32}^{(k)} - v_{13}^{(k)} v_{31}^{(k)} - 2v_{13}^{(k)} v_{32}^{(k)} v_{21}^{(k)}\right).$$

Здесь, ΔT - приращение температуры, α_i - коэффициенты линейного теплового расширения в направлениях главных осей материала, ΔM - приращение влажности, β_i - коэффициенты линейного влажностного расширения в направлениях главных осей материала. E_i и ν_{ij} - модули Юнга и коэффициенты Пуассона, которые являются независимыми величинами и связаны между собой соотношениями:

$$\frac{\nu_{12}^{(k)}}{E_1^{(k)}} = \frac{\nu_{21}^{(k)}}{E_2^{(k)}}, \frac{\nu_{13}^{(k)}}{E_1^{(k)}} = \frac{\nu_{31}^{(k)}}{E_3^{(k)}}, \frac{\nu_{23}^{(k)}}{E_2^{(k)}} = \frac{\nu_{32}^{(k)}}{E_3^{(k)}}.$$

Приращение температуры и влажности по толщине определяются выражениями:

$$\Delta T(\xi, \theta, z) = T_0(\xi, \theta) + T_1(\xi, \theta) \frac{z}{h}, \quad (5)$$

$$\Delta M(\xi, \theta, z) = M_0(\xi, \theta) + M_1(\xi, \theta) \frac{z}{h}.$$

Связь между напряжениями и деформациями в общей системе координат $O\xi\theta z$ определяется следующей формулой:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\xi\theta} \\ \tau_{\xi z} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi - \alpha_\xi \Delta T - \beta_\xi \Delta M \\ \varepsilon_\theta - \alpha_\theta \Delta T - \beta_\theta \Delta M \\ \varepsilon_z - \alpha_z \Delta T - \beta_z \Delta M \\ \gamma_{\xi\theta} - \alpha_{\xi\theta} \Delta T - \beta_{\xi\theta} \Delta M \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где,

$$\begin{aligned}\alpha_\xi &= \alpha_1 \cos^2(\varphi) + \alpha_2 \sin^2(\varphi), \quad \alpha_\theta = \alpha_1 \sin^2(\varphi) + \alpha_2 \cos^2(\varphi), \\ \alpha_z &= \alpha_3, \quad \alpha_{\xi\theta} = 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\varphi) \cos(\varphi), \\ \beta_\xi &= \beta_1 \cos^2(\varphi) + \beta_2 \sin^2(\varphi), \quad \beta_\theta = \beta_1 \sin^2(\varphi) + \beta_2 \cos^2(\varphi), \\ \beta_z &= \beta_3, \quad \beta_{\xi\theta} = 2(\beta_1 - \beta_2) \sin(\varphi) \cos(\varphi).\end{aligned}$$

В этих уравнениях, β - угол ориентации волокон, образованный направлением армирования (ось 1) и координатной осью ξ (рисунок 1). Матрица $[Q]$ связана с матрицей $[C]$ следующим соотношением:

$$[Q]^{(k)} = [T]^{(k)t} [C]^{(k)} [T]^{(k)}.$$

Здесь $[T]^{(k)}$ - матрица перехода, принимаемая в виде

$$[T]^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi^{(k)} & \sin^2 \varphi^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \sin \varphi^{(k)} \cos \varphi^{(k)} \\ \sin^2 \varphi^{(k)} & \cos^2 \varphi^{(k)} & 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi^{(k)} \cos \varphi^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi^{(k)} & -\sin \varphi^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi^{(k)} & \cos \varphi^{(k)} & 0 \\ -\sin 2\varphi^{(k)} & \sin 2\varphi^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \varphi^{(k)} - \sin^2 \varphi^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Для получения основных уравнений теории оболочек используется вариационный принцип Лагранжа

$$\delta\Pi = \delta(U - A) = 0. \quad (7)$$

В уравнении (7) вариация потенциальной энергии деформации δU определяется как

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V (\sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\xi\theta} \delta \varepsilon_{\xi\theta} + \tau_{\xi z} \delta \varepsilon_{\xi z} + \tau_{\theta z} \delta \varepsilon_{\theta z}) dV = \\ &= \int_S \left[\sum_{i=1}^n \int_{h_{(i-1)}}^{h_{(i)}} (\sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\xi\theta} \delta \varepsilon_{\xi\theta} + \right. \\ &\quad \left. + \tau_{\xi z} \delta \varepsilon_{\xi z} + \tau_{\theta z} \delta \varepsilon_{\theta z}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) R^2 dz \right] d\xi d\theta.\end{aligned} \quad (8)$$

где n - число слоев оболочки.

Считая, что оболочка находится под действием внутреннего $q_{in}(\xi, \theta)$ и внешнего $q_{out}(\xi, \theta)$ давления, вариация работы δA внешней нагрузки представляется формулой

$$\delta A = \iint_{\xi \theta} \left[q_{out} \delta w_{out} \left(1 + \frac{h}{2R} \right) + q_{in} \delta w_{in} \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \right] R^2 d\xi d\theta, \quad (9)$$

где

$$w_{out} = w_0 + \frac{h}{2} w_1 + \frac{h^2}{8} w_2 + \frac{h^3}{48} w_3,$$

$$w_{in} = w_0 - \frac{h}{2} w_1 + \frac{h^2}{8} w_2 - \frac{h^3}{48} w_3.$$

Подставляя уравнения (8) и (9) в уравнение (7) и выполняя необходимые математические преобразования, получим систему 12 дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\xi}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(0)}}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + N_{\theta z}^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\xi}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(1)}}{\partial \theta} - RN_{\xi z}^{(0)} &= 0, & \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta}^{(1)}}{\partial \theta} - RN_{\theta z}^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\xi}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(2)}}{\partial \theta} - RN_{\xi z}^{(1)} &= 0, & \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta}^{(2)}}{\partial \theta} - RN_{\theta z}^{(1)} - N_{\theta z}^{(2)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\xi}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(3)}}{\partial \theta} - RN_{\xi z}^{(2)} &= 0, & \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta}^{(3)}}{\partial \theta} - RN_{\theta z}^{(2)} - 2N_{\theta z}^{(3)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\xi z}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta z}^{(0)}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{(0)} - Rp^{(0)} &= 0, & \frac{\partial N_{\xi z}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{(1)} - RN_z^{(0)} - Rp^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\xi z}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta z}^{(2)}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{(2)} - RN_z^{(1)} - Rp^{(2)} &= 0, & \frac{\partial N_{\xi z}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta z}^{(3)}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{(3)} - RN_z^{(2)} - Rp^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\left[N_{\xi}^{(0)}, N_{\xi}^{(1)}, N_{\xi}^{(2)}, N_{\xi}^{(3)} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \sigma_{\xi}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1, z, z^2/2, z^3/6 \right] dz,$$

$$\left[N_{\theta}^{(0)}, N_{\theta}^{(1)}, N_{\theta}^{(2)}, N_{\theta}^{(3)} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \sigma_{\theta}^{(k)} \left[1, z, z^2/2, z^3/6 \right] dz,$$

$$\left[N_z^{(0)}, N_z^{(1)}, N_z^{(2)} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \sigma_z^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1, z, z^2/2 \right] dz,$$

$$\left[N_{\theta\xi}^{(0)}, N_{\theta\xi}^{(1)}, N_{\theta\xi}^{(2)}, N_{\theta\xi}^{(3)} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \tau_{\theta\xi}^{(k)} \left[1, z, z^2/2, z^3/6 \right] dz,$$

$$\left[N_{\xi\theta}^{(0)}, N_{\xi\theta}^{(1)}, N_{\xi\theta}^{(2)}, N_{\xi\theta}^{(3)} \right] = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \tau_{\xi\theta}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1, z, z^2/2, z^3/6 \right] dz,$$

$$\left[N_{\xi z}^{(0)}, N_{\xi z}^{(1)}, N_{\xi z}^{(2)}, N_{\xi z}^{(3)} \right] = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \tau_{\xi z}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1, z, z^2/2, z^3/6 \right] dz,$$

$$\left[N_{\theta z}^{(0)}, N_{\theta z}^{(1)}, N_{\theta z}^{(2)}, N_{\theta z}^{(3)} \right] = \sum_{k=1}^{NL} \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \tau_{\theta z}^{(k)} \left[1, z, z^2/2, z^3/6 \right] dz,$$

$$p^{(i)} = q_{out} \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \frac{h^i}{2^i i!} + q_{in} \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Соответствующие краевые условия при $\xi = 0$ и $\xi = L/R$ принимают следующий вид:

- для жестко зашцеиленного края

$$u_i = v_i = w_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (11)$$

- для шарнирно опертого края

$$N_{\xi}^{(i)} = 0, \quad v_i = w_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

- для свободного края

$$N_{\xi}^{(i)} = N_{\xi\theta}^{(i)} = N_{\xi z}^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (13)$$

Решая уравнения (10) с учетом краевых условий (11) - (13), находим перемещения u_i , v_i и w_j . Напряжения σ_{ξ} , σ_{θ} , $\tau_{\xi\theta}$ определяются уравнением (6), а поперечные напряжения $\tau_{\xi z}$, $\tau_{\theta z}$, σ_z - интегрированием трехмерных уравнений равновесия теории упругости

$$\begin{aligned}
\tau_{\xi z} &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^z \left[\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\theta}}{\partial \theta} \right] dz, \\
\tau_{\theta z} &= -\frac{R}{(R+z)^2} \int_{-h/2}^z \left[\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 \frac{\partial \tau_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right] dz, \\
\sigma_z &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^z \left[\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta} \right] dz + \frac{R-h/2}{R+z} q_{in}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Для решения системы уравнений (10) используется операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа, как описано в [16]. Данный подход обладает рядом существенных преимуществ. Во-первых, благодаря автоматическому удовлетворению граничных условий на одном из краев оболочки, число произвольных постоянных сокращается вдвое. Во-вторых, правые части уравнений, соответствующие внешним нагрузкам, могут быть представлены не только аналитическими, но и разрывными функциями (в частности, функциями ступенчатого типа).

Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки

при гигротермическом нагружении

Оболочка под действием синусоидально распределенной нагрузки

В качестве примера рассмотрим слоистую композиционную цилиндрическую оболочку, шарнирно опертую по обоим краям. Упругие постоянные материала каждого слоя определяются следующими соотношениями [17]: $E_1 / E_2 = 25$, $E_3 = E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$. Оболочка находится под действием синусоидально распределенной нагрузки, приложенной к внутренней поверхности $q_{in} = q_0 \sin(\pi\xi R/L) \cos(4\theta)$. Относительная длина оболочки составляет $L/R=4$, а относительная толщина принимает следующие значения: $h/R=1/4, 1/10, 1/100$. В таблице 1 представлены безразмерные прогиб и нормальные напряжения однослойной оболочки (90°) для различных значений относительной толщины.

Безразмерные прогиб и нормальные напряжения находятся по формулам:

$$\bar{w} = \frac{10E_1 w}{q_o h (R/h)^4}, \quad \bar{\sigma}_\xi = \frac{10\sigma_\xi}{q_o (R/h)^2}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{10\sigma_\theta}{q_o (R/h)^2}, \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{q_o}.$$

Таблица 1

Сравнение результатов, полученных на основе различных теорий

Теория	\bar{w} $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \right.$ $\left. \theta = 0, z = 0 \right)$	$\bar{\sigma}_\xi$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \right.$ $\left. \theta = 0, z = -\frac{h}{2} \right)$	$\bar{\sigma}_\xi$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \right.$ $\left. \theta = 0, z = \frac{h}{2} \right)$	$\bar{\sigma}_\theta$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \right.$ $\left. \theta = 0, z = -\frac{h}{2} \right)$	$\bar{\sigma}_\theta$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \right.$ $\left. \theta = 0, z = \frac{h}{2} \right)$
$h/R = 1/4$					
ТТУ [17]	2.783	-0.2295	0.0981	-6.969	4.859
ТСДПП [4]	2.763	-0.0618	0.0855	-3.924	3.053
ТСДТП [4]	2.772	-0.2780	0.0943	-6.619	4.811
Данная работа	2.769	-0.2643	0.1085	-6.694	4.868
$h/R = 1/10$					
ТТУ [17]	0.9189	-0.0656	0.0663	-4.509	4.051
ТСДПП [4]	0.9031	-0.0501	0.0728	-3.972	3.595
ТСДТП [4]	0.9172	-0.0865	0.0555	-4.508	4.029
Данная работа	0.9188	-0.0717	0.0701	-4.511	4.056
$h/R = 1/100$					
ТТУ [17]	0.5170	0.0288	0.1190	-3.876	3.843
ТСДПП [4]	0.5131	0.0198	0.1358	-3.862	3.829
ТСДТП [4]	0.5169	0.0270	0.1173	-3.878	3.841
Данная работа	0.5170	0.0287	0.1190	-3.876	3.843

В таблице 1 используются следующие аббревиатуры: ТТУ - трёхмерная теория упругости; ТСДПП - теория сдвиговых деформаций первого порядка; ТСДТП - теория сдвиговых деформаций третьего порядка. Анализ результатов расчета по различным теориям, представленных в таблице 1, показывает, что используемая в данной работе полная модель теории третьего порядка демонстрирует наилучшее согласование с решениями трёхмерной теории упругости, особенно для толстых оболочек.

Оболочка под действием давления и гигротермической нагрузки

В качестве примера рассмотрим слоистую композиционную цилиндрическую оболочку ($90^\circ/0/90^\circ$) с механическими характеристиками, приведенными в предыдущем примере. Кроме того, коэффициенты теплового и

влажностного расширения принимают следующие значения: $\alpha_1 = 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 3\alpha_1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 0.44(\text{wt \% H}_2\text{O})^{-1}$. Относительная длина оболочки составляет $L/R=3$, а относительная толщина принимает следующие значения: $h/R=1/4, 1/10, 1/100$. Оболочка находится под действием равномерно распределенного внешнего давления, а температура и влажность изменяются по толщине по линейному закону (5) при следующих значениях параметров: $T_0 = 0$, $T_1 = 100$, $M_0 = 0$, $M_1 = 3 \times 10^{-4}$. Результаты расчета прогиба и компонентов нормальных напряжений в середине оболочки при различных граничных условиях представлены в таблице 2. В таблице 2 используются следующие аббревиатуры: ЖЗ - ЖЗ – жестко заземленное - жестко заземленное; ЖЗ - ШО – жестко заземленное - шарнирно опертое; ЖЗ - С – жестко заземленное - свободное.

Таблица 2

Результаты расчета прогиба и нормальных напряжений в середине оболочки при различных граничных условиях

Граничные условия	w $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \theta = 0, z = 0 \right)$	$\bar{\sigma}_\xi$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \theta = 0, z = -\frac{h}{2} \right)$	$\bar{\sigma}_\xi$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \theta = 0, z = \frac{h}{2} \right)$	$\bar{\sigma}_\theta$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \theta = 0, z = -\frac{h}{2} \right)$	$\bar{\sigma}_\theta$ $\left(\xi = \frac{\xi_0}{2}, \theta = 0, z = \frac{h}{2} \right)$	$\bar{\sigma}_z$ $\left(\xi = 0, \theta = 0, z = \frac{h}{6} \right)$
$h/R=1/4$						
ЖЗ - ЖЗ	0,624	1,514	-1,234	12,659	-1,564	-7,160
ЖЗ - ШО	0,626	1,499	-1,248	12,649	-1,553	-7,173
ЖЗ - С	0,626	1,499	-1,248	12,649	-1,552	-7,173
$h/R=1/10$						
ЖЗ - ЖЗ	0,141	0,248	-0,191	2,949	0,323	-7,882
ЖЗ - ШО	0,142	0,245	-0,194	2,948	0,324	-7,899
ЖЗ - С	0,142	0,245	-0,194	2,948	0,324	-7,899
$h/R=1/100$						
ЖЗ - ЖЗ	0,001	0,004	-0,001	0,162	0,134	-21,738
ЖЗ - ШО	0,001	0,004	-0,001	0,162	0,134	-21,832
ЖЗ - С	0,001	0,004	-0,001	0,162	0,134	-21,832

Анализ полученных результатов показывает, что граничные условия не оказывают существенного влияния на прогиб и НДС в середине оболочки.

Значения прогиба и нормальных напряжений в этом сечении для вариантов граничных условий ЖЗ - ШО и ЖЗ - С практически совпадают. Результаты расчета для оболочки, жестко заземленной по обоим краям, имеют незначительные отличия по сравнению с другими вариантами граничных условий. Влияние граничных условий становится очевидным при анализе прогиба и НДС оболочки в приграничной зоне. На рисунках 2–5 представлены распределения нормальных напряжений по толщине оболочки в сечении, удаленном от правого края на расстояние $\xi = 3h/R$, а также изменение прогибов вдоль образующей оболочки. Здесь рассматривается случай оболочки с относительной толщиной $h/R = 1/10$ при различных граничных условиях.

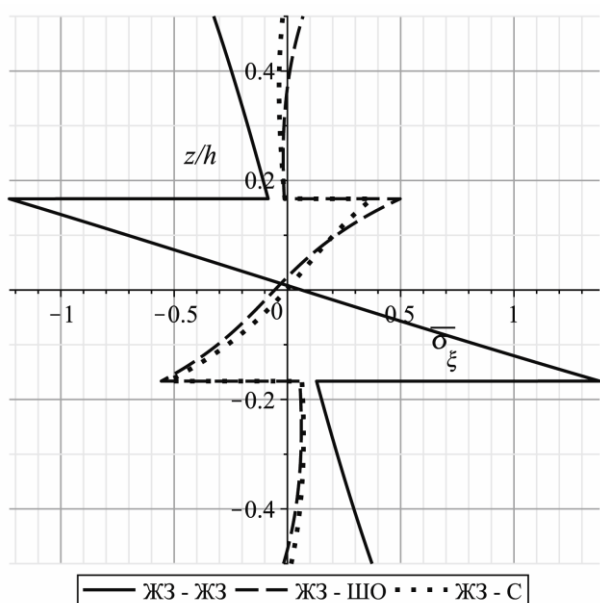


Рисунок 2 - Распределение $\bar{\sigma}_\xi$ по толщине оболочки

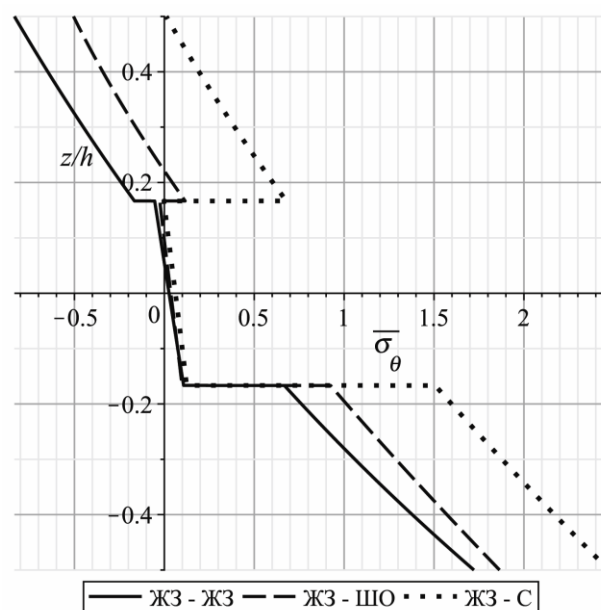


Рисунок 3 - Распределение $\bar{\sigma}_\theta$ по толщине оболочки

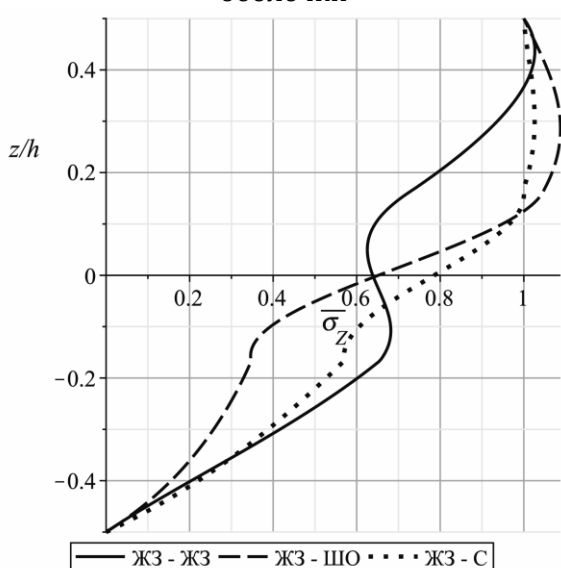


Рисунок 4 - Распределение $\bar{\sigma}_z$ по толщине оболочки

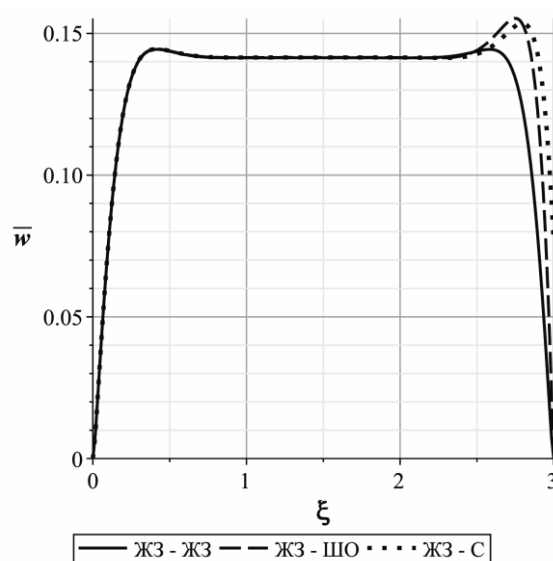


Рисунок 5 - Изменение прогибов \bar{W} вдоль образующей оболочки

Из графиков изменения прогиба вдоль образующей оболочки (рисунок 5) следует, что для «некоротких» оболочек зона существенного влияния граничных условий на прогибы и, как следствие, на НДС, ограничивается расстоянием порядка пяти толщин оболочки от края. Аналогичный вывод о влиянии граничных условий на НДС был получен также в работе [18] при исследовании слоистых композиционных цилиндрических оболочек, находящихся под действием механической нагрузки.

Выводы

На основании проведенных в данной работе расчетов композиционной цилиндрической оболочки, находящейся под действием механических и гигротермических нагрузок, получены следующие результаты:

1. Выведены основные уравнения и соответствующие граничные условия для анализа напряженно-деформированного состояния слоистых композиционных цилиндрических оболочек, находящихся под действием механических и гигротермических нагрузок. В рамках используемой уточненной теории перемещения и компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки аппроксимированы полными полиномами третьей степени по нормальной координате, что позволяет адекватно учитывать поперечные сдвиговые деформации и нелинейность распределения перемещений.

2. Выполнено сопоставление результатов, полученных в данной работе, с результатами расчётов по другим теоретическим моделям, включая трёхмерную теорию упругости. Тем самым подтверждена высокая точность и достоверность предложенной уточненной теории для оболочек с различной относительной толщиной. В связи с этим разработанный подход может быть рекомендован для расчёта толстостенных композиционных оболочек.

3. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния слоистых композиционных цилиндрических оболочек, находящихся под действием механических и гигротермических нагрузок. На основе проведенных численных расчетов выполнена оценка влияния толщины оболочки и граничных

условий на распределение прогибов и напряжений как в середине оболочки, так и в приграничной зоне.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Список источников

1. Kirchhoff V.G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe // Journal Fur Die Reine und Angewandte Mathematik. 1850. Vol. 40. pp. 51-88.
2. Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation // International Journal of Solids and Structures. 1975. Vol. 11 (5). pp. 569-573.
3. Doan T.N., Nguyen T.T. Thermoelastic response and boundary effect of cross-ply laminated cylindrical shells based on a quasi-3D type higher-order shear deformation theory // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2021. Vol. 194(PA). pp. 104534.
4. Thien Pham V., Firsanov V.V., Doan T.N. Investigating Interlaminar Stresses in Stress Concentration Zones of Laminated Composite Shells of Revolution Using Quasi-3D Theory with the Transverse Stress Recovery // Journal of Aerospace Engineering. 2024. Vol. 37(6). pp. 04024084.
5. Duong V.Q., Doan T.N., Luat D.T., Thom D.V. Static analysis and boundary effect of FG-CNTRC cylindrical shells with various boundary conditions using quasi-3D shear and normal deformations theory // Structures. 2022. Vol. 44(July). pp. 828–850.
6. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. с. 139-146.
7. Пикуль В.В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. с. 18-25.

8. Фирсанов В.В. Погранслои и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник Московского авиационного института. Т. 17. № 5. с. 212-218.

9. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Mechanics and analysis of composite materials. New York: Elsevier, 2001. 412 pp.

10. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. CRC Press, 2004.

11. Doan T.N., Tuan Nguyen A., Van Binh P., Van Hung T., Quoc Tru V., Trac Luat D. Static analysis of FGM cylindrical shells and the effect of stress concentration using quasi-3D type higher-order shear deformation theory // Composite Structures. 2020. Vol. 262 (November). pp. 113357.

12. Eldeeb A.M., Shabana Y.M., El-Sayed T.A., Guo L., Elsayaf A. Thermoelastic stresses alleviation for two-dimensional functionally graded cylinders under asymmetric loading // Journal of Thermal Stresses. 2023. Vol. 46(1). pp. 59–74.

13. Yee K., Ghayesh M.H. A review on the mechanics of graphene nanoplatelets reinforced structures. International Journal of Engineering Science. 2023. Vol. 186. pp. 103831.

14. Phon N.D., Doan T.N., Van Quang D., Van Minh P. Thermoelastic analysis of FG-CNTRC cylindrical shells with various boundary conditions and temperature-dependent characteristics using quasi-3D higher-order shear deformation theory // Journal of Thermoplastic Composite Materials. 2024. Vol. 38(7). pp. 2455-2523.

15. Khdeir A.A. Thermoelastic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells // International Journal of Solids and Structures. 1996. Vol. 33(27). pp. 4007–4017.

16. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан, Данг Нгок Тхань. Операционный метод исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек на основе энергетически согласованной теории // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 2. С. 186 – 199

17. Varadan T.K., Bhaskar K. Bending of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells - An Elasticity Approach // Composite Structures. 1991. Vol. 17. pp. 141-156.

18. Doan T.N., Thom D.V., Thanh N.T., Chuong P.V., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-

order shear deformation Quasi-3D theory // *Composite Structures*. 2020. Vol. 232. pp. 111526.

References

1. Kirchhoff V.G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe // *Journal Fur Die Reine und Angewandte Mathematik*. 1850. Vol. 40. pp. 51-88.

2. Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation // *International Journal of Solids and Structures*. 1975. Vol. 11 (5). pp. 569-573.

3. Doan T.N., Nguyen T.T. Thermoelastic response and boundary effect of cross-ply laminated cylindrical shells based on a quasi-3D type higher-order shear deformation theory // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2021. Vol. 194(PA). pp. 104534.

4. Thien Pham V., Firsanov V.V., Doan T.N. Investigating Interlaminar Stresses in Stress Concentration Zones of Laminated Composite Shells of Revolution Using Quasi-3D Theory with the Transverse Stress Recovery // *Journal of Aerospace Engineering*. 2024. Vol. 37(6). pp. 04024084.

5. Duong V.Q., Doan T.N., Luat D.T., Thom D.V. Static analysis and boundary effect of FG-CNTRC cylindrical shells with various boundary conditions using quasi-3D shear and normal deformations theory // *Structures*. 2022. Vol. 44(July). pp. 828–850.

6. Vasiliev V.V., Lurie S.A. On the problem of refining the theory of shallow shells // *Izvestiya of the Academy of Sciences. Mechanics of Solids*. 1990. No. 6. pp. 139–146.

7. Pikul V.V. On the problem of developing a physically consistent shell theory // *Izvestiya of the Academy of Sciences. Mechanics of Solids*. 1992. No. 3. pp. 18–25.

8. Firsanov V.V. Boundary layer and its influence on the strength of a cylindrical shell of variable thickness // *Vestnik of the Moscow Aviation Institute*. Vol. 17. No. 5. pp. 212–218.

9. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Mechanics and analysis of composite materials*. New York: Elsevier, 2001. 412 pp.

10. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. CRC Press, 2004.

11. Doan T.N., Tuan Nguyen A., Van Binh P., Van Hung T., Quoc Tru V., Trac Luat D. Static analysis of FGM cylindrical shells and the effect of stress concentration using quasi-3D type higher-order shear deformation theory // *Composite Structures*. 2020. Vol. 262 (November). pp. 113357.
12. Eldeeb A.M., Shabana Y.M., El-Sayed T.A., Guo L., Elsayaf A. Thermoelastic stresses alleviation for two-dimensional functionally graded cylinders under asymmetric loading // *Journal of Thermal Stresses*. 2023. Vol. 46(1). pp. 59–74.
13. Yee K., Ghayesh M.H. A review on the mechanics of graphene nanoplatelets reinforced structures. *International Journal of Engineering Science*. 2023. Vol. 186. pp. 103831.
14. Phon N.D., Doan T.N., Van Quang D., Van Minh P. Thermoelastic analysis of FG-CNTRC cylindrical shells with various boundary conditions and temperature-dependent characteristics using quasi-3D higher-order shear deformation theory // *Journal of Thermoplastic Composite Materials*. 2024. Vol. 38(7). pp. 2455-2523.
15. Khdeir A.A. Thermoelastic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells // *International Journal of Solids and Structures*. 1996. Vol. 33(27). pp. 4007–4017.
16. Firsanov V.V., Tran Ngoc Doan, Dang Ngoc Thanh. An operational method for investigating the stress–strain state of cylindrical shells based on an energetically consistent theory // *Vestnik of the Moscow Aviation Institute*. 2011. Vol. 18. No. 2. pp. 186–199.
17. Varadan T.K., Bhaskar K. Bending of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells - An Elasticity Approach // *Composite Structures*. 1991. Vol. 17. pp. 141-156.
18. Doan T.N., Thom D.V., Thanh N.T., Chuong P.V., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory // *Composite Structures*. 2020. Vol. 232. pp. 111526.

Информация об авторах

Нгок Доан Чан, кандидат технических наук, доцент, Государственный технический университет им. Ле Куи Дона, г. Ханой, Вьетнам; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7487-8356>; e-mail: tranngocdoan@lqdtu.edu.vn

Information about the authors

Ngoc Doan Tran, PhD, Associate Professor, Le Quy Don Technical University,
Hanoi, Vietnam; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7487-8356>;
e-mail: tranngocdoan@lqdtu.edu.vn

Получено 04 января 2026 ● Принято к публикации 03 марта 2026 ● Опубликовано 30 апреля 2026
Received 04 January 2026 ● Accepted 03 March 2026 ● Published 30 April 2026
