
УДК 62.534 (031)

Синтез асимптотически устойчивых движений гиростата переменной структуры

Безгласный С. П.*, Худякова М. А.**

*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королева
(национальный исследовательский университет), СГАУ, Московское шоссе, 34, Самара,
443086, Россия*

**e-mail: bezglasnsp@rambler.ru*

***e-mail: motya31087@list.ru*

Аннотация

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольно заданных программных движений гиростата переменной структуры. Решение получено синтезом активного программного управления, приложенного к системе, и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Управление построено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными.

Ключевые слова

гиростат, программное движение, знакопостоянная функция, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы» (соглашение № 14 В 37.21.0203).

Введение

Задача по реализации управляемых пространственных движений твердых тел и системы твердых тел имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются

авторами во многих работах, например [1]-[6]. В данной работе ставится и решается задача об определении управлений, реализующих и стабилизирующих произвольные заданные программные движения системы двух соосных тел (уравновешенного гиростата) с моментами инерции, зависящими от времени, относительно их общего центра масс. Решение проводится построением активного управления, приложенного к системе тел и представляющего собой совокупность программного управления и стабилизирующего управления по принципу обратной связи, реализуемых, например, двигателями малой тяги. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [7]. Метод предельных систем [8] и его модификация [9] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

Постановка задачи

Рассмотрим пространственное движение гиростата, представляющего собой систему двух связанных соосных тел: носитель T_1 массой m_1 и ротор T_2 с массой m_2 . Точки O_1, O_2 – центры масс тел T_1 и T_2 , точка O – общий для тел T_1 и T_2 центр масс; $l_1 = O_1O$, $l_2 = O_2O$ – расстояния между центрами масс тел и их общим центром масс, где $l_1m_1 = l_2m_2$. Предполагаем, что значения осевых моментов инерции обоих тел могут зависеть от времени, характеризуя наличие подвижных частей конструкции или перемещения масс, не меняющие положений центров масс обоих тел, и, как следствие – центра масс всей системы.

Пусть $O'\xi\eta\zeta$ – абсолютная неподвижная система координат; $O\alpha\beta\gamma$ – подвижная система координат, оси которой во все время движения остаются параллельными осям системы $O'\xi\eta\zeta$ (Кениговая); Oxy – неинерциальная система координат, неизменно связанная с первым телом; $Ox_2y_2z_2$ – система координат, жестко связанная со вторым телом таким образом, что оси Oz и Oz_2 совпадают.

Тело T_2 вращается вокруг T_1 с произвольно заданной угловой скоростью $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(t)$, направленной по оси Oz , где величина $\sigma = \sigma(t)$, задающая угол закрутки второго тела относительно первого, считается известной заданной функцией времени (Рисунок 1).

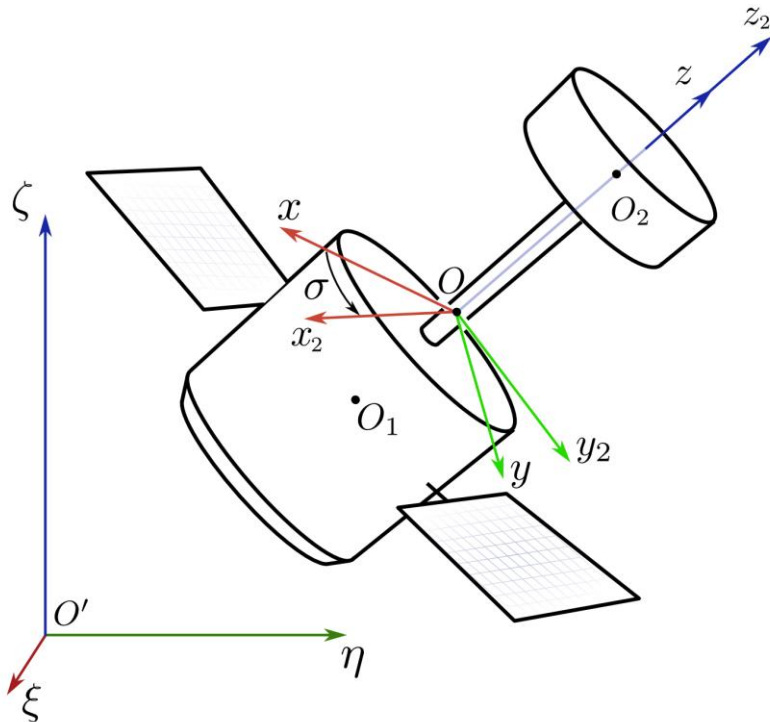


Рисунок 1. Гиростат

Пусть центр масс гиростата O движется согласно известному закону:
 $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, $\zeta = \zeta(t)$.

Будем исследовать сферические движения описанной механической системы относительно общего центра масс. Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных (программных) движений гиростата и стабилизации этих движений.

Программным (желаемым) движением назовем пару $(r(t), \dot{r}(t))$, где $r(t)$ – ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функция размерности $n = 3$, описывающая некоторое заданное вращательное движение гиростата относительно его центра масс O .

В общем случае функция $r(t)$, задающая программное движение, может не являться решением системы дифференциальных уравнений, описывающих движения управляемой механической системы. Поэтому будем реализовывать программные движения, разделив управляющие воздействия на две группы: силы, реализующие программное движение, и силы, стабилизирующие его.

Вывод уравнений движения

Уравнения движения исследуемой системы составим в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (2.1)$$

Положение системы координат $Oxyz$ относительно $O\alpha\beta\gamma$ будем характеризовать углами Эйлера φ, ψ, θ , приняв их за компоненты вектора обобщенных координат $q^T = (\varphi, \psi, \theta)$, где символ $()^T$ обозначает транспонирование. Компоненты вектора абсолютной угловой скорости $\omega_1^T = (p, q, r)$ носителя в системе $Oxyz$ выражаются уравнениями Эйлера [10] и имеют вид:

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta, \quad q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$$

Абсолютная угловая скорость второго тела в системе координат $Oxyz$ дается вектором $\omega_2 = \omega_1 + \omega_\sigma$, а в системе координат $Ox_2y_2z_2$ – вектором $\omega_2 = \Gamma(\omega_1 + \omega_\sigma)$, где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma & 0 \\ -\sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ есть матрица перехода от } Oxyz \text{ к } Ox_2y_2z_2, \quad \omega_\sigma^T = (0, 0, \dot{\sigma}).$$

Тогда кинетическая энергия системы примет вид:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{1}{2} (I_{1z} + I_{2z}) \dot{\varphi}^2 + (I_{1z} + I_{2z}) \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\psi} + \frac{1}{2} [(I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + \\ & + I_{2y} \sin^2 \sigma) \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + (I_{1z} + I_{2z}) \cos^2 \theta + (I_{2x} - I_{2y} \sin 2\sigma + I_{1y} + I_{2x} \sin^2 \sigma + \\ & + I_{2y} \cos^2 \sigma) \cos^2 \varphi \sin^2 \theta] \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} [(I_{1x} - I_{1y}) \sin 2\varphi \sin \theta + (I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma \sin 2\varphi \sin \theta + \\ & + (I_{2x} \cos 2\varphi - I_{2y}) \sin 2\sigma \sin \theta] \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{1}{2} [(I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + I_{2y} \sin^2 \sigma) \cos^2 \varphi + (I_{1y} + \\ & + I_{2x} \sin^2 \sigma + I_{2y} \cos^2 \sigma) \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (I_{2y} + I_{2x}) \sin 2\sigma \sin 2\varphi] \dot{\theta}^2 + I_{2z} \dot{\sigma} \dot{\varphi} + I_{2z} \dot{\sigma} \dot{\psi} \cos \theta + \frac{1}{2} I_{2z} \dot{\sigma}^2 \end{aligned}$$

где $I_{ix} = I_{ix}(t)$, $I_{iy} = I_{iy}(t)$, $I_{iz} = I_{iz}(t)$ – главные моменты инерции тел T_i , ($i=1,2$), вычисляемые относительно общего центра масс O согласно теореме Гюйгенса-Штейнера через центральные главные моменты инерции тел $\hat{I}_{ix} = \hat{I}_{ix}(t)$, $\hat{I}_{iy} = \hat{I}_{iy}(t)$, $\hat{I}_{iz} = \hat{I}_{iz}(t)$, ($i=1,2$) согласно равенствам:

$$\begin{aligned} I_{1x} &= \hat{I}_{1x} + m_1 l_1^2, \quad I_{1y} = \hat{I}_{1y} + m_1 l_1^2, \quad I_{1z} = \hat{I}_{1z}, \\ I_{2x} &= \hat{I}_{2x} + m_2 l_2^2, \quad I_{2y} = \hat{I}_{2y} + m_2 l_2^2, \quad I_{2z} = \hat{I}_{2z}. \end{aligned}$$

Величина T представлена в виде суммы: $T = T_2 + T_1 + T_0$, где $T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(t, q) \dot{q}$ – квадратичная форма скоростей \dot{q} , задаваемая симметричной матрицей $A(t, q) = \{a_{ij}\}$ с элементами

$$\begin{aligned}
a_{11} &= I_{1z} + I_{2z}, \quad a_{12} = a_{21} = 2(I_{1z} + I_{2z}) \cos \theta, \quad a_{13} = a_{31} = 0, \\
a_{22} &= (I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + I_{2y} \sin^2 \sigma) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (I_{1z} + I_{2z}) \cos^2 \theta + ((I_{2x} + I_{2y}) \sin 2\sigma + I_{1y} + \\
&+ I_{2x} \sin^2 \sigma + I_{2y} \cos^2 \sigma) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \\
a_{23} &= a_{32} = (I_{1x} - I_{1y}) \sin \theta \sin 2\varphi + (I_{2x} - I_{2y}) \sin \theta \cos 2\sigma \sin 2\varphi + (I_{2x} \cos 2\varphi - I_{2y}) \sin \theta \sin 2\sigma, \\
a_{33} &= (I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + I_{2y} \sin^2 \sigma) \cos^2 \varphi + (I_{1y} + I_{2x} \sin^2 \sigma + I_{2y} \cos^2 \sigma) \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}(I_{2y} + \\
&+ I_{2x}) \sin^2 \sigma \sin^2 \varphi.
\end{aligned}$$

$T_1 = B^T(t, q) \dot{q}$ – линейная форма скоростей \dot{q} , определяемая вектором-столбцом $B(t, q)$ с компонентами:

$$B_1 = I_{2z} \dot{\sigma}, \quad B_2 = I_{2z} \dot{\sigma} \cos \theta, \quad B_3 = 0.$$

$T_0 = T_0(t, q)$ – скалярная функция, имеющая вид:

$$T_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{1}{2} I_{2z} \dot{\sigma}^2$$

С учетом структуры кинетической энергии уравнения (2.1) запишутся в виде:

$$A\ddot{q} + M + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{q} + \left(\frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q} = Q, \quad (2.2)$$

где через $M = M(q, \dot{q})$ обозначен вектор-столбец с компонентами, вычисляемыми по формуле

$$M_i = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (i = \overline{1,3})$$

Вектор обобщенных сил $Q = Q_e + Q_c$ в правой части (2.2) представляет собой сумму внешних сил Q_e , действующих на механическую систему, и управляющих воздействий Q_c , определяемых в дальнейшем и являющихся совокупностью программных Q_p и стабилизирующих Q_s сил: $Q_c = Q_p + Q_s$.

Ниже предполагаем, что движение исследуемой механической системы происходит без воздействия внешних сил, то есть $Q_e = 0$.

Построение программных и стабилизирующих управлений

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $r^T(t) = (\varphi^*(t), \psi^*(t), \theta^*(t))$, где $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$, $\theta^*(t)$ – заданные функции времени, описывающие некоторое сферическое движение гиростата относительно его центра масс. Прямой подстановкой программного движения $r(t)$ в систему (2.2) определим, как и в [11], управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q_p = A\dot{r} + M(r(t), \dot{r}(t)) + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + \left[\frac{\partial B}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T}{\partial q} \right] \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q}. \quad (3.1)$$

Подставив силы (3.1) в уравнения (2.2), имеем управляемую систему, для которой программное движение $r(t)$ является решением, но, вообще говоря, не является устойчивым. Возникает задача о его стабилизации, состоящая в определении активных сил, которые обеспечат асимптотическую устойчивость исследуемого движения.

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [9].

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу

$$x^T = q^T - r^T(t) = (\varphi - \varphi^*(t), \psi - \psi^*(t), \theta - \theta^*(t)).$$

В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится, и уравнения возмущенного движения примут вид:

$$A\ddot{x} + M + M' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{x} + A\dot{r} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = Q_s + Q_p,$$

где через M, M' и M'' обозначены соответственно квадратичная, линейная и нулевая по скоростям векторные формы с компонентами:

$$M_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j, \quad (i = \overline{1,3});$$

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{x}_j, \quad (i = \overline{1,3});$$

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{r}_k \dot{r}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{r}_k \dot{r}_j, \quad (i = \overline{1,3}).$$

Задачу о стабилизации решим прямым методом Ляпунова с использованием функции Ляпунова, которую выберем в виде:

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} x^T C x + \frac{1}{2} \dot{x}^T A \dot{x}, \quad (3.3)$$

где C – ограниченная неисчезающая постоянная симметричная матрица.

Функция (3.3) является положительно определенной. Ее производная в силу системы (3.2) записывается равенством:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{1}{2} \dot{x}^T \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} \right) \dot{x} + \dot{x}^T Cx + \dot{x}^T (-M' - \left(\frac{\partial B}{\partial x^T} + \frac{\partial B^T}{\partial x} \right) \dot{x} - M'' - \left(\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right) \dot{r} - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{x} - \\ & - \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial x} - A\ddot{r} + \frac{1}{2} N + Q_c), \end{aligned}$$

где символом N обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \dot{x}_k \dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \dot{x}_k \dot{x}_j, \quad (i=\overline{1,3}).$$

Определим стабилизирующее управление равенством:

$$Q_s = -Cx - D\dot{x} + M'' + \left[\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x} \right] \dot{r} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial x} + A\ddot{r} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{r},$$

где матрица D является ограниченной и неисчезающей и выбирается из условий:

$$d_0 E \leq D(t, q) \leq d_1 E, \quad (0 < d_0 < d_1 - \text{const});$$

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D \right) \geq \alpha_0 E, \quad (0 < \alpha_0 - \text{const}).$$

Тогда производная функции (3.3) имеет оценку

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{x}^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^T} \dot{r} - \dot{r}^T \frac{\partial A}{\partial x^T} + L + D \right) \dot{x} \leq -\alpha_0 \|\dot{x}\|^2 \leq 0$$

и является отрицательно определенной функцией по скоростям. Для обоснования асимптотической устойчивости программного движения воспользуемся теоремой из [9], развивающей метод функций Ляпунова и позволяющей использовать функции Ляпунова не со знакоопределенной, а со знакопостоянной производной. Множество $\{\dot{x} = 0\}$ не имеет решений предельной к системе управляемого движения гиростата системы, кроме нулевого решения $x = \dot{x} = 0$. Таким образом, на основе теоремы из [9] имеем асимптотическую устойчивость исследуемого программного движения.

Вычислив правые части (3.4), имеем стабилизирующие управления в скалярном виде:

$$\begin{aligned} Q_{s\varphi} = & -c_{11}x_1 - d_{11}\dot{x}_1 - \frac{1}{2}\dot{\psi}^{*2} \sin 2(x_1 + \varphi^*) \sin^2(x_3 + \theta^*)(I_{1x} + (I_{2y} - I_{2x}) \sin^2 \sigma + \\ & + (I_{2x} + I_{2y})(\cos^2 \sigma - \sin 2\sigma) - I_{1y}) + \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* \sin(x_3 + \theta^*)(-2(I_{1z} + I_{2z}) - \\ & - 2 \cos 2(x_1 + \varphi^*)(I_{1x} - I_{1y} + 2(I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma) + 2I_{2x} \sin 2\sigma \sin 2(x_1 + \varphi^*)) - \\ & - \frac{1}{2} \dot{\theta}^{*2} \sin 2(x_1 + \varphi^*)(I_{1y} - I_{1x} + \left(\frac{3}{2} I_{2x} - \frac{1}{2} I_{2y} \right) \sin^2 \sigma + (I_{2y} - I_{2x}) \cos^2 \sigma) + \\ & + \dot{I}_{1z} \dot{\sigma} + I_{1z} \ddot{\sigma} + (\ddot{\varphi}^* + 2\dot{\psi}^* \cos(x_3 + \theta^*)) (I_{1z} + I_{2z}) + (\dot{\varphi}^* + 2\dot{\psi}^* \cos(x_3 + \theta^*)) (\dot{I}_{1z} + \dot{I}_{2z}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{s\varphi} = & -c_{22}x_2 - d_{22}\dot{x}_2 + \dot{\psi}^* \dot{\varphi}^* \sin 2(x_1 + \varphi^*) \sin^2(x_3 + \theta^*) (I_{1x} - I_{1y} + (I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma - \\
& - (I_{2x} + I_{2y}) \sin 2\sigma) + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* \sin(x_3 + \theta^*) (2(I_{1x} - I_{1y}) \cos 2(x_1 + \varphi^*) + 2(I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma \times \\
& \times \cos 2(x_1 + \varphi^*) + 2I_{2x} \sin 2\sigma \sin 2(x_1 + \varphi^*) - 2(I_{1z} + I_{2z})) - \dot{\psi}^* \dot{\theta}^* \sin 2(x_3 + \theta^*) (\sin^2(x_1 + \varphi^*) \times \\
& \times (I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + I_{2y} \sin^2 \sigma) - (I_{1z} + I_{2z})) + (I_{1y} + (I_{2x} + I_{2y}) \sin 2\sigma + I_{2x} \sin^2 \sigma + \\
& + I_{2y} \cos^2 \sigma) \cos^2(x_1 + \varphi^*) + \dot{\theta}^{*2} \cos(x_3 + \theta^*) (\sin 2(x_1 + \varphi^*) ((I_{1x} - I_{1y}) + (I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma) + \\
& + (I_{2x} \cos 2(x_1 + \varphi^*) - I_{2y}) \sin 2\sigma) + (\dot{I}_{2z} \dot{\sigma} + I_{2z} \ddot{\sigma} + 2\dot{\varphi}^* (I_{1z} + I_{2z})) \cos(x_3 + \theta^*) - \\
& - I_{2z} \dot{\sigma} \dot{\theta}^* \sin(x_3 + \theta^*) + \dot{\psi}^* (\sin^2(x_3 + \theta^*) ((I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + I_{2y} \sin^2 \sigma) \sin^2(x_1 + \varphi^*) + \\
& + ((I_{2x} + I_{2y}) \sin 2\sigma + I_{1y} + I_{2x} \sin^2 \sigma + I_{2y} \cos^2 \sigma) \cos^2(x_1 + \varphi^*)) + (I_{1z} + I_{2z}) \cos^2(x_3 + \theta^*) + \\
& + \dot{\theta}^* \sin(x_3 + \theta^*) ((I_{1x} - I_{1y} + (I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma) \sin 2(x_1 + \varphi^*) + (I_{2x} \cos 2(x_1 + \varphi^*) - \\
& - I_{2y}) \sin 2\sigma) + 2\dot{\varphi}^* (\dot{I}_{1z} + \dot{I}_{2z}) \cos(x_3 + \theta^*) + \dot{\psi}^* ((\dot{I}_{1x} + \dot{I}_{2x} \cos^2 \sigma + (I_{2y} - I_{2x}) \dot{\sigma} \sin 2\sigma + \\
& + \dot{I}_{2y} \sin^2 \sigma) \sin^2(x_1 + \varphi^*) \sin^2(x_3 + \theta^*) + (\dot{I}_{1z} + \dot{I}_{2z}) \cos^2(x_3 + \theta^*) + ((2(I_{2x} + I_{2y}) \dot{\sigma} \cos 2\sigma + \\
& + (\dot{I}_{2x} + \dot{I}_{2y} - I_{2y} \dot{\sigma} + I_{2x} \dot{\sigma})) \sin 2\sigma + \dot{I}_{1y} + \dot{I}_{2x} \sin^2 \sigma + \dot{I}_{2y} \cos^2 \sigma) \cos^2(x_1 + \varphi^*) \sin^2(x_3 + \theta^*) + \\
& + (\dot{I}_{1z} + \dot{I}_{2z}) \cos^2(x_3 + \theta^*)) + \dot{\theta}^* \sin(x_3 + \theta^*) ((\dot{I}_{1x} - \dot{I}_{1y} + (\dot{I}_{2x} - \dot{I}_{2y}) \cos 2\sigma - 2\dot{\sigma} (I_{2x} - I_{2y}) \sin 2\sigma) \times \\
& \times \sin 2(x_1 + \varphi^*) + (\dot{I}_{2x} \cos 2(x_1 + \varphi^*) - \dot{I}_{2y}) \sin 2\sigma + 2\dot{\sigma} (I_{2x} \cos 2(x_1 + \varphi^*) - I_{2y}) \cos 2\sigma); \\
Q_{s\theta} = & -c_{33}x_3 - d_{33}\dot{x}_3 - \frac{1}{2} \dot{\psi}^{*2} \sin 2(x_3 + \theta^*) (\sin^2(x_1 + \varphi^*) (I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + I_{2y} \sin^2 \sigma) - (I_{1z} + I_{2z})) + \\
& + ((I_{2x} + I_{2y}) \sin 2\sigma + I_{1y} + I_{2x} \sin^2 \sigma + I_{2y} \cos^2 \sigma) \cos^2(x_1 + \varphi^*) + \dot{\varphi}^* \dot{\psi}^* \sin(x_3 + \theta^*) (2(I_{1z} + I_{2z})) + \\
& + 2(I_{1x} - I_{1y}) \cos 2(x_1 + \varphi^*) + 2(I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma \cos 2(x_1 + \varphi^*) - 2I_{2x} \sin 2\sigma \sin 2(x_1 + \varphi^*) + \\
& + \dot{\varphi}^* \dot{\theta}^* \sin 2(x_1 + \varphi^*) (I_{1y} - I_{1x} + (I_{2y} - I_{2x}) \cos 2\sigma + \frac{1}{2} (I_{2x} + I_{2y}) \sin^2 \sigma) + \dot{\psi}^* I_{2z} \dot{\sigma} \sin(x_3 + \theta^*) + \\
& + \dot{\psi}^* \sin(x_3 + \theta^*) ((I_{1x} - I_{1y} + (I_{2x} - I_{2y}) \cos 2\sigma) \sin 2(x_1 + \varphi^*) + (I_{2x} \cos 2(x_1 + \varphi^*) - I_{2y}) \sin 2\sigma) + \\
& + \dot{\theta}^* ((I_{1x} + I_{2x} \cos^2 \sigma + I_{2y} \sin^2 \sigma) \cos^2(x_1 + \varphi^*) + (I_{1y} + I_{2x} \sin^2 \sigma + I_{2y} \cos^2 \sigma) \sin^2(x_1 + \varphi^*) + \\
& + \frac{1}{2} (I_{2y} + I_{2x}) \sin^2(x_1 + \varphi^*) \sin^2 \sigma) + \dot{\psi}^* \sin(x_3 + \theta^*) (\sin 2(x_1 + \varphi^*) (\dot{I}_{1x} - \dot{I}_{1y} + (\dot{I}_{2x} - \dot{I}_{2y}) \cos 2\sigma - \\
& - 2\dot{\sigma} (I_{2x} - I_{2y}) \sin 2\sigma) + (\dot{I}_{2x} \cos 2(x_1 + \varphi^*) - \dot{I}_{2y}) \sin 2\sigma + 2\dot{\sigma} (I_{2x} \cos 2(x_1 + \varphi^*) - I_{2y}) \cos 2\sigma) + \\
& + \dot{\theta}^* ((\dot{I}_{1x} + \dot{I}_{2x} \cos^2 \sigma + \dot{I}_{2y} \sin^2 \sigma + (I_{2y} - I_{2x}) \dot{\sigma} \sin 2\sigma) \cos^2(x_1 + \varphi^*) + (\dot{I}_{1y} + \dot{I}_{2x} \sin^2 \sigma + \\
& + \dot{I}_{2y} \cos^2 \sigma + (I_{2x} - I_{2y}) \dot{\sigma} \sin 2\sigma + \frac{1}{2} ((\dot{I}_{2y} + \dot{I}_{2x}) \sin^2 \sigma + \dot{\sigma} (I_{2y} + I_{2x}) \sin 2\sigma)) \sin^2(x_1 + \varphi^*));
\end{aligned}$$

Для иллюстрации полученных результатов проинтегрируем численно с помощью математического пакета Maple 10 уравнения движения построенной управляемой механической системы при следующих значениях параметров и построениях. Для определения моментов инерции гиростата носитель моделируем прямым круговым однородным цилиндром массы $m_1 = 495$ кг радиуса $r_1 = 1$ м и высоты $h_1 = 1$ м. Переменность структуры носителя моделируем отрезком массы $m = 5$ кг длины $l = 0.5$ м, центр масс

которого шарнирно закреплен на носителе в точке O_1 , этот отрезок вращается вокруг точки O_1 по закону $\alpha = 0.1t$. Угол α отмеряется от оси O_1z в плоскости Oxz против часовой стрелки. Ротор моделируем прямым однородным цилиндром массы $m_2 = 300$ кг высоты $h_2 = 0.5$ м, основанием которого является эллипс с полуосями $a_2 = 0.8$ м и $b_2 = 1$ м. Расстояния между центрами масс примем $l_1 = 0.3$ м, $l_2 = 0.5$ м. Тогда для моментов инерции имеем выражения:

$$I_{1x}(t) = 210 + \frac{5}{48} \cos^2 0.1t, \quad I_{1y}(t) = 210 + \frac{5}{48}, \quad I_{1z}(t) = 247.5 + \frac{5}{48} \sin^2 0.1t,$$

$$I_{2x}(t) = 156.25, \quad I_{2y}(t) = 129.25, \quad I_{2z}(t) = 123.$$

Кроме того при выполнении расчетов принято, что

$$\sigma(t) = t; c_{ij} = 100, (i = j); c_{ij} = 0, (i \neq j); d_{ij} = 500, (i = j); d_{ij} = 0, (i \neq j).$$

$$x_{01} = 0.004, \dot{x}_{01} = 0.002$$

Начальные условия были взяты: $x_{02} = 0.005, \dot{x}_{02} = 0.003$. Программное движение было

$$x_{03} = 0.005, \dot{x}_{03} = 0.003$$

выбрано следующее: $\varphi^*(t) = t, \quad \psi^*(t) = \frac{\pi t}{6}, \quad \theta^*(t) = \frac{\pi}{4}$.

На рисунках 2-4 показаны изменения отклонений, на рисунках 5-7 представлены соответственно изменения скоростей отклонений с течением времени для уравнений возмущенного движения системы при реализации выбранного программного движения, стабилизированного управляющими силами.

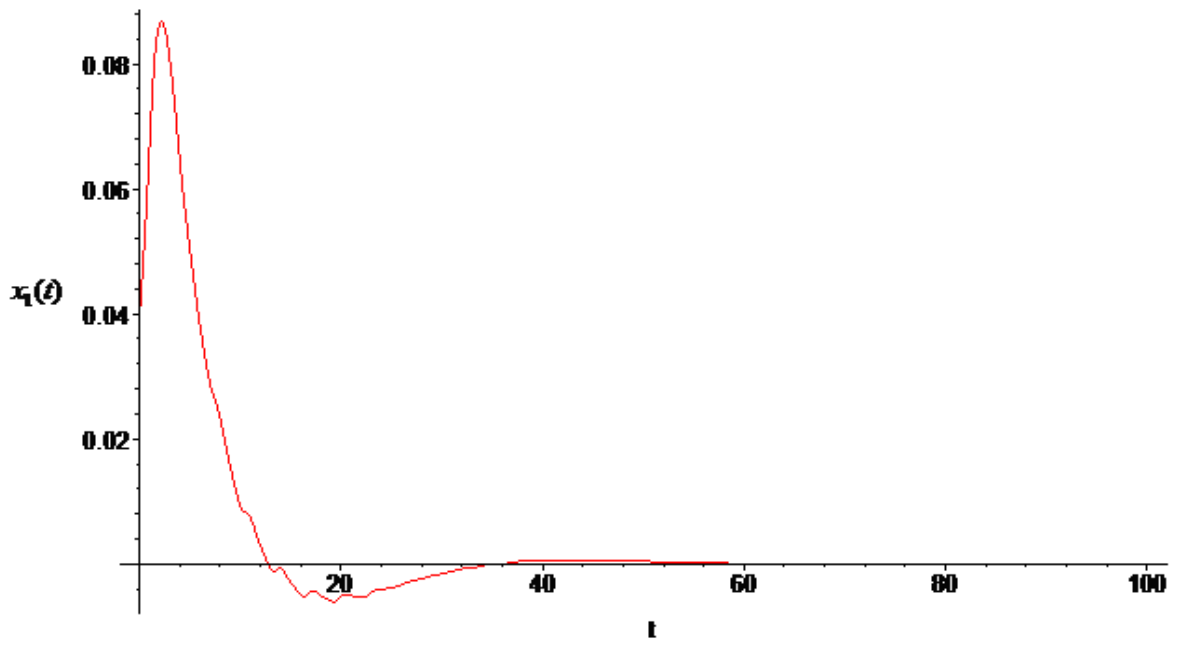


Рисунок 2 – График отклонения $x_1(t)$

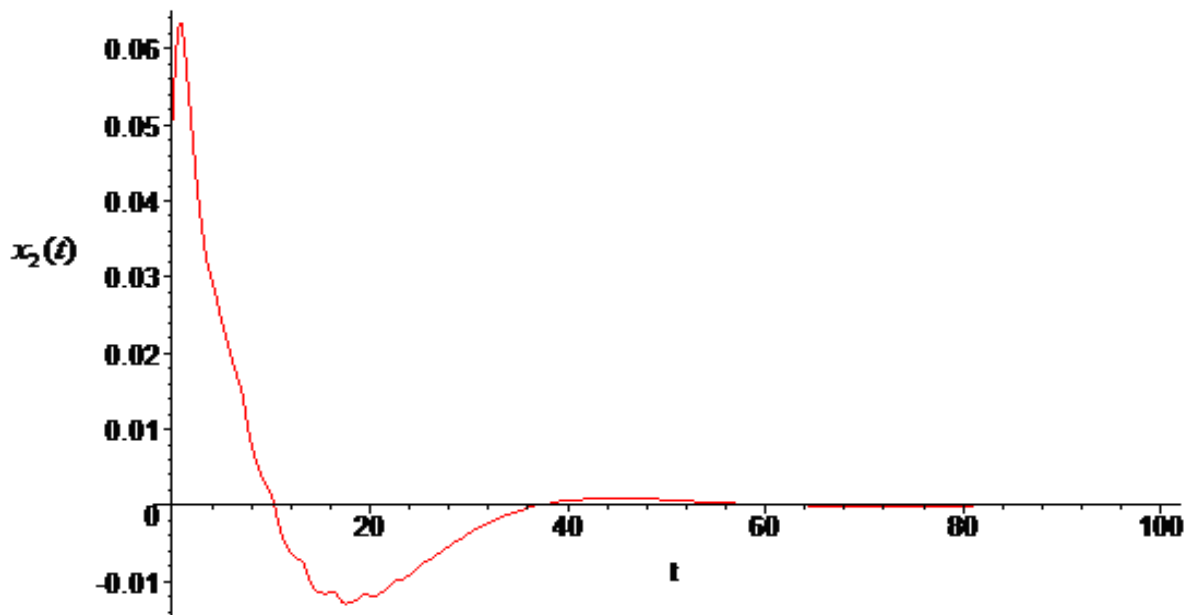


Рисунок 3 – График отклонения $x_2(t)$

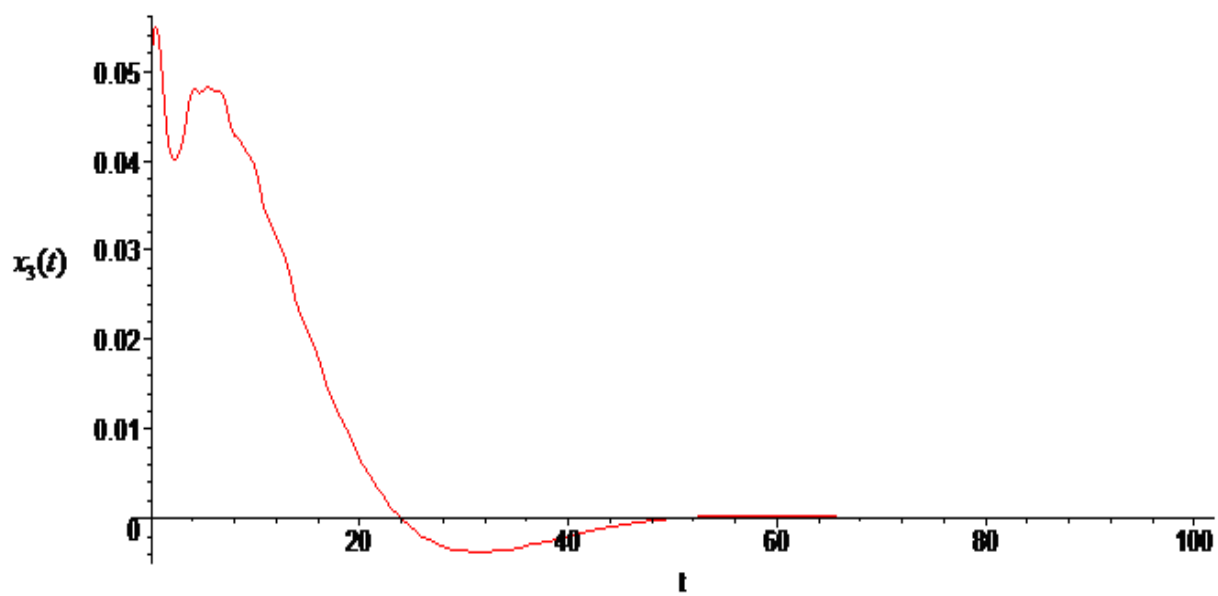


Рисунок 4 – График отклонения $x_3(t)$

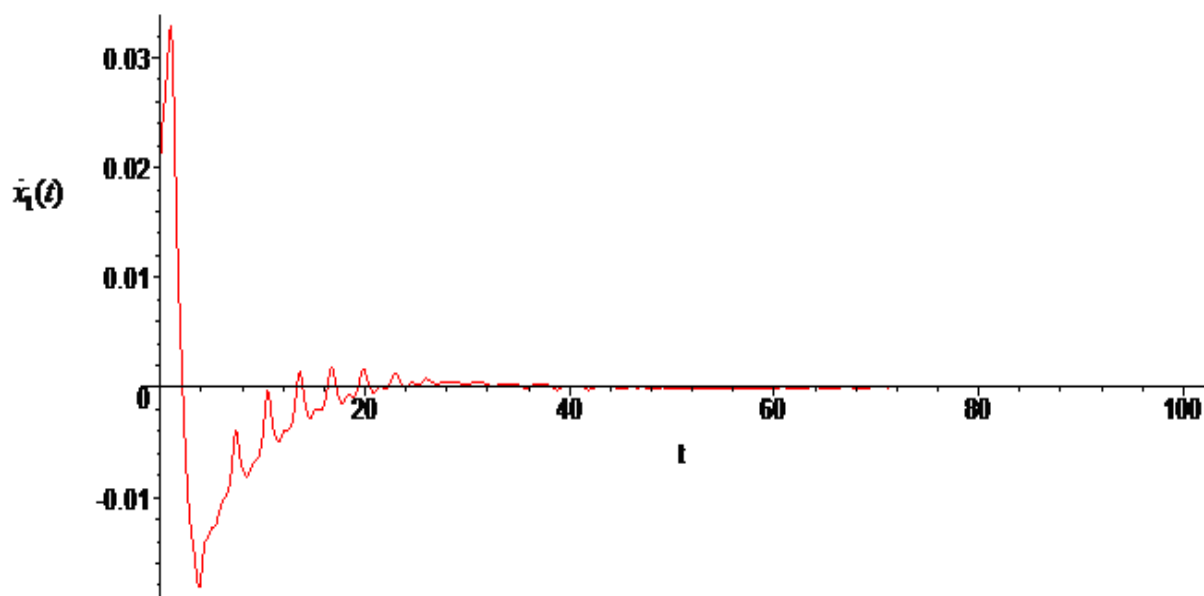


Рисунок 5 –График скорости $\dot{x}_1(t)$

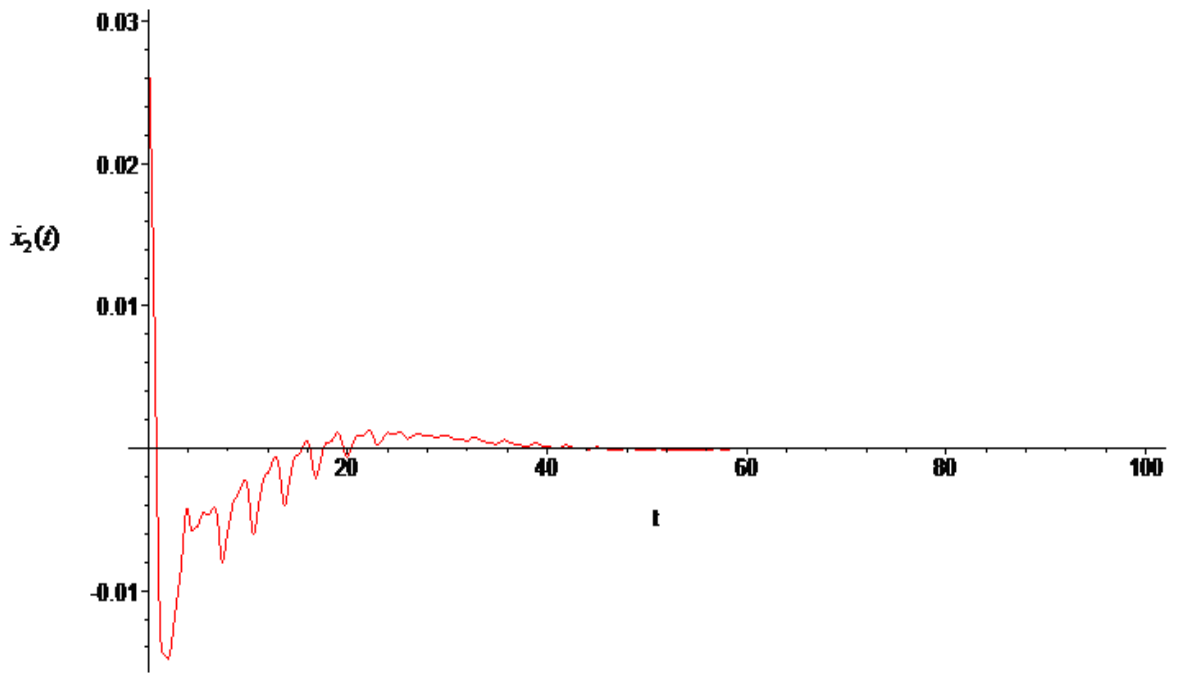


Рисунок 6 – График скорости $\dot{x}_2(t)$

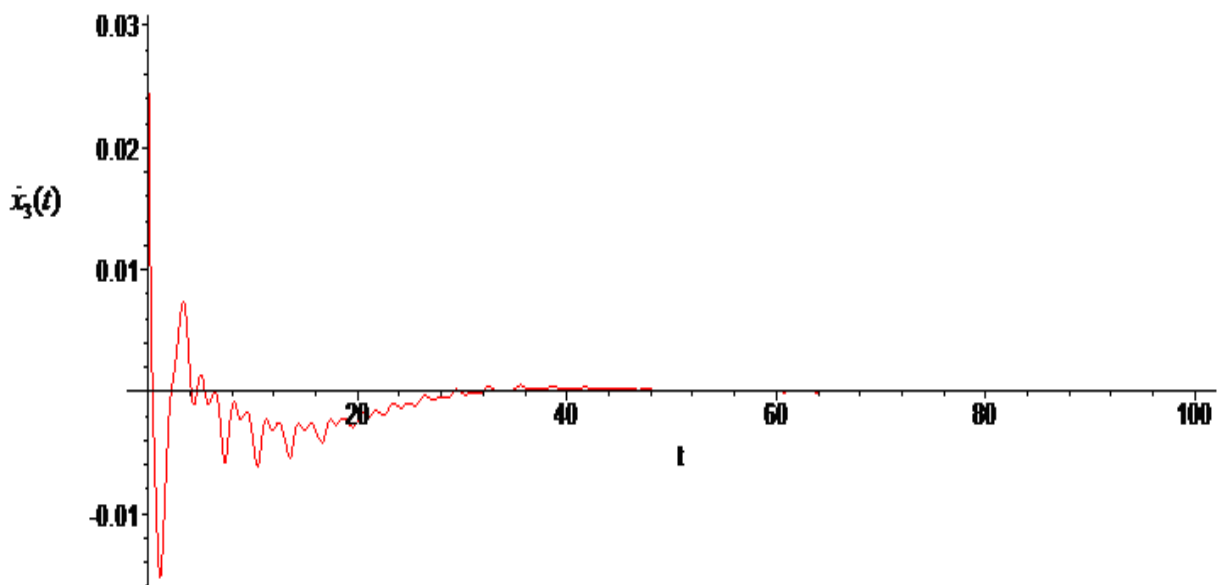


Рисунок 7 – График скорости $\dot{x}_3(t)$

Заключение

В работе решена задача о синтезе и стабилизации программных движений гиростата относительно его центра масс. Получено множество управлений, стабилизирующих многообразие произвольно заданных программных движений гиростата с моментами инерции, зависящими от времени. Управление было построено аналитически в явном виде в классе непрерывных функций. Исследуемая задача решалась на основе прямого метода

Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянной производной.

Полученные в работе результаты развивают и обобщают соответствующие результаты из работ [11-14] и другие по двум направлениям: во-первых, использованная функция Ляпунова со знакопостоянной производной позволила построить управление существенно проще без слагаемых третьего порядка малости по отклонениям; во-вторых, задача решалась для гиростата с переменными моментами инерции.

Список литературы

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
2. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
3. Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 375 с.
4. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
5. Раушенбах В.В., Токарь В.И. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 589 с.
6. Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска. Космические исследования. 2002. Т. 40 № 2. С. 193-200.
7. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 301 с.
8. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. V. 23. P. 216-223.
9. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ 1984. Т.48. Вып.2. С. 225-232.
10. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учеб. для вузов. Издание второе, дополненное. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
11. Bezglasnyi S.P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. Appl. Math. 2004. V. 14, № 1-2. P. 251-266.
12. Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 316 с.

13. Андреев А.С., Чудинова И.А. К задаче об ориентации спутника относительно произвольной системы координат // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. 2001. № 1. Стр. 3-11.
14. Безгласный С.П., Мысина О.А. О реализации одноосной и трехосной ориентации составного тела // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. 2011. № 2 (83). Стр. 80-90.