

Труды МАИ. 2023. № 130
Trudy MAI, 2023, no. 130

Обзорная статья
УДК 533.6.071.2
DOI: [10.34759/trd-2023-130-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-05)

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ ЭЖЕКТОРОВ В РАЗЛИЧНЫХ ТЕОРИЯХ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Александр Михайлович Еремин

Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н.Е. Жуковского,
ЦАГИ, Жуковский, Московская область, Россия

chief.ere2011@yandex.ru

Аннотация. В данной работе рассматриваются условия оптимальности газового эжектора в рамках различных теорий критического режима. Исследование уравнений газовой динамики в эжекторе на условный экстремум проводилось методом неопределенных множителей Лагранжа. Найдены новые аналитические условия оптимальности и определен характер полученных стационарных точек. Полученные условия оптимальности подтверждены численным расчетом. Показано, что характер стационарных точек (максимум, либо точка перегиба) может меняться в зависимости от поставленного условия запираания эжектора.

Ключевые слова: газовый эжектор, степень сжатия, коэффициент эжекции, условия оптимальности, метод Лагранжа, условный экстремум

Для цитирования: Еремин А.М. Условия оптимальности классических эжекторов в различных теориях критических режимов // Труды МАИ. 2023. № 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-05)

Review article

CONDITIONS OF OPTIMALITY OF CLASSICAL EJECTORS IN THE FRAME OF DIFFERENT THEORIES OF CRITICAL MODE

Alexander M. Eremin

Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky, TsAGI,
Zhukovsky, Moscow Region, Russia

chief.ere2011@yandex.ru

Abstract. In this article explores conditions for the optimality of a gas ejector in various theories of the critical mode. Explored three theories: Millionshikov–Ruabinkov theory, Vasiliev theory and Pearson, Holyday and Smith theory. System of equations of critical mode has been investigated on extremum by Lagrange method. New conditions of optimality have been obtained. For theories of Millionshikov–Ruabinkov and Pearson these condition for the optimality is blocking in pipe with flexible boundary and which corresponds to subsonic speed of gas in the place of blocking. New condition for the optimality for Vasiliev theory is equality of static pressures in mixed jets in the place of blocking. In the frame of each theory for a number of values of the reduced speed of active gas has been calculated values of compression ratio for $k=0,1$ and $\sigma=10$. Examination of these figures shows that in the case of classical condition of blocking $\lambda_2=1$ point with

equal static pressures at the entrance of ejector responds to the maximum of compression ratio. In the case of blocking in the pipe with flexible boundaries point with equal static pressures at the entrance of ejector responds to the inflection point of compression ratio curve, but maximum of compression ratio responds to the sonic speed of gas in the entrance of ejector. In the frame of Vasiliev theory has been obtained that the case of equal static pressure in the place of blocking responds to the maximum of compression ratio and this case is different from critical mode. Also has been obtained that in frame of Pearson theory exists the condition of optimality, which differ from the condition of optimality by Vasiliev theory by the presence of an additional term. Although obtained condition is mathematically correct, calculations show that it can't be realized in real ejector.

Keywords: gas ejector, compression ratio, ejection coefficient, conditions of optimality, Lagrange method, conditional extremum

For citation: Eremin A.M. Conditions of optimality of classical ejectors in the frame of different theories of critical mode. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-05)

Введение

Задача об оптимальном эжекторе известна со времен работы [1]. В настоящее время газовые эжекторы нашли широкое распространение в различных отраслях промышленности таких как газодобыча, газовая и химическая промышленность, авиастроение и многих других. В авиастроении эжекторы применяются в качестве приводов аэродинамических труб [2], системах газонаполнения спасательных

трапов [3], в эжекторных соплах, и в качестве увеличителей тяги реактивных двигателей [4-6]. В работах [7-8] предлагается использовать эжектор в схеме воздушно – реактивного двигателя для повышения его производительности.

Впервые общепризнанная теория газового эжектора была разработана С.А. Христиановичем [9]. Им были записаны уравнения сохранения расхода, импульса и энергии между входным и выходным сечениями камеры смешения и получено решение этой системы уравнений. М. Д. Миллионщиковым и Г. М. Рябинковым в работе [10] обнаружено, что эффективность эжектора ограничена критическими режимами. При критическом режиме расход низконапорного газа через эжектор максимален и не меняется при снижении противодавления. В [10] впервые предложена теория критического режима эжектора. В ней пренебрегается смешением струй до сечения запираания, предполагается, что давление в сечении запираания постоянно, а скорость низконапорного потока в этом сечении равна звуковой. Теория [10] хорошо подтверждается экспериментом при малых перепадах (отношениях) давлений σ , характерных для эжекторов газовой промышленности ($\sigma < 4$). Полученные позднее в экспериментах О. В. Лыжина характеристики эжекторов для больших перепадов давления оказались хуже, чем рассчитанные по теории [10]. А. А. Никольский указал, что в теории [10] между входом камеры смешения и сечением запираания не используется закон сохранения импульса. В [1, 11] уравнения критического режима дополнены уравнением сохранения импульса, а давление в сечении запираания уже не полагалось постоянным по сечению. Обе теории [1, 11] одинаково хорошо согласуются с экспериментом, однако формулы для расчета критического режима по теории [1] значительно проще и в основном

они используются для расчета характеристик эжектора. В [12] для расчета критического режима эжектора течение в высоконапорной струе строилось методом характеристик. В то же время теории критического режима газового эжектора были предложены зарубежными авторами. [13-16]. В настоящее время развиваются численные методы исследования течений в эжекторах [17-18].

Характеристикой эжектора, определяющей его эффективность в практическом плане, например, как устройства для создания потока в аэродинамической трубе является его степень сжатия. При разработке эжектора обычно требуется при нескольких известных параметрах подобрать остальные параметры такими, что бы степень сжатия была наибольшей. Эжектор, имеющий при заданных параметрах максимальную степень сжатия называется оптимальным.

Впервые понятие об оптимальном эжекторе было сформулировано Ю.Н. Васильевым. По уравнениям своей теории [1] он провел численные расчеты степени сжатия эжектора для ряда значений скорости высоконапорного газа. При этом коэффициент эжекции и отношение полных давлений считались постоянными. Расчеты показали, что имеется некоторое оптимальное значение скорости высоконапорного газа на входе в эжектор при котором степень сжатия максимальна (рис.1). Максимум степени сжатия особенно сильно выражен при малых коэффициентах эжекции.

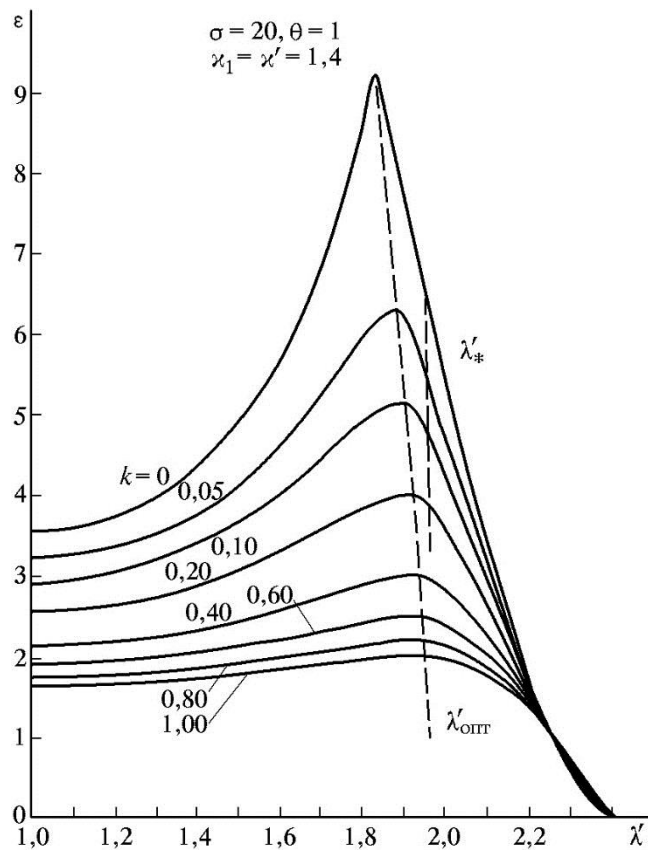


Рис.1— оптимальный эжектор по Ю.Н. Васильеву

Позднее В.А Готовым была аналитически исследована система уравнений критического режима Ю.Н. Васильева и получены условия оптимальности эжектора, соответствующие вышеупомянутому максимуму степени сжатия [2].

В работах [1] и [10] полагалось, что эжектор имеет максимальные (критические) характеристики при звуковой скорости низконапорного газа в сечении запирания. В работе [16] использовалось условие запирания в канале с податливыми (гибкими) границами, которому соответствуют дозвуковые значения скорости низконапорного газа в сечении запирания.

Несмотря на то, что обычно при расчете характеристик эжектора используется теория [1], поиск оптимального эжектора в рамках других теорий критического

режима, несомненно, представляет большой интерес. В данной работе исследуются условия оптимальности эжектора по различным теориям критического режима: Васильева [1]; Миллионщикова–Рябинкова [10]; Пирсона, Холлидея и Смита [16].

1. Оптимальный эжектор по теории Миллионщикова – Рябинкова

На Рис. 2 приведена схема течения в эжекторе. Пониженное давление в сечении 1-1 создается струей эжектирующего газа. Истечение сверхзвуковой струи сопровождается образованием волн, которые ограничивают проходное сечение низконапорного потока. Из-за того, что площадь низконапорной струи уменьшается, в некотором сечении (сечение 2–2) ее скорость становится равной скорости звука, что ограничивает производительность газового эжектора

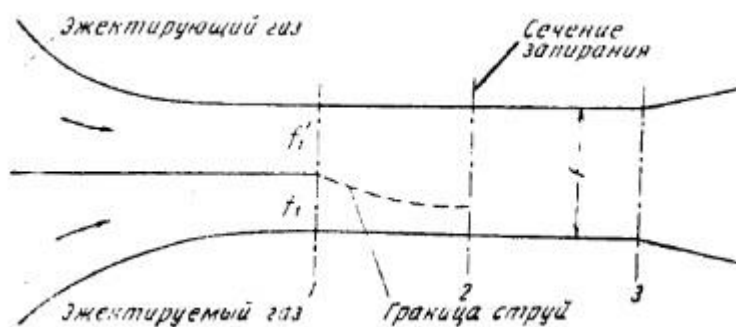


Рис.2. Схема течения на начальном участке камеры смешения эжектора

Исследуем методом множителей Лагранжа [19] на условный экстремум степень сжатия газового эжектора по теории критического режима Миллионщикова–Рябинкова [10]. Будем рассматривать случай смешения газов с одинаковыми температурами торможения, и показателем адиабаты. Индексом 1 будем обозначать параметры газа на входе в камеру смешения, индексом 2 – в

сечения запырания, индексом 3 – параметры смеси. Параметры эжектирующего газа будем обозначать штрихом, а эжектируемого газа – без штриха. Параметры торможения будем обозначать индексом 0.

Выпишем уравнения критического режима по теории [10]:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(k+1)\tilde{q}(\lambda'_1)}{(a+1)\tilde{q}(\lambda_3)} \quad (1.1)$$

$$k\sigma\tilde{q}(\lambda'_1) - a\tilde{q}(\lambda_1) = 0 \quad (1.2)$$

$$\tilde{q}(\lambda'_2) \left[1 + a \left(1 - \frac{\tilde{q}(\lambda_1)}{\tilde{q}(\lambda_2)} \right) \right] - \tilde{q}(\lambda'_1) = 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma\pi(\lambda'_2) - \pi(\lambda_2) = 0 \quad (1.4)$$

$$z(\lambda_3)(k+1) - kz(\lambda_1) - z(\lambda'_1) = 0 \quad (1.5)$$

Здесь и далее по тексту обозначены:

$$\varepsilon = \frac{p_{03}}{p_{01}} \text{ – степень сжатия;}$$

$$k = \frac{G_1}{G'} \text{ – коэффициент эжекции, где } G \text{ – массовый расход;}$$

$$\sigma = \frac{p'_0}{p_{01}} \text{ – отношение полных давлений смешиваемых газов на входе в эжектор;}$$

a – отношение площадей низконапорного и высоконапорного потока на входе в эжектор;

$$\lambda = \frac{w}{a_*} \text{ – приведенная скорость, где } w \text{ – скорость газа, а } a_* \text{ – критическая скорость.}$$

Газодинамические функции:

$$\tilde{q}(\lambda) = \lambda \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda};$$

$$\pi(\lambda) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Будем искать стационарные точки функции (1.1) при уравнениях связи (1.2) – (1.5).

Составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} F = & \frac{\sigma \tilde{q}(\lambda'_1)(k+1)}{(a+1)\tilde{q}(\lambda_3)} + X_1(k\sigma \tilde{q}(\lambda'_1) - a\tilde{q}(\lambda_1)) + \\ & + X_2 \left\{ \tilde{q}(\lambda'_2) \left(1 + a \left(1 - \frac{\tilde{q}(\lambda_1)}{\tilde{q}(\lambda_2)} \right) \right) - q(\lambda'_1) \right\} + \\ & + X_3(\pi(\lambda_2) - \sigma\pi(\lambda'_2)) + X_4(z(\lambda_3)(k+1) - kz(\lambda_1) - z(\lambda'_1)) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Найдем частные производные функции (1.6):

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda'_1} = \frac{\sigma(k+1)}{(a+1)\tilde{q}(\lambda_3)} \frac{\partial \tilde{q}(\lambda'_1)}{\partial \lambda'_1} + X_1 k \sigma \frac{\partial \tilde{q}(\lambda'_1)}{\partial \lambda'_1} - X_2 \frac{\partial \tilde{q}(\lambda'_1)}{\partial \lambda'_1} - X_4 \frac{\partial z(\lambda'_1)}{\partial \lambda'_1} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\sigma(k+1)\tilde{q}(\lambda'_1)}{(a+1)^2 \tilde{q}(\lambda_3)} + X_1 \tilde{q}(\lambda_1) + X_2 \tilde{q}(\lambda'_2) \left(1 - \frac{\tilde{q}(\lambda_1)}{\tilde{q}(\lambda_2)} \right) = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = X_1 a \frac{\partial \tilde{q}(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} + X_2 \tilde{q}(\lambda'_2) a \frac{1}{\tilde{q}(\lambda_2)} \frac{\partial \tilde{q}(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} - X_4 k \frac{\partial z(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda'_2} = X_2 \left(1 + a \left(1 - \frac{\tilde{q}(\lambda_1)}{\tilde{q}(\lambda_2)} \right) \right) \frac{\partial \tilde{q}(\lambda'_2)}{\partial \lambda'_2} - X_3 \sigma \frac{\partial \pi(\lambda'_2)}{\partial \lambda'_2} = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = \frac{\sigma(k+1)\tilde{q}(\lambda'_1)}{(a+1)\tilde{q}^2(\lambda_3)} \frac{\partial \tilde{q}(\lambda_3)}{\partial \lambda_3} + X_4(k+1) \frac{\partial z(\lambda_3)}{\partial \lambda_3} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = X_2 \frac{\tilde{q}(\lambda'_2)a\tilde{q}(\lambda_1)}{\tilde{q}^2(\lambda_2)} \frac{\partial \tilde{q}(\lambda_2)}{\partial \lambda_2} + X_3 \frac{\partial \pi(\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0 \quad (1.12)$$

Используя соотношение: $\frac{d\tilde{q}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\tilde{q}^2(\lambda)}{\pi(\lambda)} \frac{dz(\lambda)}{d\lambda}$ [2], из системы уравнений

(1.7) – (1.12) находим следующие стационарные точки функции (1.1):

$$p_1 = p'_1 \quad (1.13),$$

$$1 + k\sigma \frac{\psi(\lambda'_2)}{\psi(\lambda_2)} = 0 \quad (1.14)$$

где $\psi(\lambda)$ – следующая газодинамическая функция:

$$\psi(\lambda) = \frac{d\pi(\lambda)}{d\lambda} / \frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)^{-1} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (1.15)$$

График функции $\psi(\lambda)$ приведен на Рис. 3. Её дозвуковая ветвь принимает положительные значения, а сверхзвуковая – отрицательные. Так как произведение $k \cdot \sigma$ всюду положительно, то очевидно, что для выполнения условия (1.14) необходимо что бы $\psi(\lambda_2)$ и $\psi(\lambda'_2)$ имели разные знаки. Поэтому, должно быть: $\lambda'_2 > 1$ и $\lambda_2 < 1$, либо $\lambda'_2 < 1$ и $\lambda_2 > 1$. Условие (1.14) является условием запирания в канале с податливыми границами. Оно ранее было получено в несколько иной форме в работе [16].

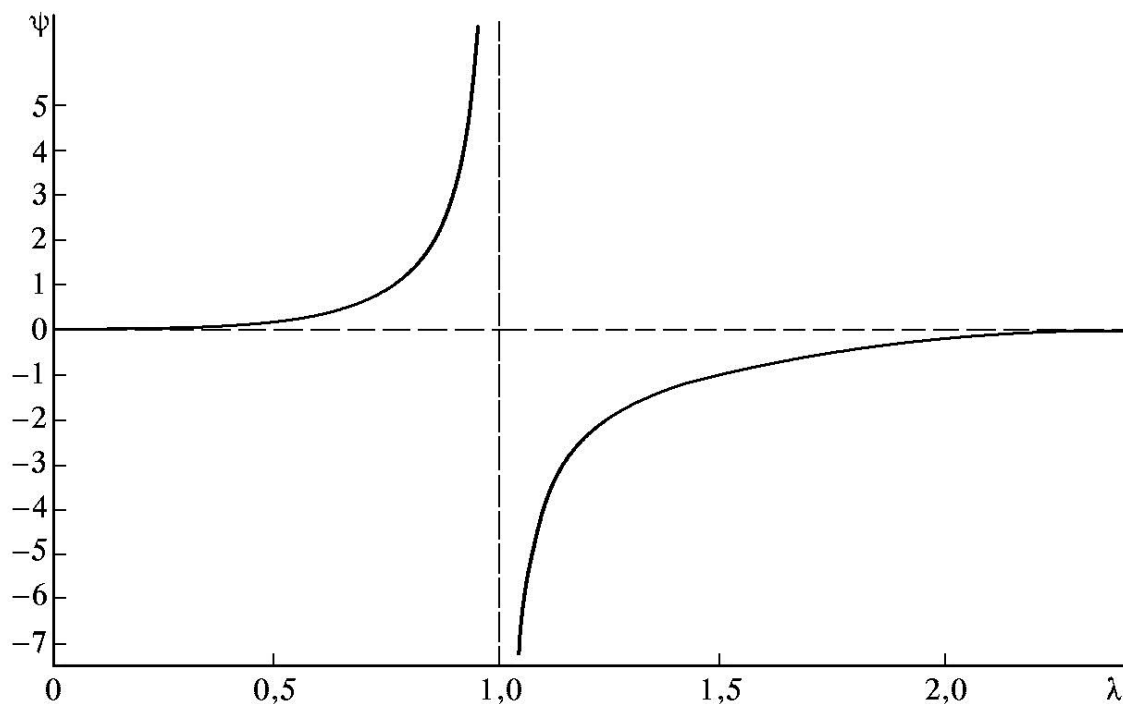


Рис. 3 – График функции $\psi(\lambda)$

Для определения характера полученных стационарных точек был проведен численный расчет степени сжатия. Ниже кратко опишем метод решения системы уравнений (1.1)–(1.5) для случая $\lambda_2=1$. При расчете были заданы k , σ , λ'_1 и $\lambda_2=1$. Из уравнения (1.4) определялось значение λ'_2 . Затем с помощью уравнения (1.2) из уравнения (1.3) исключалась переменная a . Таким образом в уравнении (1.3) оставалась единственная переменная λ_1 . Поскольку вид уравнения (1.3) не позволяет явно выразить λ_1 , то оно решалось относительно переменной λ_1 методом секущих. Полученное значение λ_1 подставлялось в уравнение (1.2), чтобы найти a и в (1.5), чтобы найти значение приведенной скорости смеси λ_3 . Затем найденные значения λ_3 , и a подставлялись в уравнение (1.1) и вычислялось ε . Для проведения большого объема вычислительной работы была написана программа на языке C++.

Пример расчета степени сжатия при дозвуковой скорости смеси по теории [10] приведен на Рис 4. Там же пунктиром нанесено отношение статических давлений на входе в эжектор и штрих–пунктиром скорость низконапорного газа. Для расчета были заданы значения: $\sigma=10$; $k=0,1$ и условие запираия $\lambda_2=1$ Тем же нанесены зависимости $\frac{p_1}{p'_1}(\lambda'_1)$ и $\lambda_1(\lambda'_1)$. Расчеты производились до значения λ'_1 , при котором происходит запираие низконапорного потока на входе в эжектор ($\lambda_1=1$).

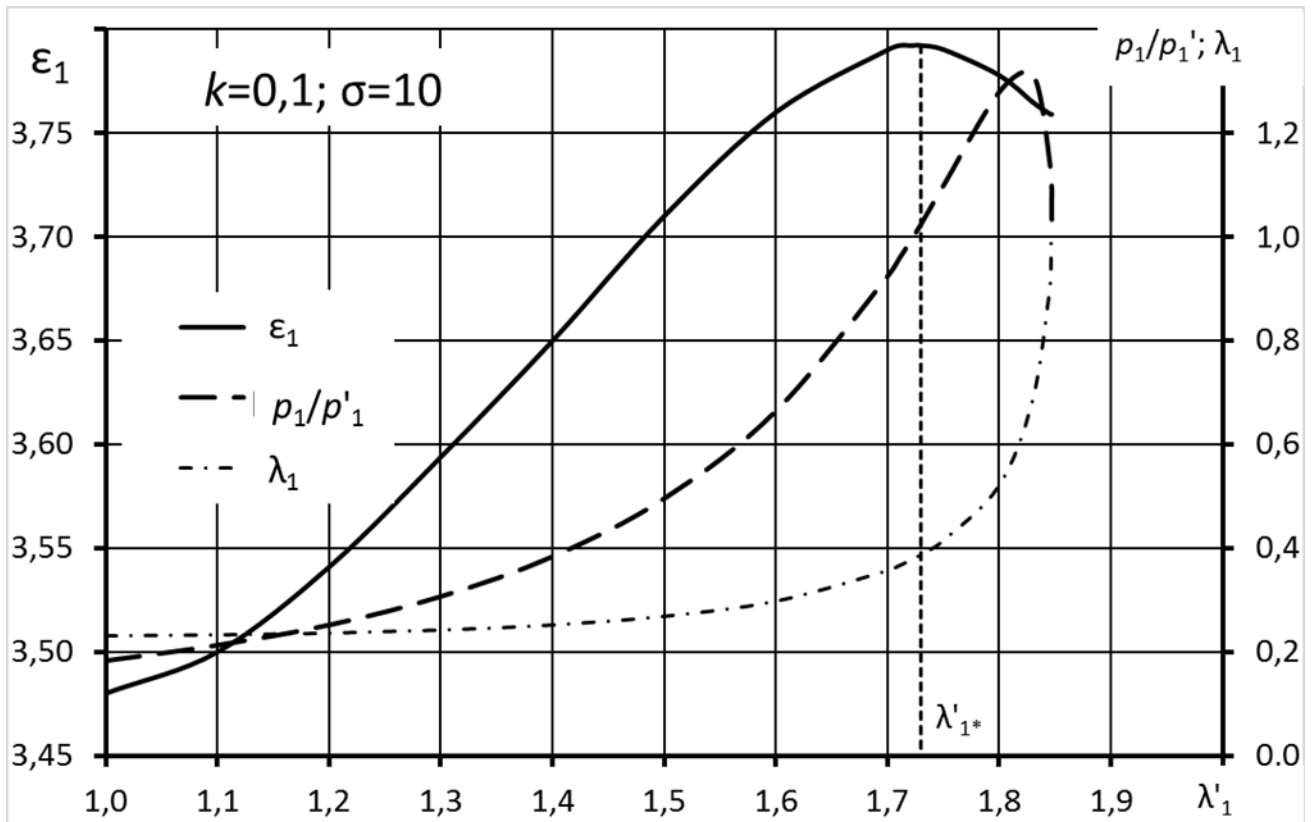


Рис. 4 – зависимость степени сжатия при дозвуковой скорости смеси и условия запираия $\lambda_2=1$ от приведенной скорости высоконапорного газа по теории Миллионщикова – Рябинкова

Из расчета следует, что при условии $p_1 = p_1'$ выполняется при двух значениях λ_1 : $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_1 = 1$. При $\lambda_1 < 1$ и условии $p_1 = p_1'$ имеет место максимум степени сжатия эжектора (оптимальное значение λ_{1*}' помечено пунктиром).

Результаты расчета по [10] зависимости $\varepsilon(\lambda_2)$ приведены на Рис. 5. Для расчета были заданы следующие параметры: $\lambda_1 = 1,75$; $k = 0,1$ и $\sigma = 10$. Сплошной линией на рисунке 1.4 изображена степень сжатия при сверхзвуковой скорости смеси, а штрихпунктирной – при дозвуковой. Из расчета следует, что степень сжатия имеет экстремум точно при условии (1.14), причем для дозвуковой скорости смеси условие (1.14) соответствует максимуму степени сжатия, а при сверхзвуковой скорости смеси – минимуму.

Рассчитанное по условию (1.14) оптимальное значение $\lambda_2 \approx 0,65$. При оптимальном значении λ_2 и дозвуковой скорости смеси степень сжатия на 8,5% выше, чем при $\lambda_2 = 1$. При сверхзвуковой скорости смеси и значении λ_2 , соответствующему условию (1.14) значение степени сжатия на 7,8% ниже, чем при $\lambda_2 = 1$.

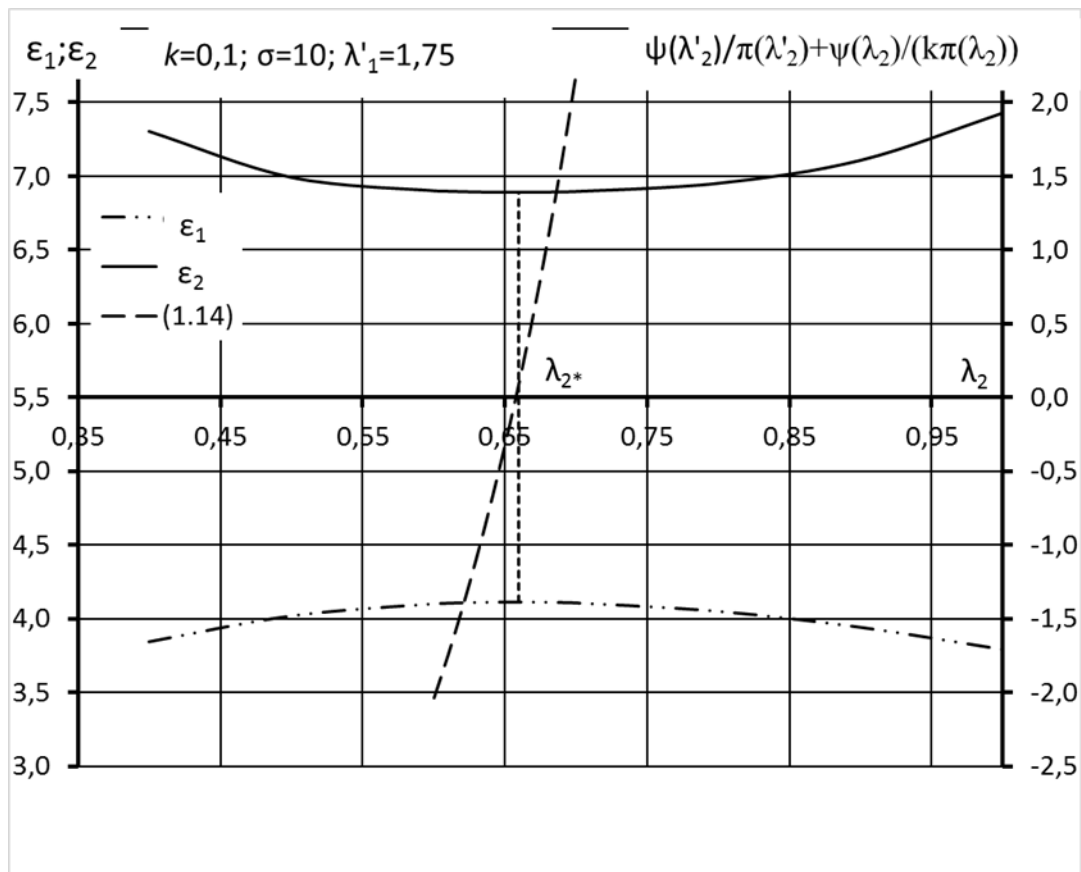


Рис. 5 – зависимость степени сжатия эжектора по теории Миллионщикова – Рябинкова от приведенной скорости низконапорного газа в сечении запираания

Пример расчета степени сжатия по теории [10] при условии запираания (1.14) приведен на Рис. 6–7. На Рис. 6 приведены результаты расчетов для всего диапазона значений λ'_1 , а на Рис 7– вблизи точки $p_1 = p'_1$. Для расчета были заданы значения $\sigma=10; k=0,1$. Из результатов расчета следует, что при условии запираания (1.14) условие $p_1 = p'_1$ соответствует точке перегиба степени сжатия, а максимум степени сжатия имеет место при $\lambda_1 = 1$ и $p_1 / p'_1 < 1$.

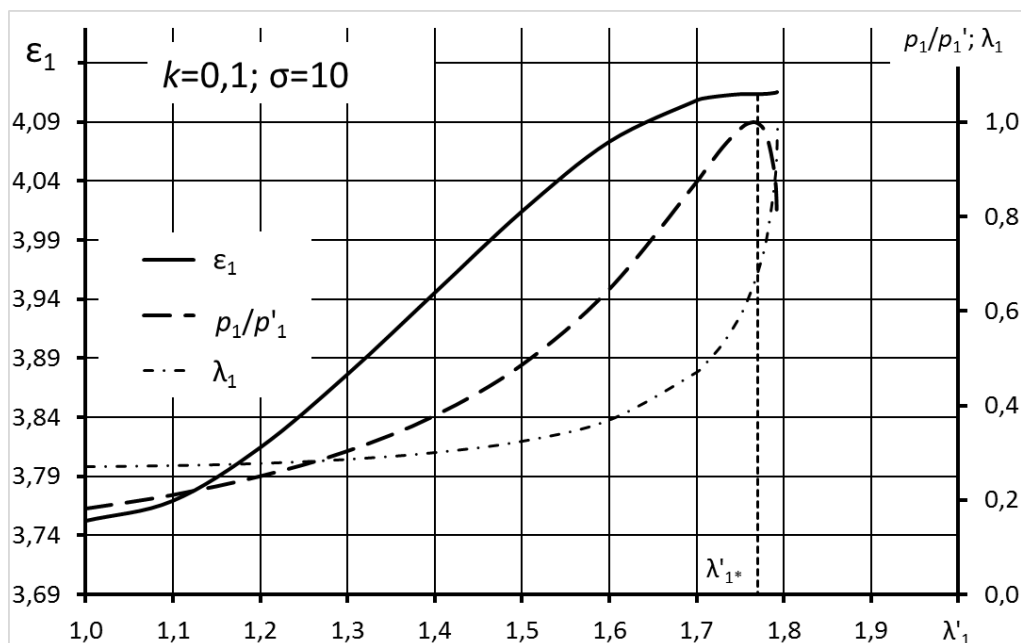


Рис 6 – Расчет степени сжатия при дозвуковой скорости смеси по теории Миллионщикова – Рябинкова при условии запирания (1.14)

Также изменилось поведение функции $\frac{p_1}{p'_1}(\lambda)$ по сравнению с условием $\lambda_2 = 1$.

Из расчета следует, что условию $p_1 = p'_1$ соответствует лишь одно значение λ'_1 и при

этом значении λ'_1 зависимость $\frac{p_1}{p'_1}(\lambda)$ имеет максимум. При условии запирания

$\lambda_2 = 1$ условию $p_1 = p'_1$ соответствуют два значения λ'_1 : $\lambda'_1 < 1$ и $\lambda'_1 = 1$. Максимум

зависимости $\frac{p_1}{p'_1}(\lambda)$ находится между этими двумя значениями.

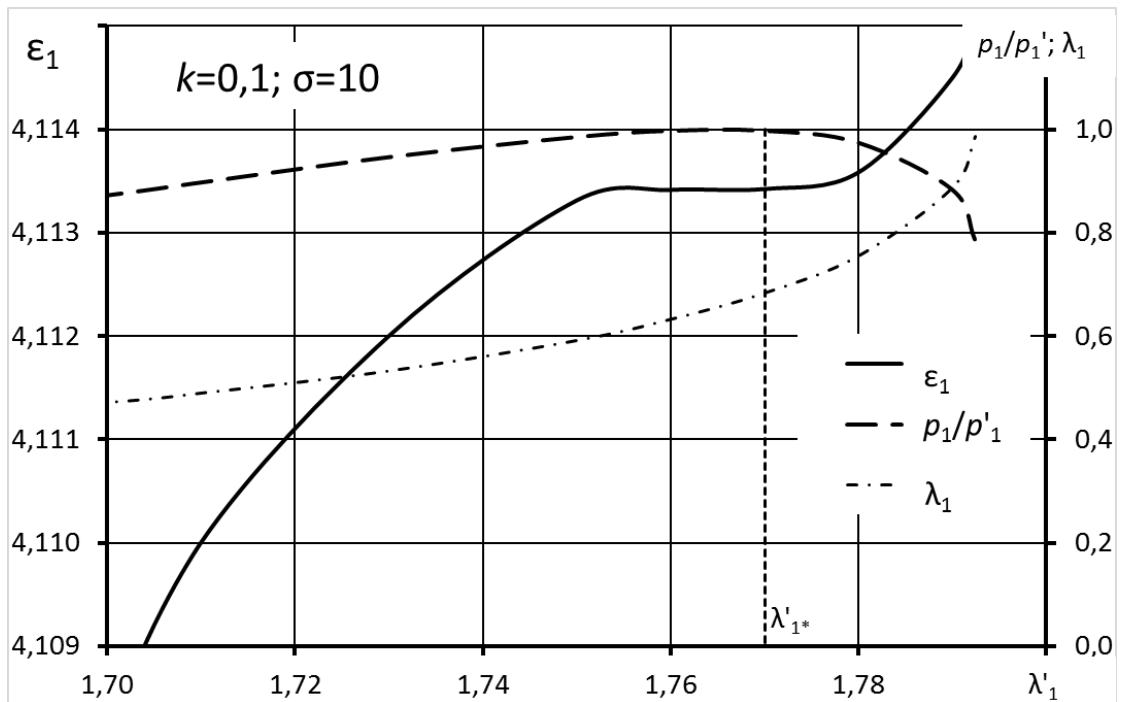


Рис 7 – Расчет степени сжатия при дозвуковой скорости смеси по теории Миллионщикова – Рябинкова при условии запирания (1.14) вблизи точки $p_1 = p'_1$

Результаты расчета степени сжатия эжектора по теории [10] при $\lambda_3 < 1$ и использовании различных условий запирания сравниваются на Рис. 8. Сплошной линией изображены расчеты по условию запирания $\lambda_2 = 1$, а штрихпунктирной – по условию (1.14). Из результатов расчета следует, что при условии запирания (1.14) эжектор имеет большую степень сжатия при всех значениях λ'_1 .

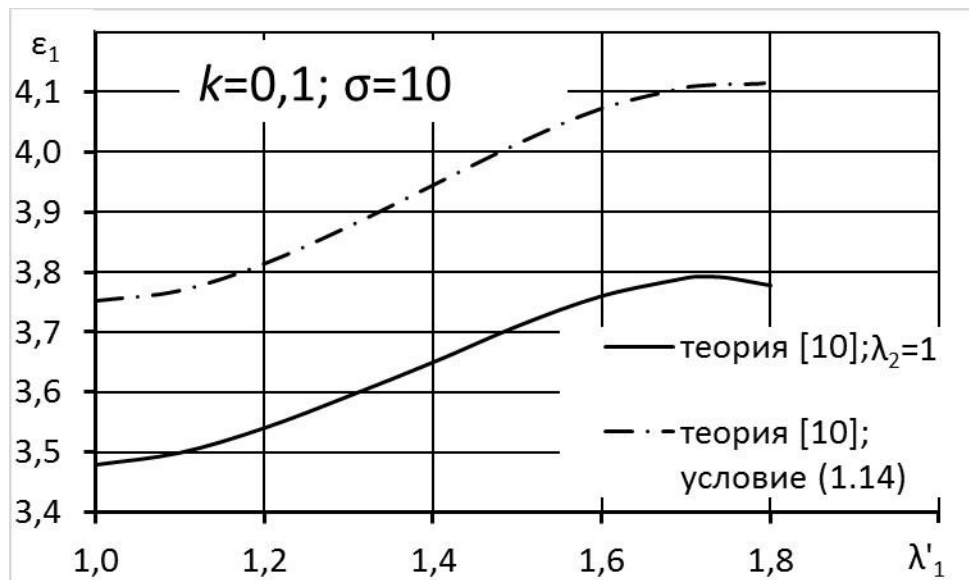


Рис. 8 – Результаты расчета степени сжатия эжектора по теории Миллионщикова Рябинкова при различных условиях запирания

2. Оптимальный эжектор по теории Ю.Н. Васильева [1].

2.1 Эжектор с $\lambda_2=1$

Найдем условия оптимальности эжектора по теории критического режима Ю.Н. Васильева [1]. Теория Ю.Н. Васильева отличается от теории Миллионщикова – Рябинкова тем, что вместо предположения равенстве давления в сечении запирания (условие 1.4) в ней выполняется закон сохранения импульса между входным сечением камеры смешения и сечением запирания:

$$k(z(\lambda_1) - z(\lambda_2)) - z(\lambda'_2) + z(\lambda'_1) = 0 \quad (2.1)$$

Были найдены следующие уравнения стационарных точек:

$$p_1 = p'_1 \quad (2.2)$$

$$p'_2 = p_3 \quad (2.3)$$

$$p'_2 = p_2 \quad (2.4)$$

Пример расчета степени сжатия эжектора по теории [1] при дозвуковой скорости смеси представлен на Рис. 9. Расчет производился для заданных значений: $\sigma=10$; $k=0,1$. Скорость низконапорного газа в сечении запираания полагалась равной скорости звука. По результатам расчета условие (2.2) выполняется при двух значениях λ_1 : $\lambda_1=1$ и $\lambda_1<1$. Максимуму степени сжатия соответствует условие (2.2) и $\lambda_1<1$. Максимальное значение отношения $\frac{p'_2}{p_3}$ при $\lambda_3<1$ и данных значений k и σ составляет 0.198. Таким образом, условие (2.3) при дозвуковой скорости смеси не выполняется.

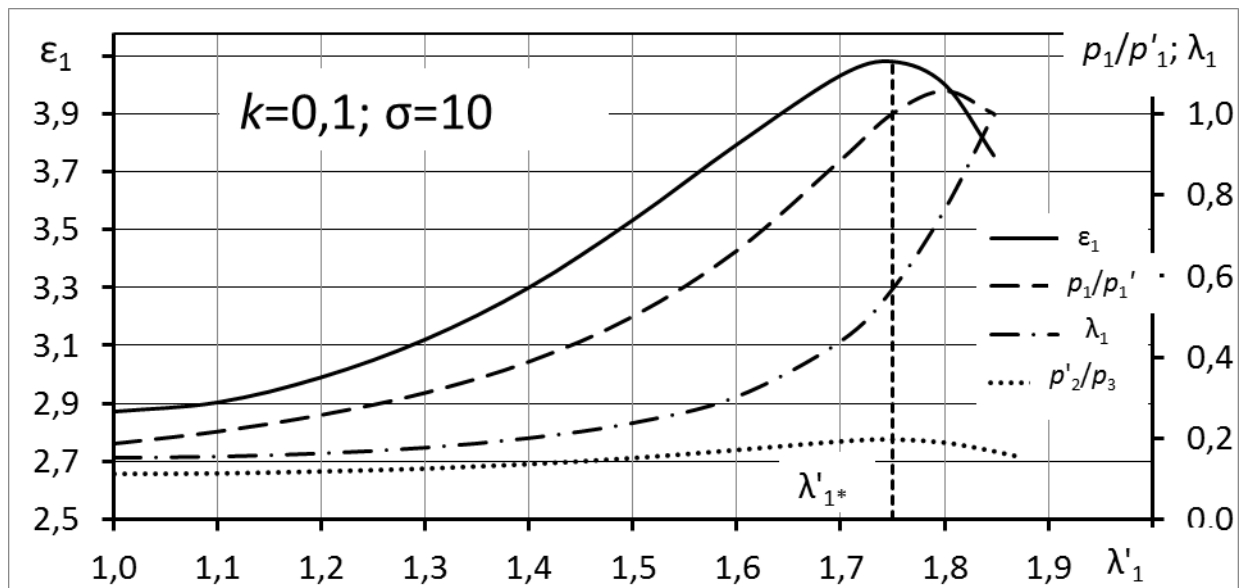


Рис. 9 – Расчет степени сжатия эжектора по теории Ю.Н Васильева при дозвуковой скорости смеси

Результаты расчета степени сжатия эжектора по теории [1] при $\lambda_3>1$ приведены на Рис. 10 ($\sigma=10$; $k=0,1$). Из результатов расчета следует, что при сверхзвуковой скорости смеси вид функции $\epsilon(\lambda_1)$ сильно отличается по сравнению

со случаем $\lambda_3 < 1$. Условие $p'_2/p_3 = 1$ соответствует максимуму степени сжатия, а условие p_1/p'_1 – минимуму (оба условия помечены на Рис.10 пунктиром).

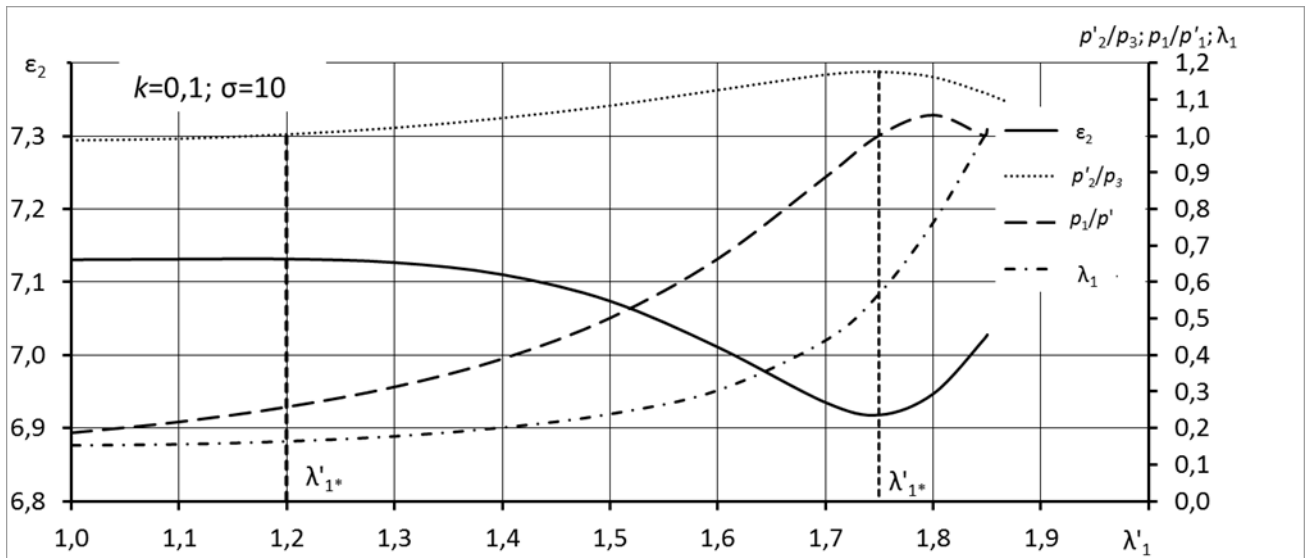


Рис. 10 – Расчет степени сжатия эжектора по теории Ю.Н Васильева при сверхзвуковой скорости смеси

2.2 Эжектор с равными давлениями в сечении запираания

Результаты расчета по теории [1] отношения $\frac{p'_2}{p_2}$, для заданных значений

$k=0,1; \sigma=10$ и различных значений λ'_1 приведены на Рис. 11. Из результатов расчета

следует, что в эжекторе с сужающимися насадками ($\lambda'_1 = 1$) газа отношение $\frac{p'_2}{p_2}$

всюду меньше единицы. В эжекторе со сверхзвуковыми соплами перерасширение

высоконапорной струи в сечении запираания мало ($\frac{p'_2}{p_2} \approx 1$) и может быть выполнено

условие (2.4). Так в эжекторе с $\lambda'_1 = 1,7$ условие (2.4) выполняется при $\lambda_2 = 0,8$.

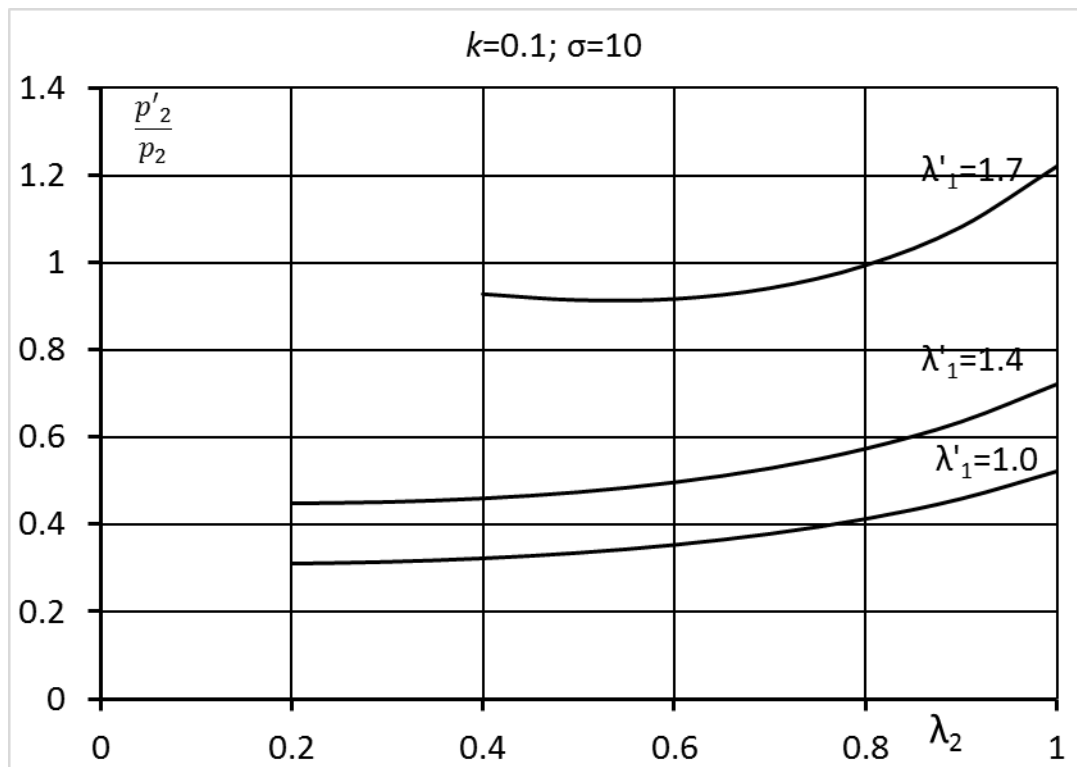


Рис. 11 – Отношение статических давлений смешиваемых газов в сечении запираения по теории Ю.Н. Васильева

Расчет по теории [1] зависимости $\varepsilon(\lambda_2)$ при $\lambda_3 < 1$ для заданных значений $\sigma=10$; $k=0,1$ и $\lambda'_1=1,7$ приведен на Рис. 12 Из результатов расчета следует, что при условии $p'_2 = p_2$ имеет место максимум степени сжатия. Разница между значением степени сжатия при работе эжектора на критическом режиме ($\lambda_2=1$) и условию (2.4) невелика и составляет около 0,1%.

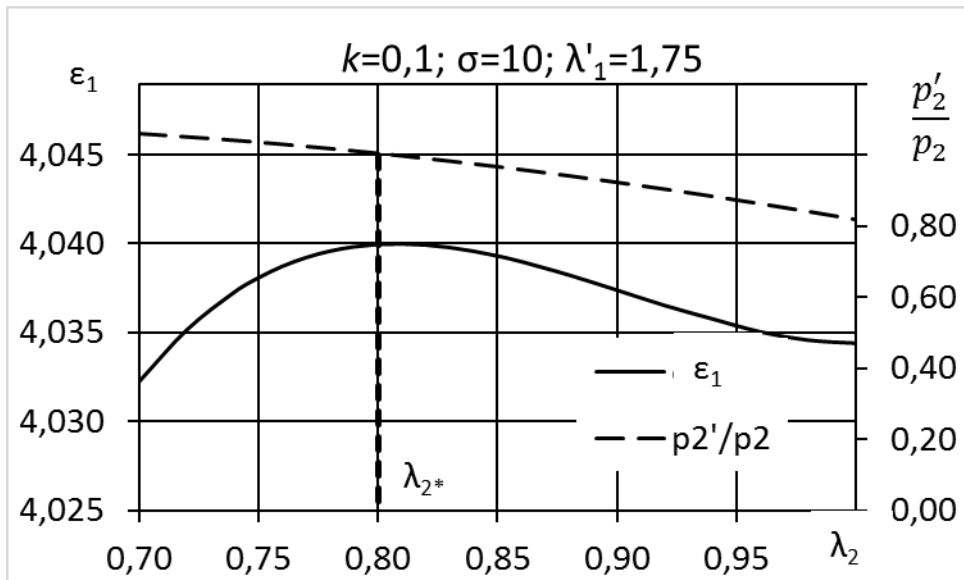


Рис. 12 – Расчет по теории Ю.Н. Васильева зависимости $\varepsilon(\lambda_2)$ при $\lambda_3 < 1$

3. Оптимальный эжектор по теории Пирсона, Холлидея и Смита [16]

В этой теории статическое давление в сечении запираания считается постоянным, между входным сечением камеры смешения и сечением запираания используется закон сохранения импульса, а потерями полного давления до сечения запираания пренебрегается только в низконапорном потоке.

Введем коэффициент восстановления полного давления в высоконапорной струе v , так что $p'_{02} = vp'_{01}$. Он может быть легко найден из условия равенства статических давлений в сечении запираания:

$$\sigma v \pi(\lambda'_2) - \pi(\lambda_2) = 0 \quad (3.1)$$

Из (3.1) имеем:

$$v = \frac{\pi(\lambda_2)}{\sigma \pi(\lambda'_2)} \quad (3.2)$$

Методом множителей Лагранжа были получены следующие условия оптимальности:

$$p_1 = p_1' \quad (3.3)$$

$$\frac{p_2'}{p_3} + b(\lambda_2') = 1, \quad (3.4)$$

Здесь $b(\lambda)$ – следующая газодинамическая функция [20]:

$$b(\lambda) = \frac{\delta\pi(\lambda)}{\delta q(\lambda)} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1},$$
 где знаком δ обозначена логарифмическая производная функции: $\delta f(\lambda) = \frac{df/d\lambda}{f}$

$$1 + vk\sigma \frac{\psi(\lambda_2')}{\psi(\lambda_2)} = 0 \quad (1.14)$$

Заметим, что условие (3.4) отличается от полученного ранее условия оптимальности (2.3) по теории [1] только наличием второго слагаемого в правой части $b(\lambda)$. Условие (1.14) было получено ранее в п.1 при исследовании системы уравнений критического режима по теории Миллионщикова – Рябинкова.

Пример расчета степени сжатия по теории [16] для дозвуковой скорости смеси приведен на Рис. 13 Для расчета были заданы значения $\sigma=10$; $k=0,1$; и условие запираания $\lambda_2=1$. Расчеты производились до значения λ_1' , при котором происходит запираание низконапорного потока на входе в эжектор ($\lambda_1=1$).

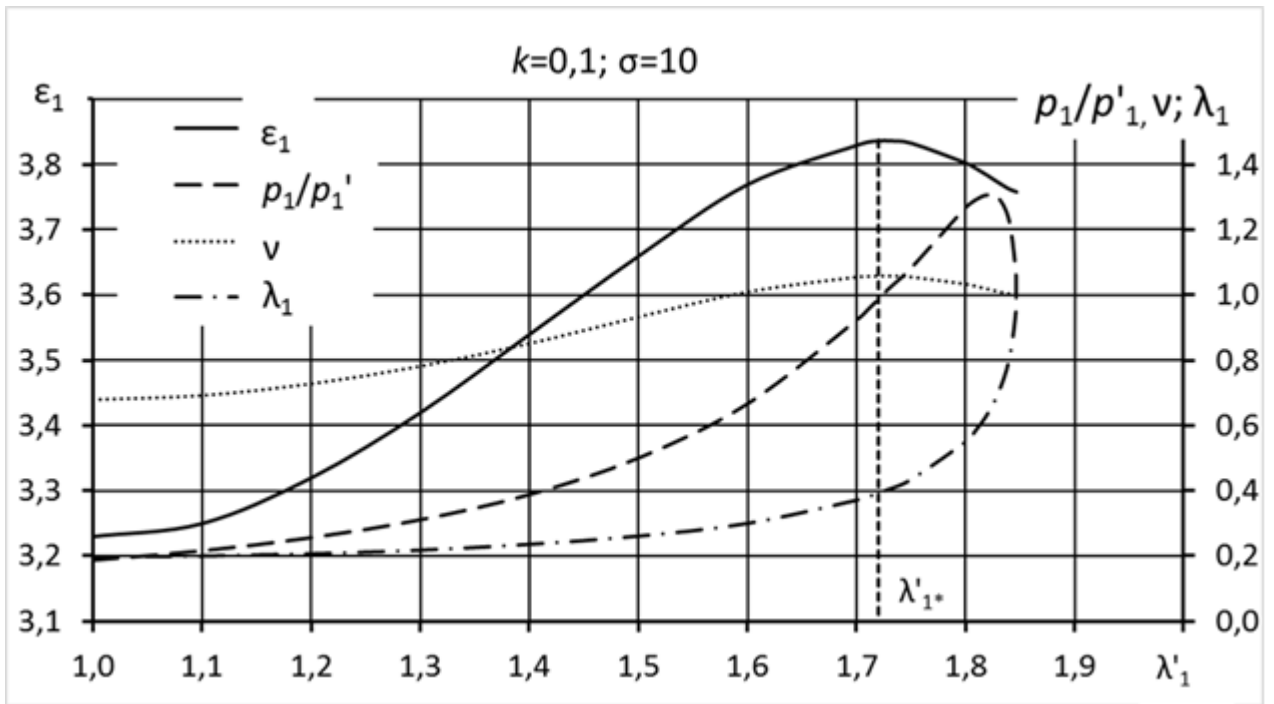


Рис. 13 – Расчет степени сжатия эжектора по теории [16] при дозвуковой скорости смеси и условии запирания $\lambda_2=1$

Из результатов расчета следует, что степень сжатия достигает максимального значения при условии (3.3) и $\lambda_1 < 1$. Заметим, что максимум степени сжатия лежит в области, где коэффициент восстановления полного давления в высоконапорной струе $v > 1$.

Результаты расчетов степени сжатия эжектора по теории [16] при дозвуковой скорости смеси при тех же значениях σ и k и условии запирания (1.14) приведены на Рис. 14 и Рис 15. На Рис. 14 представлен результат расчета для всего диапазона λ_1' , а

на Рис. 15 – вблизи точки $\frac{p_1}{p_1'} = 1$.

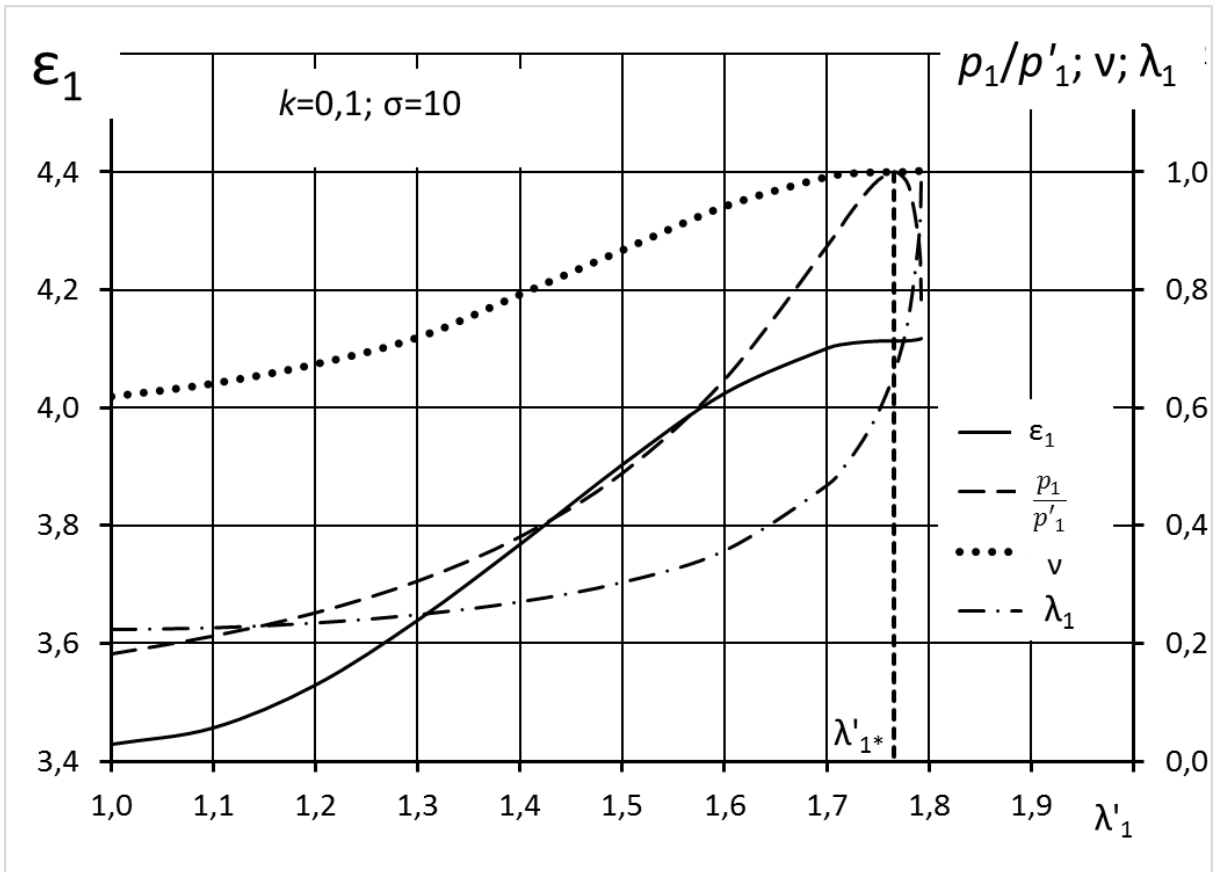


Рис. 14 – Расчет степени сжатия эжектора по теории [4] при дозвуковой скорости смеси и условия запираия (1.14)

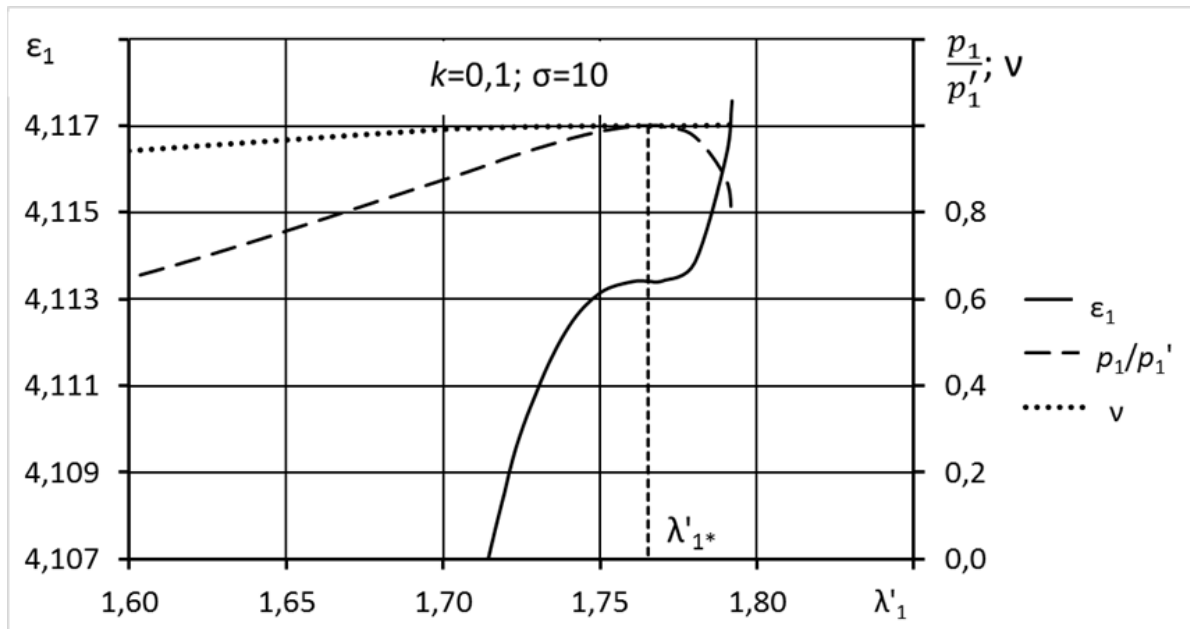


Рис. 15 – Расчет степени сжатия эжектора по теории [16] при дозвуковой скорости смеси и условия запираия (1.14) вблизи точки $p_1 = p'_1$

По результатам расчета, при условии запираия (1.14) равенство статических давлений на входе в эжектор соответствует точке перегиба зависимости $\varepsilon(\lambda'_1)$. Максимальная степень сжатия эжектора получается при условии $\lambda_1=1$. Также из расчета следует, что зависимость $\frac{p_1}{p'_1}$ принимает максимальное значение, равное единице при λ'_1 , соответствующему точке перегиба кривой степени сжатия. В точке $p_1 = p'_1$ и правее от неё потери полного давления в высоконапорной струе отсутствуют ($v=1$).

Для широкого диапазона значений $\sigma=5-50$ и $k=0-1$ были проведены расчеты значений выражения (3.4) при условии запираия (1.14). Пример такого расчета для $k=0,1$ и $\sigma=10$ приведен на Рис. 16. Расчеты показали, что выражение $\frac{p'_2}{p_3} + b(\lambda)$, стоящее в правой части (3.4) принимает значения ~ 2 при дозвуковой скорости смеси, а при $\lambda_3 > 1 - \sim 3$ и слабо меняется при изменении k и σ . Можно сделать вывод, что на практике математически верное условие (3.4) не выполняется.

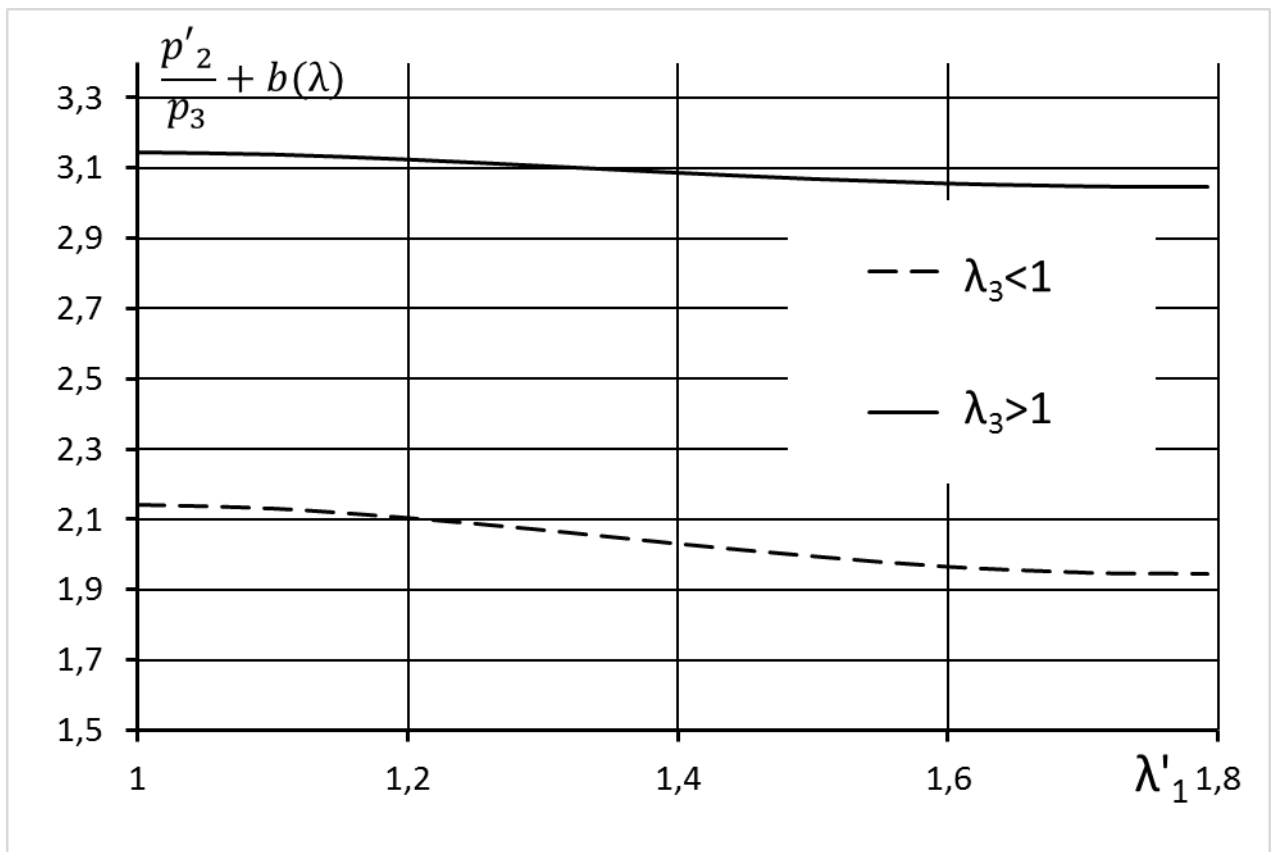


Рис. 16 – Расчет условия оптимальности (3.4).

Расчеты степени сжатия эжектора по теории [16] при дозвуковой скорости смеси, для двух разных условий запирания: $\lambda_2=1$ и (1.14) сравниваются на Рис. 17. Расчет производился для значений $k=0,1$ и $\sigma=10$. По результатам расчета следует, что большие значения степени сжатия дает условие (1.14).

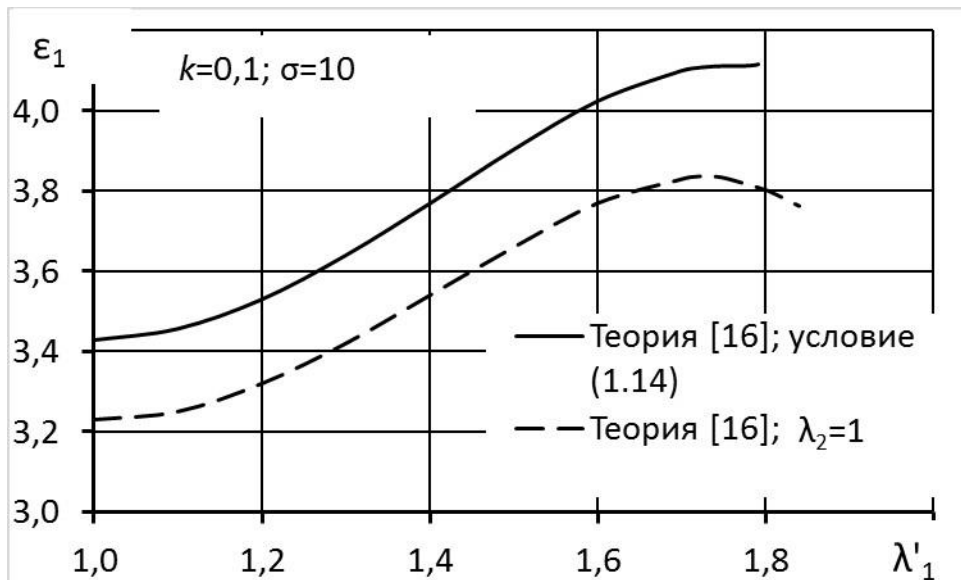


Рис. 17 – Расчет степени сжатия эжектора по теории [16] при дозвуковой скорости смеси для разных условий запираания

4. Сравнение условий оптимальности по различным теориям критического режима

Кривые степени сжатия эжектора при дозвуковой скорости смеси, рассчитанные по теориям [1], [10], [16] и использовании различных условий запираания: $\lambda_2=1$ и (1.14) сравниваются на Рис. 18. Сплошной кривой нанесен расчет по теории [1], пунктирной – по теории [10], а штрихпунктирной – по теории [16]. Наибольшие значения степени сжатия дает теория [10] при условии запираания (1.14). При $\lambda'_1=1$ разница между расчетом степени сжатия по теориям [10] и [16] при условии запираания (1.14) составляет примерно 10%. При увеличении λ'_1 указанные характеристики сближаются и при $\lambda'_1 > 1.7$ разница между ними становится минимальна.

Степень сжатия, рассчитанная по теории [16] и условию запираия $\lambda_2=1$ при значениях $\lambda'_1 < 1.6$ лежит ниже, чем рассчитанная по теории [10] и том же условии запираия. При $\lambda'_1 > 1.6$ большие значения степени сжатия дает расчет по теории [16].

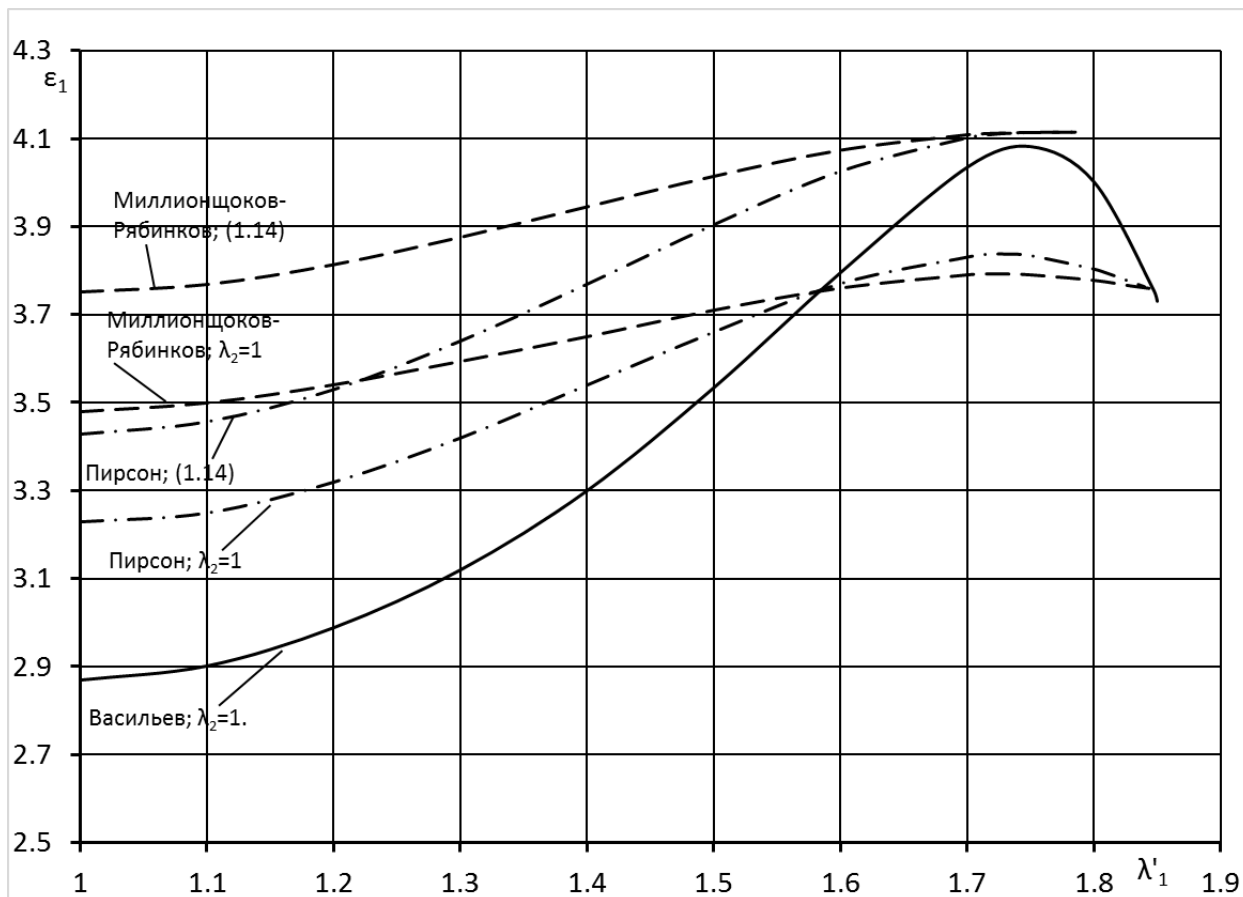


Рис. 18 – Расчет степени сжатия эжектора при дозвуковой скорости смеси по различным теориям критического режима.

Значения степени сжатия, рассчитанные по теории [1] и условию запираия $\lambda_2=1$ при $\lambda'_1 < 1.6$ лежат ниже значений, рассчитанным по всем остальным теориям. При $\lambda'_1 > 1.6$ расчет по теории [1] дает большие значения, чем расчет по теориям [10] и [16] при условии запираия $\lambda_2=1$, но меньшие, чем расчет по тем же теориям при условии запираия (1.14).

Заключение

Получены аналитические условия оптимальности газового эжектора в рамках различных теорий критического режима. Проанализирован характер полученных стационарных точек. Показано, что:

1) Максимальная степень сжатия эжектора может иметь место не при условии $\lambda_2=1$, как это полагалось в классических теориях критического режима, а при дозвуковой скорости низконапорного газа в сечении запираания. В теориях Миллионщикова–Рябинкова и Пирсона этой скорости соответствует условие запираания в канале с податливыми границами, а в теории Васильева–равенство статических давлений в сечении запираания.

2) при использовании условия запираания в канале с податливыми границами (1.14) изменяется характер стационарных точек степени сжатия по сравнению с классическим условием запираания $\lambda_2 = 1$. Так, условие равенства статических давлений на входе в эжектор при условии запираания $\lambda_2 = 1$ соответствует максимуму степени сжатия. При условии запираания в канале с податливыми границами условие равенства статических давлений на входе в эжектор соответствует точке перегиба кривой степени сжатия.

3) Новое условие оптимальности (3.4), полученное для теории [16] на практике не выполняется.

В дальнейшем необходимо проверить возможность практической реализации всех найденных математически верных условий оптимальности

Список источников

1. Васильев Ю.Н. Газовые эжекторы со сверхзвуковыми соплами. Сборник работ по исследованию сверхзвуковых газовых эжекторов. – Жуковский: ЦАГИ, 1961. С. 134–212.
2. Аркадов Ю.К. Новые газовые эжекторы и эжекционные процессы. – М.: Физматлит, 2001. - 336 с.
3. Аркадов Ю.К., Зернов В.И., Шмуклер Б.Ю. Эжекторные системы газонаполнения плотов и трапов гражданских самолетов // Ученые записки ЦАГИ. 1992. Т. 23. № 3. С. 54-59.
4. Самойлова Н.В. Расчет дозвукового эжекторного увеличителя тяги // Труды ЦАГИ. 1982. № 2150. С. 3-18.
5. Жулев Ю.Г., Потапов Ю.Ф. Исследование влияния геометрических параметров эжекторного увеличителя тяги на его эффективность // Труды ЦАГИ. 1978. № 1958. С. 3-20.
6. Ганич Г.А., Неймарк Р.В. Экспериментальное исследование эжекторного увеличителя тяги с кольцевым подводом эжектирующего газа // Труды ЦАГИ. 1978. № 1958. С. 30–37.
7. Письменный В.Л. Турбозежекторный двигатель // Труды МАИ. 2003. № 11. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34476>
8. Письменный В.Л. Математическая модель звукового газового эжектора с цилиндрической камерой смешения в системе турбозежекторного двигателя // Труды МАИ. 2003. № 12. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34456>

9. Христианович С.А. О расчете эжектора. Промышленная аэродинамика: сборник статей. – М.: Изд-во БНТ НКАП, 1944. С. 3–17.
10. Миллионщиков М.Д., Рябинков Г.М. Газовые эжекторы больших скоростей. Сб. работ по исследованию сверхзвуковых газовых эжекторов. – Жуковский: БНИ ЦАГИ, 1961. С. 5–31.
11. Таганов Г.И., Межиров И.И. К теории критического режима газового эжектора: сборник работ по исследованию сверхзвуковых газовых эжекторов. – Жуковский: БНИ ЦАГИ, 1961. С. 33–40.
12. Никольский А.А., Шустов В.И. Критические режимы газовых эжекторов больших перепадов давлений: сборник работ по исследованию сверхзвуковых газовых эжекторов. - Жуковский: БНИ ЦАГИ, 1961. С. 41–47.
13. Keenan J.H., Neumann E.P. A Simple Air Ejector // Journal of Applied Mechanics, 1942, vol. 9(2), pp. 75–81.
14. Fabri J., Siestrunk R. Supersonic Air Ejectors // Advances in Applied Mechanics, 1958, vol. 5, pp. 1-35.
15. Chow W.L., Addy A.L. Interaction between Primary and Secondary Streams of Supersonic Ejector Systems and Their Performance Characteristics // AIAA Journal, 1964, vol. 2, no. 4, pp. 686–695. DOI:[10.2514/3.2403](https://doi.org/10.2514/3.2403)
16. Pearson H., Holliday J.B., Smith S.F. A theory of the cylindrical ejector propelling nozzle // Journal of the Royal Aeronautical Society, 1958, vol. 62, no. 574, pp. 746-751.
17. Ларина Е.В., Ципенко А.В. Экспериментальные данные о потоке в газовом эжекторе для верификации моделей турбулентности // Труды МАИ. 2017. № 97.
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=87135>

18. Еремин А.М. Расчетное исследование плоского эжектора со сдвигом сопел высоконапорного газа // Ученые записки ЦАГИ. 2020. Т. LI. № 2. С. 39–46.
19. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
20. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1976. – 888 с.

References

1. Vasil'ev Yu.N. *Gazovye ezhektory so sverkhzvukovymi soplami. Sbornik rabot po issledovaniyu sverkhzvukovykh gazovykh ezhektorov* (Gas ejectors with supersonic nozzles. Compilation of work about research of supersonic gas ejectors), Zhukovskii, TsAGI, 1961, pp. 134–212.
2. Arkadov Yu.K. *Novye gazovye ezhektory i ezheksionnye protsessy* (New gas ejectors and ejection processes), Moscow, Fizmatlit, 2001, 336 p.
3. Arkadov Yu.K., Zernov V.I., Shmukler B.Yu. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1992, vol. 23, no. 3, pp. 54-59.
4. Samoilova N.V. *Trudy TsAGI*, 1982, no. 2150, pp. 3-18.
5. Zhulev Yu.G., Potapov Yu.F. *Trudy TsAGI*, 1978, no. 1958, pp. 3-20.
6. Ganich G.A., Neimark R.V. *Trudy TsAGI*, 1978, no. 1958, pp. 30–37.
7. Pis'mennyi V.L. *Trudy MAI*, 2003, no. 11. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34476>
8. Pis'mennyi V.L. *Trudy MAI*, 2003, no. 12. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34456>

9. Khristianovich S.A. *O raschete ezhektora. Promyshlennaya aerodinamika: sbornik statei* (About calculation of ejector. Industrial aerodynamics: collection of articles.), Moscow, Izd-vo BNT NKAP, 1944, pp. 3–17.
10. Millionshchikov M.D., Ryabinkov G.M. *Gazovye ezhektory bol'shikh skorostei. Sb. rabot po issledovaniyu sverkhzvukovykh gazovykh ezhektorov* (Gas ejectors of high velocities. Compilation of work about research of supersonic gas ejectors), Zhukovskii, BNI TsAGI, 1961, pp. 5–31.
11. Taganov G.I., Mezhirov I.I. *K teorii kriticheskogo rezhima gazovogo ezhektora: sbornik rabot po issledovaniyu sverkhzvukovykh gazovykh ezhektorov* (On theory of critical mode of gas ejector. Compilation of work about research of supersonic gas ejectors), Zhukovskii, BNI TsAGI, 1961, pp. 33–40.
12. Nikol'skii A.A., Shustov V.I. *Kriticheskie rezhimy gazovykh ezhektorov bol'shikh perepadov davlenii: sbornik rabot po issledovaniyu sverkhzvukovykh gazovykh ezhektorov* (Critical modes of gas ejectors with high differential pressure. Compilation of work about research of supersonic gas ejectors), Zhukovskii, BNI TsAGI, 1961, pp. 41–47.
13. Keenan J.H., Neumann E.P. A Simple Air Ejector, *Journal of Applied Mechanics*, 1942, vol. 9(2), pp. 75–81.
14. Fabri J., Siestrunck R. Supersonic Air Ejectors, *Advances in Applied Mechanics*, 1958, vol. 5, pp. 1-35.
15. Chow W.L., Addy A.L. Interaction between Primary and Secondary Streams of Supersonic Ejector Systems and Their Performance Characteristics, *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, no. 4, pp. 686–695. DOI:10.2514/3.2403

16. Pearson H., Holliday J.B., Smith S.F. A theory of the cylindrical ejector propelling nozzle, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 1958, vol. 62, no. 574, pp. 746-751.
17. Larina E.V., Tsipenko A.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 97. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=87135>
18. Eremin A.M. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2020, vol. LI., no. 2, pp. 39–46.
19. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* (Mathematical handbook), Moscow, Nauka, 1984, 831 p.
20. Abramovich G.N. *Prikladnaya gazovaya dinamika* (Applied gas dynamic), Moscow, Nauka, 1976, 888 p.

Статья поступила в редакцию 03.04.2023

Одобрена после рецензирования 24.04.2023

Принята к публикации 27.06.2023

The article was submitted on 03.04.2023; approved after reviewing on 24.04.2023; accepted for publication on 27.06.2023