УДК 621.396(06)

ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕ БЕЛЫХ ШУМАХ.

Г. Ф. Савинов.

В работе получен алгоритм оптимального фильтра для случая, когда входные воздействия и шумы представляют собой случайные гауссовы процессы, отличные от белого шума. В отличие от известных алгоритмов, в нем не используются формирующие фильтры, а также отсутствует необходимость решать нелинейное векторно-матричное дифференциальное уравнение, для определения корреляционной матрицы ошибок работы фильтра. Указанные обстоятельства приводят к существенному сокращению объема вычислительных операций при его использовании в реальных системах.

1. ***Введение.***

Задача линейной оптимальной фильтрации, впервые поставленная и решенная А.Н. Колмогоровым и Н. Винером, в дальнейшем была развита Р.Е. Калманом и Р.С. Бьюси, которые, модифицировав постановку задачи, получили алгоритм оптимального фильтра для случая, когда входные воздействия и шумы измерений являются белыми.

Поскольку белый шум является некоторой математической абстракцией, использование этого алгоритма в реальных системах, требует применения формирующих фильтров, что неизбежно ведет к увеличению размерности вектора состояния и усложняет вопросы его практической реализации. В случаях, когда случайные процессы имеют достаточно сложный вид, проблема построения формирующих фильтров становится практически неразрешимой.

Исходя из изложенного, весьма актуальной является задача построения алгоритма линейного оптимального фильтра в случае, когда случайные входные воздействия и шумы представляют собой случайные гауссовы процессы, в общем случае отличные от белого шума.

Эта задача решается в следующей постановке.

2. ***Постановка задачи.***

Пусть n-мерный векторный случайный процесс $X(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = F(t)\,X(t) + B(t)W(t)\ , \qquad X(t_0) = X_0 .$$

(1)

На интервале $[t_0,t]$ измеряется вектор $Z(t)$ размера $\ell \le n$, связанный с вектором $X(t)$ соотношением

$$Z(t) = C(t)\,X(t) + V(t), \tag{2}$$

где $C(t)$- заданная матрица измерений размера $\ell \times n$.

Входящие в эти уравнения векторы $W(t)$ размера $m \times 1$ и $V(t)$ размера $\ell \times 1$, представляют собой гауссовы случайные процессы, отличные от белого шума, и имеют следующие характеристики:

$$M[W(t)]=0, \quad M[W(t_1)W^T(t_2)] = K_w(t_1,t_2),$$

(3)

$$M[V(t)]=0, \quad M[V(t_1)V^T(t_2)] = K_v(t_1,t_2)\,,$$

(4)

причем матрица $K_v(t, t)$ является положительно определенной.

Кроме того, будем считать, что процессы $W(t)$ и $V(t)$ коррелированы между собой

$$M[W(t_1)V^T(t_2)] = K_{wv}(t_1,t_2)$$

(5)

и не коррелированы с вектором начальных условий $X(t_0)$

$$M[X(t_0)W^T(t)] = 0\,, \qquad M[X(t_0)V^T(t)] = 0\,.$$

Последнее ограничение обуславливается тем, что в реальных системах оно, как правило, выполняется. Однако и без этого допущения рассматриваемая задача может быть решена тем же способом.

Допущение о равенстве нулю математических ожиданий случайных входных воздействий и шумов измерений, используемое здесь для упрощения дальнейших выкладок, не является существенным, поскольку оно легко устранимо с помощью введения соответствующих детерминированных управляющих воздействий.

Полагая, что система, определяемая соотношениями (1) и (2), является наблюдаемой, найдем наилучшую оценку $\hat{X}(t)$ полезного сигнала $X(t)$, удовлетворяющую критерию минимума средней квадратической ошибки

$$\left.\begin{aligned} &SpM[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)] = \min;\\ &\varepsilon(t) = X(t) - \hat{X}(t). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\varepsilon(t)$ представляет собой ошибку оценивания вектора состояния $X(t)$.

Для нахождения этой оценки воспользуемся необходимым и достаточным условием минимума средней квадратической ошибки [1]

$$M[\{X(t)-\hat{X}(t)\}Y^{T}(t)]=0. \qquad (7)$$

Входящий в это равенство случайный процесс $Y(t)$, является результатом преобразования вектора измерений $Z(t)$ некоторым произвольным линейным нестационарным оператором.

Так как условие оптимальности (7) должно выполняться для всех операторов, образующих полное линейное пространство, в качестве оператора, воспроизводящего процесс $Y(t)$, выберем линейный оператор вида

$$Y(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi_{y}(t,\tau_{1})Z(\tau_{1})d\tau_{1}, \qquad (8)$$

где $\Phi_y(t,\tau_1)$ - весовая функция этого оператора.

С учетом формулы (8), уравнение (7) его можно записать так

$$\int_{t_0}^{t}M[\{X(t)-\hat{X}(t)\}Z^{T}(\tau_{1})]\Phi_{y}^{T}(t,\tau_{1})d\tau_{1}=0. \qquad (9)$$

В силу произвольности функции $\Phi_y(t,\tau_1)$, это равенство выполняется, если корреляционная функция, стоящая под знаком интеграла, равна нулю

$$M[\{X(t)-\hat{X}(t)\}Z^{T}(\tau_{1})]=0, \qquad t_0\le\tau_1\le t. \qquad (10)$$

Заметим, что параметр τ_1 в этом соотношении может принимать любые значения на интервале $[t_0,t]$, в том числе и равное t.

Учитывая теперь, что $\varepsilon(t)=X(t)-\hat{X}(t)$, из последнего соотношения получим

$$M[\varepsilon(t)Z^{T}(\tau_{1})]=0. \qquad t_0\le\tau_1\le t. \qquad (11)$$

Условие (11) является общим условием минимума средней квадратической ошибки, которому должен удовлетворять оптимальный оператор, обеспечивающий нахождение оценки $\hat{X}(t)$.

3. ***Определение структуры оптимального фильтра.***

Необходимо сказать, что задача построения оптимальной системы, в принципе, может быть решена двумя способами.

В первом из них, в качестве такой системы рассматриваются системы, структура и параметры которых полностью неизвестны. В этом случае необходимо осуществить синтез структуры системы и определить ее параметры так, чтобы обеспечивалось выполнение условия (11).

Однако в настоящее время не существует общих методов решения этой задачи. Поэтому ее решение связано со значительными трудностями и, как правило, может быть выполнено лишь в некоторых частных случаях.

Во втором, изначально полагается, что структура системы задана, а оптимизация осуществляется путем выбора ее основных параметров. При этом, путем задания соответствующей структуры оптимизируемой системы, можно учесть особенности технических средств, которые предполагается использовать для ее реализации.

Среди всех линейных систем, условию простоты технической реализации наиболее полно удовлетворяют системы, функционирование которых описывается линейными нестационарными дифференциальными уравнениями. Этот класс систем образует линейное подпространство, входящее в пространство всех линейных систем. Поэтому построение оптимальной системы для этого подкласса может быть осуществлено на основе условия оптимальности (11).

Учитывая изложенное выше, зададим структуру оптимальной системы в виде линейного дифференциального уравнения [2]

$$\dot{\hat{X}}(t) = L(t)\hat{X}(t) + A(t)Z(t),$$

(12)

где $L(t)$ и $A(t)$ неизвестные матрицы размера $n \times n$ и $n \times \ell$ соответственно.

Ошибка $\varepsilon(t)$ оценки $\hat{X}(t)$, определяемой с помощью этого алгоритма, удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon}(t) = \{F(t) - A(t)C(t) - L(t)\}X(t) + L(t)\varepsilon(t) - A(t)V(t) + B(t)W(t),$$

(13) которое нетрудно получить почленным вычитанием уравнения (12) из уравнения (1).

Для выбора матриц $L(t)$ и $A(t)$ воспользуемся условием несмещенности $M[\hat{X}(t)] = M[X(t)]$, $t \geq t_0$, из которого следует необходимость выполнения равенства $M[\varepsilon(t)] = 0$ при всех $t \geq t_0$.

Применив к левой и правой частям уравнения (13) операцию математического ожидания и учтя также, что по условиям постановки задачи $M[W(t)]=0$ и $M[V(t)]=0$, придем к следующему соотношению

$$\{F(t) - A(t)C(t) - L(t)\}M[X(t)] = 0 .$$

Но так как в общем случае $M[X(t)] \neq 0$, последнее равенство будет выполняться, если

$$F(t) - A(t)C(t) - L(t) = 0,$$

откуда следует, что

$$L(t) = F(t) - A(t)C(t). \tag{14}$$

Подставляя это соотношение в уравнения (12) и (13), получим дифференциальное уравнение, определяющее структуру оптимального фильтра

$$\dot{\hat{X}}(t) = F(t)\hat{X}(t) + A(t)\{Z(t) - C(t)\hat{X}(t)\}$$

(15)

и уравнение, описывающее поведение ошибки вычисления оптимальной оценки $\hat{X}(t)$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \{F(t) - A(t)C(t)\}\varepsilon(t) - A(t)V(t) + B(t)W(t) \cdot$$

(16)

4. ***Вывод алгоритма вычисления оптимального коэффициента усиления.***

Чтобы уравнение (15) обеспечивало определение оценки $\hat{X}(t)$ с минимальной средней квадратической ошибкой, необходимо найти оптимальное значение матрицы коэффициентов усиления фильтра $A(t)$. Для нахождения этой матрицы представим решение уравнения (16) в виде

$$\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon(t,t_0)\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_\varepsilon(t,\tau_2)\{-A(\tau_2)V(\tau_2) + B(\tau_2)W(\tau_2)\}d\tau_2 ,$$

(17)

где через $\Phi_\varepsilon(t,\tau_2)$ обозначена фундаментальная матрица уравнения (16), и подставим его, а также равенство $Z^T(\tau_1) = X(\tau_1)^T C^T(\tau_1) + V^T(\tau_1)$ в условие оптимальности (11)

$$M[\varepsilon(t)Z^T(\tau_1)] = \Phi_\varepsilon(t,t_0)\{M[\varepsilon(t_0)X^T(\tau_1)]C^T(\tau_1) + M[\varepsilon(t_0)V^T(\tau_1)]\} +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \Phi_\varepsilon(t,\tau_2)\{-A(\tau_2)M[V(\tau_2)Z^T(\tau_1)] + B(\tau_2)M[W(\tau_2)Z^T(\tau_1)]\}d\tau_2 = 0. \qquad t_0 \le \tau_1 \le t, \qquad (18)$$

Поскольку начальное значение ошибки $\varepsilon(t_0)$ не коррелировано с процессами $X(t)$ и $V(t)$, первое слагаемое в соотношении (18) равно нулю. Кроме того, в силу произвольности функции $\Phi_\varepsilon(t,\tau_2)$, это соотношение выполняется, если равно нулю выражение, стоящее в фигурных скобках под знаком интеграла,

$$A(\tau_2)M[V(\tau_2)Z^T(\tau_1)] - B(\tau_2)M[W(\tau_2)Z^T(\tau_1)] = 0, \qquad t_0 \le \tau_1 \le t, \; t_0 \le \tau_2 \le t. \qquad (19)$$

Это соотношение определяет условие, которому должна удовлетворять матрица оптимальных коэффициентов усиления $A(t)$.

Преобразуем его, подставив равенство $Z^T(\tau_1) = X(\tau_1)^T C^T(\tau_1) + V^T(\tau_1)$

$A(\tau_2)\{M[V(\tau_2)V^T(\tau_1) + M[V(\tau_2)X^T(\tau_1)]C^T(\tau_1)\}-$

$- B(\tau_2)\{M[W(\tau_2)V^T(\tau_1)] + M[W(\tau_2)X^T(\tau_1)]C^T(\tau_1)\} = 0. \qquad t_0 \le \tau_1 \le t,\ t_0 \le \tau_2 \le t.$ (20)

Используя введенные ранее обозначения $M[V(\tau_2)V^T(\tau_1)]=K_v(\tau_2,\tau_1)$ и $M[W(\tau_2)V^T(\tau_1)]=K_{wv}(\tau_2,\tau_1)$, а также обозначив $M[W(\tau_2)X^T(\tau_1)]=K_{wx}(\tau_2,\tau_1)$ и $M[V(\tau_2)X^T(\tau_1)]=K_{vx}(\tau_2,\tau_1)$, перепишем последнее равенство в следующем виде

$A(\tau_2)\{K_v(\tau_2,\tau_1) + K_{vx}(\tau_2,\tau_1)C^T(\tau_1)\} - B(\tau_2)\{K_{wv}(\tau_2,\tau_1) + K_{wx}(\tau_2,\tau_1)C^T(\tau_1)\} = 0,\ t_0 \le \tau_1 \le t,\ t_0 \le \tau_2 \le t.$ (21)

В это соотношении корреляционные матрицы $K_v(\tau_2,\tau_1)$ и $K_{wv}(\tau_2,\tau_1)$ заданы при постановке задачи, а $K_{wx}(\tau_2,\tau_1)$ и $K_{vx}(\tau_2,\tau_1)$ могут быть вычислены. Для получения алгоритмов их вычисления, представим решение уравнения (1) следующим выражением

$$X(t) = \Phi(t,t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)W(\tau)d\tau,$$

(22)

где через $\Phi(t,\tau)$ обозначена фундаментальная матрица этого уравнения.

Используя это выражение, нетрудно получить следующие соотношения для вычисления корреляционных функций $K_{wx}(\tau_2,\tau_1)$ и $K_{vx}(\tau_2,\tau_1)$

$$K_{wx}(\tau_2,\tau_1) = \int_{t_0}^{\tau_1} M[W(\tau_2)W^T(\tau)]B^T(\tau)\Phi^T(\tau_1,\tau)d\tau, \qquad t_0 \le \tau_1 \le t,\ t_0 \le \tau_2 \le t$$

(23)

$$K_{vx}(\tau_2,\tau_1) = \int_{t_0}^{\tau_1} M[V(\tau_2)W^T(\tau)]B^T(\tau)\Phi^T(\tau_1,\tau)d\tau. \qquad t_0 \le \tau_1 \le t,\ t_0 \le \tau_2 \le t$$

(24)

Положим в соотношении (21) $\tau_1 = t$ и $\tau_2 = t$. В результате получим

$A(t)\ \{K_v(t,t) + K_{vx}(t,t)C^T(t)\} - B(t)\{K_{wv}(t,t) + K_{wx}(t,t)C^T(t)\}$.

(25)

В этом выражении единственной неизвестной функцией является матрица $A(t)$. Если матрица $\{K_v(t,t) + K_{vx}(t,t)C^T(t)\}$, входящая в первое слагаемое этого выражения, неособенная, то оптимальный коэффициент усиления $A(t)$ всегда может быть вычислен с помощью следующего соотношения

$A(t) = B(t)\{K_{wv}(t,t) + K_{wx}(t,t)C^T(t)\}\{K_v(t,t) + K_{vx}(t,t)C^T(t)\}^{-1}.$ (26)

Объединяя последнее соотношение с уравнением (15), окончательно алгоритм оптимального фильтра можно представить в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\hat{X}}(t) = F(t)\hat{X}(t) + A(t)[Z(t) - C(t)\hat{X}(t)], \hat{X}(t_0) = M[X_0], \\ &A(t) = B(t)\{K_{w}(t,t) + K_{wx}(t,t)C^T(t)\}\{K_v(t,t) + K_{vx}(t,t)C^T(t)\}^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Начальное значение $\hat{X}(t_0)$, в уравнениях (27), задано исходя из условия равенства нулю ошиб- ки воспроизведения неслучайной составляющей полезного сигнала $X(t)$.

Подставив соотношение (22), а также уравнение, описывающее алгоритм вычисления оптимального коэффициента усиления $A(t)$, и решение первого уравнения из системы уравнений (27)
в необходимое условие оптимальности (10), нетрудно убедиться, что оно удовлетворяется. Следовательно, полученный алгоритм оптимального фильтра, обеспечивает нахождение оценки $\hat{X}(t)$ с минимальной средней квадратической ошибкой.

В случае, когда случайные процессы $W(t)$ и $V(t)$ не коррелированы, этот алгоритм существенно упрощается и принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\hat{X}}(t) = F(t)\hat{X}(t) + A(t)[Z(t) - C(t)\hat{X}(t)], \hat{X}(t_0) = M[X_0], \\ &A(t) = B(t)K_{wx}(t,t)C^T(t)K_v(t,t)^{-1}. \end{aligned}\right\}$$

(28)

5. ***Основные особенности оптимального фильтра.***

Полученный алгоритм оптимальной фильтрации позволяет решать задачу нахождения опти- мальной оценки $\hat{X}(t)$ в случае, когда входные воздействия и шумы измерений представляют со- бой гауссовы случайные процессы, отличные от процесса типа белого шума.

В отличие от алгоритма Калмана-Бьюси, в нем не используются формирующие фильтры, а также отпадает необходимость решать нелинейное векторно-матричное дифференциальное уравнение, для определения корреляционной матрицы ошибок работы фильтра. Указанные обстоятельства обеспечивают существенное сокращение объема вычислительных операций.

При использовании этого алгоритма, задача нахождения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ может быть решена лишь в случае, когда движение, описываемое однородным уравнением ошибок работы оптимального фильтра $\dot{\varepsilon}(t) = \{F(t) - A(t)C(t)\}\varepsilon(t)$, асимптотически устойчиво.

Данный алгоритм позволяет решить задачу нахождения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ и в случае, когда вектор входных воздействий $W(t)$ представляет собой гауссов белый шум с известными характеристиками:

$M[W(t)]=0, \quad M[W(t_1)W^T(t_2)] = K_w(t_1,t_2) = Q(t_1)\,\delta(t_1 - t_2),$

где $Q(t_1)$ – симметричная матрица интенсивностей.

При этом шум измерений $V(t)$ должен быть отличен от белого шума.

Так, например, полагая, что процессы $W(t)$ и $V(t)$ не коррелированы, т. е. их взаимная корреляционная матрица $K_{wv}(t_1,t_2) = 0,$ а также учитывая, что, в соответствии с (23),

$K_{wx}(t,t) = Q(t)B^T(t)$,

алгоритм оптимального фильтра, в этом случае, нетрудно представить в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\hat{X}}(t) = F(t)\hat{X}(t) + A(t)[Z(t) - C(t)\hat{X}(t)], \hat{X}(t_0) = M[X_0],\\ &A(t) = B(t)Q(t)B^T(t)C^T(t)K_v(t,t)^{-1}. \end{aligned}\right\}$$

(29)

6. ***Пример.***

Для иллюстрации работоспособности полученного алгоритма оптимального фильтра, рассмотрим задачу нахождения оценки случайного процесса $x(t)$, поведение которого задано уравнением

$\dot{x}(t) + bx(t) = w(t), x(t_0)$,

(30)

при измерении процесса

$z(t) = x(t) + v(t),$

где $b = const$, а шумы $w(t)$ и $v(t)$ не коррелированы между собой и представляют стационарные случайные процессы со следующими корреляционными функциями

$$\left.\begin{aligned} &K_w(t_1,t_2)=D_w e^{-\alpha|\tau|} \\ &K_v(t_1,t_2)=D_v e^{-\alpha|\tau|}, \tau=t_1-t_2 \end{aligned}\right\}$$

В соответствии с уравнениями (28), алгоритм оптимального фильтра будет иметь следующий вид

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\hat{x}}(t)=b\hat{x}(t)+A[z(t)-\hat{x}(t)] \\ &A(t)=\frac{K_{wx}(t,t)}{D_v} \end{aligned}\right\}$$

Представив решение уравнения (30) равенством

$$x(t)=e^{-b(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha|t-\tau|}w(\tau)d\tau \ ,$$

алгоритм вычисления корреляционной функции $K_{wx}(t,t)$ нетрудно представить в виде

$$K_{wx}(t,t)=\frac{D_w}{\alpha+b}[1-e^{-(\alpha+b)t}].$$

Моделирование этого алгоритма проводилось при следующих начальных условиях и характеристиках случайных процессов: $x(t_0)$=10000 м, $\hat{x}(t_0)=0$, b=0,01 1/cek, D_w=7,55 10^{-7} м^2/сек^2, α=0,00432 1/сек, D_v=407,9 м^2, β=0,029 1/сек. При этом, ошибки воспроизведения случайных процессов $w(t)$ и $v(t)$ составляли 5÷10 %. Результаты моделирования приведены на рис 1.

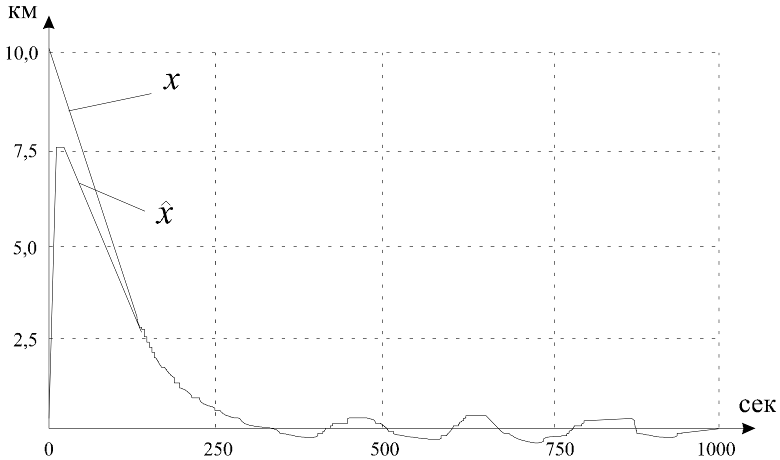

Рис 1.

Расчеты показывают, что, после окончания переходного процесса, величина ошибки $\varepsilon(t)=|x(t)-\hat{x}(t)|$ не превышает 25 м.

Таким образом, приведенные результаты подтверждают работоспособность полученного алгоритма оптимального фильтра.

Список литературы.

1. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1962, 3-е издание. - 883 с.
2. Казаков И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. –М.: Наука, 1975. - 432 с.
3. Калман Р. Е., Бьюси Р. С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. //Труды американского общества инженеров – механиков. Техническая механика, – 1961, т. 83, серия Д, №1. – с.123-141.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Савинов Геннадий Федорович, доцент кафедры «Автоматизированные комплексы, системы ориентации и навигации» Московского государственного авиационного института (технического университета), к. т. н.