

Труды МАИ. 2024. № 135
Trudy MAI, 2024, no. 135

Научная статья

УДК 531.38

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179684>

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРИОГЕННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Александр Николаевич Темнов¹, Павел Михайлович Шкапов², Ян Наинг У³✉

^{1,2,3}Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

¹antt45@mail.ru

²spm@bmstu.ru

³yno64528@gmail.com✉

Аннотация. Данная статья рассматривает вопросы свободных колебаний вращающейся идеальной криогенной жидкости, находящейся внутри цилиндрического сосуда с жесткими стенками. Криогенные жидкости характеризуются неравномерным изменением температуры и плотности во время эксплуатации и хранения. Наиболее существенное расслоение криогенной составляющей происходит в направлении действия внешнего поля массовых сил. Для исследования движения подобной механической системы использована модель стратифицированной несжимаемой идеальной жидкости. Приведены результаты расчётов собственных частот свободных колебаний вращающейся криогенной жидкости для внутренних и поверхностных волн при заданной частоте плавучести.

Ключевые слова: свободные колебания, криогенная жидкость, стратифицированная жидкость, поверхностные волны, внутренние волны

Для цитирования: Темнов А.Н., Шкапов П.М., Ян Наинг У. Свободные колебания криогенной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179684>

Original article

FREE OSCILLATIONS OF A CRYOGENIC ROTATING FLUID IN A CYLINDRICAL CAVITY

Alexander N. Temnov¹, Pavel M. Shkapov², Yan Naing Oo³✉

^{1,2,3}Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

¹antt45@mail.ru

²spm@bmstu.ru

³yno64528@gmail.com✉

Abstract. This paper deals with the free oscillations of a rotating ideal cryogenic liquid inside a cylindrical tank with rigid walls. Cryogenic liquids are characterized by non-uniform temperature and density changes during operation and storage. The most significant stratification of the cryogenic component occurs in the direction of the external mass force field. To investigate the motion of this mechanical system, it is reasonable to use a stratified incompressible fluid model. The proposed work is devoted to the study of free oscillations of stratified fluid in a cylindrical tank, fully or partially filled with fluid rotating with small and large angular velocities. Calculations of eigenvalues of free oscillations of a rotating

cryogenic liquid at a given buoyancy frequency for internal and surface waves in the form of graphs are given. In science, nature and various technical applications, rotating fluids occupy an important place. They are widely used in engineering, for example, in centrifuges, hollow shafts of liquid-cooled turbines and in stabilizing the rotation of rockets. Currently, there is a growing interest in the study of vibrations of cryogenic fluids filling finite-sized vessels used in various applications. The obtained results show that different types of waves can be observed in a rotating stratified fluid at both low and high rotational velocities, depending on the magnitude of the numbers Fr^2 . The natural frequencies of these waves depend on the ratio of buoyancy forces and Coriolis inertia forces. The presence of stratification leads to an increase in the frequencies of free oscillations of the fluid for internal and surface waves. The study of oscillations of a rotating stratified fluid has shown that the spectrum of oscillation eigenvalues consists of two sets of real numbers: a two-index set q_{mp} for surface waves (at low rotational velocity) and q_{lm} (at high rotational velocity), and a three-index set q_{lmp} for internal waves.

Keywords: free oscillations, cryogenic fluid, stratified fluid, internal waves, surface waves

For citation: Temnov A.N., Shkapov P.M., Yan Naing Oo. Free oscillations of a cryogenic rotating fluid in a cylindrical cavity. *Trudy MAI*, 2024, no. 135. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179684>

Введение

Многие области техники и науки связаны с вращением жидкостей. В науке вращающуюся жидкость можно встретить в различных геофизических приложениях,

связанных с вращением Земли; в технике – в различных гироскопических приборах и во многих транспортных средствах, содержащих жидкость в виде топлива. В некоторых случаях масса транспортного средства достаточно велика по отношению к количеству жидкости, например, в нефтяном танкере, в других случаях, например, в космическом ракетоносителе, масса жидкого топлива может превышать массу конструкции транспортного средства. При старте ракетоносителя с космическим аппаратом 90% от всей массы составляет жидкое топливо, а коммуникационные спутники после вывода на орбиту, как правило, содержат около 50% жидкой массы.

Тема свободных колебаний в стратифицированной жидкости в неограниченной области имеет давнюю историю, о чем свидетельствуют предыдущие исследования [1-4]. В настоящее время эта тема тщательно изучена в связи с техническими и геофизическими вопросами. В работах [5-7] исследованы свободные колебания идеальной однородной несжимаемой жидкости, которая вращается в полости твёрдого тела. В книгах [8, 9] рассмотрены теоретические вопросы, касающиеся вращения твёрдого тела, содержащего однородную и вязкую жидкости в сосудах. Работы [6, 10] содержат экспериментальные результаты о вращении жидкостей в резервуаре. Вышеперечисленные исследования в основном касались однородных жидкостей.

Изучение движения вращающейся идеальной стратифицированной жидкости в ограниченном объёме приводит к весьма своеобразным краевым и начальным задачам [11-14]. В работах [15, 16] рассмотрены собственные колебания несжимаемой стратифицированной жидкости в полости движущегося твёрдого тела, испытывающего малые перемещения. В статье [17] рассматриваются

параметрические колебания жидкости в цилиндрическом сосуде и показана возможность возбуждения малых симметричных колебаний в системе с демпфированием. В статье [18] представлена нелинейная задача, связанная с движением несмешивающихся, несжимаемых, идеальных жидкостей, полностью заполняющих цилиндрическую полость. В настоящей статье вместе с исследованием самой задачи приводится подробное обсуждение результатов, полученных авторами в предыдущих работах [19, 20].

1. Колебания вращающейся криогенной жидкости в поле сил тяжести

Пусть в стационарном движении сосуд с несжимаемой идеальной криогенной жидкостью вращаются вокруг вертикальной оси симметрии полости Ox_3 с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ (рис. 1). Таким образом, жидкость находится под действием сил гравитационного и центробежного происхождения, векторы которых находятся в взаимно перпендикулярных плоскостях. Ограничимся сначала рассмотрением случая, когда угловая скорость вращения ω_0 мала, и выполняется условие $(\omega_0^2 \ell / g \ll 1)$ (ℓ – характерный размер объёма, g – ускорение силы тяжести). В невозмущенном состоянии изгиб поверхностей с одинаковой плотностью мал, и им можно пренебречь.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, и в возмущенном движении, считая \vec{u} , p , ρ – величинами первого порядка малости поля скоростей, давлений и плотностей жидкости. Здесь \vec{u} обозначает скорость жидкости относительно оси, вращающейся с

угловой скоростью $\vec{\omega}_0$; полное ускорение состоит из относительного ускорения $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ (конвективным членом $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ пренебрегаем в соответствии с гипотезой малых относительных движений), ускорения Кориолиса $(2\vec{\omega}_0 \times \vec{u})$ и центростремительного ускорения $\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r})$. Уравнения возмущенного движения вращающейся неоднородной жидкости запишем с использованием приближения Буссинеска [13]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \quad \text{в } \tau, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (2)$$

с граничными условиями,

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau; \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \quad (3)$$

где $\rho_0(x_3) = \rho_0^* (1 - \beta x_3)$, $\Pi_0 = -g x_3$,

Π_0 – силовая функция произвольного однородного силового поля, $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль к смачиваемой поверхности S ; ρ_0^* – некоторое осредненное значение плотности, τ – область, занимаемая жидкостью.

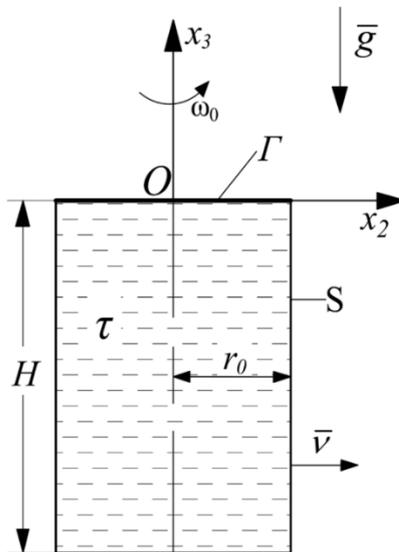


Рис. 1. Цилиндрический сосуд, наполненный стратифицированной жидкостью

Решение задачи о собственных колебаниях вращающейся жидкости в сосуде будем искать в виде гармонических колебаний.

$$\vec{u} = \vec{v} e^{\lambda t}, \quad p = \varphi e^{\lambda t}, \quad \rho = \psi e^{\lambda t},$$

где $\lambda = i\omega$ – комплексное число, ω – частота колебания жидкости. Тогда уравнения (1)

– (3) запишутся следующими образами:

$$\lambda \vec{v} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} + \frac{N^2}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla \varphi, \quad (4)$$

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \rho_0^* \beta \vec{v} \cdot \vec{e}_3, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{на } S, \quad (6)$$

здесь $N^2 = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3} = g\beta$ – частота плавучести.

Скорость частиц жидкости можно записать в векторной форме,

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} \left[\chi \vec{e}_3 \times \nabla \varphi - i \nabla \varphi + i \sigma^2 \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \nabla \varphi) \right], \quad (7)$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, $\sigma^2 = \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 - \omega^2} = \frac{\chi^2(1 - Fr^2)}{1 - Fr^2\chi^2}$, $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$.

1.1. Случай полного заполнения жидкости

Рассмотрим случай, когда цилиндрическая полость полностью заполнена жидкостью. В цилиндрических координатах (r, η, x_3) , при положении начала координат на поверхности жидкости Γ , краевая задача для первого уравнения (6) выражается следующим образом [19]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (8)$$

а граничное условие, соответствующее второму условию (6) при полном заполнении, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 0, \quad \text{при } x_3 = 0, \quad x_3 = -H, \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя метод разделения переменных, получим решение краевой задачи (8)

и (9) в виде

$$\varphi_{lmp} = \frac{J_m(\xi_{mp} \bar{r})}{J_m(\xi_{mp})} e^{im\eta} \cos k_l x_3, \quad (10)$$

где

$$k_l = \frac{l\pi}{H}; \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{k}_l = k_l r_0, \quad l = 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

здесь $J_m(\xi_{mp} \bar{r})$ – функция Бесселя первого рода m -го порядка; ξ_{mp} – m -ый корень характеристического уравнения (11),

$$Y_2(\xi_{mp}) = \xi_{mp} J_m'(\xi_{mp}) + m \chi_{lmp} J_m(\xi_{mp}) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (11)$$

где $J_m'(\xi_{mp}) = \frac{dJ_m(\xi_{mp})}{d(\xi_{mp})}$.

Введем безразмерную собственную частоту (собственное значение) по формуле

$$q_{lmp} = \frac{1}{\chi_{lmp}} \quad \text{при фиксированных значениях } l, m \text{ и } p,$$

$$q_{lmp} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{mp}^2 Fr^2}{\bar{k}_l^2 + \xi_{mp}^2}}, \quad (12)$$

Из полученных результатов следует, что вращающаяся стратифицированная жидкость имеет два типа внутренних бегущих волн. Прямые волны соответствуют значениям числа $m > 0, (q_{lmp}^+, \xi_{mp}^+)$ и движутся в направлении вращения жидкости, а обратные волны соответствуют числам $m < 0, (q_{lmp}^-, \xi_{mp}^-)$. Значению $m = 0$ отвечают осесимметричные стоячие волны $(m = 0, q_{lmp}^0, \xi_{mp}^0)$, так как в этом случае функции φ_{lmp} не зависят от аргумента η . Если $(m \neq 0)$, то во вращающейся жидкости происходит расщепление стоячей волны на волны, движущиеся в противоположных направлениях с различной скоростью. Причиной такого расщепления являются силы инерции кориолисового ускорения $(2\vec{\omega}_0 \times \vec{u})$.

Собственные значения q_{lmp} зависят не только от корней ξ_{mp} и \bar{k}_l , но и от чисел Fr^2 . Рассмотрим зависимость собственных значений q_{lmp} от величины стратификации Fr^2 , а также безразмерного параметра $\bar{H} = H/r_0$. На рис. 2 представлены зависимости собственных значений q_{lmp} от параметра \bar{H} при различных числах Fr^2 ($Fr^2 = 0 \div 10$) в случае полного заполнения полости жидкостью.

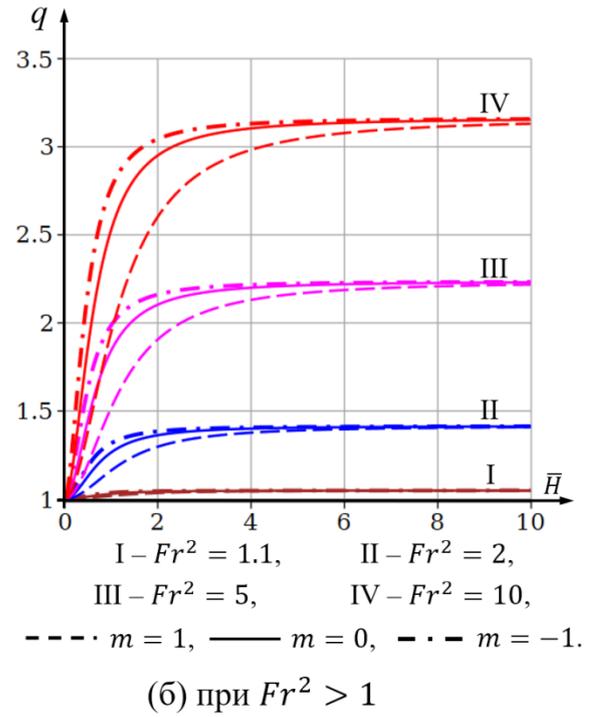
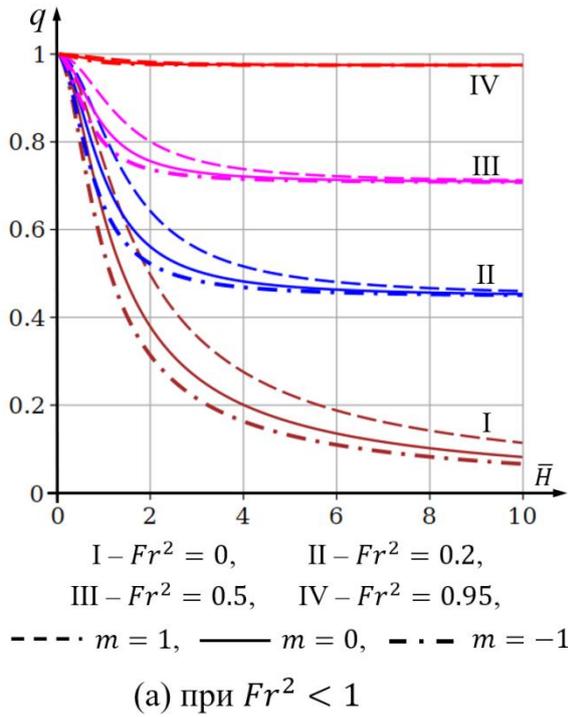


Рис. 2. Зависимости значений собственных частот $q_{lmp} = \omega_{lmp} / \omega_0$ от параметра \bar{H}

при $m = -1, 0, 1$; $p = 1$, $l = 1$, (а) $Fr^2 < 1$ и (б) $Fr^2 > 1$.

пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$),
штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Из рис. 2 видно, что частоты свободных колебаний жидкости для прямых, обратных и стоячих волн увеличиваются при наличии стратификации. Величина собственных значений q_{lmp} увеличивается при больших значениях Fr^2 . При $Fr^2 < 1$, собственные значения q_{lmp} прямых волн всегда больше, чем обратных ($q_{lmp}^+ > q_{lmp}^-$). Сравнение значений q_{lmp} для трёх типов волн при $Fr^2 < 1$ показывает, что $q_{lmp}^+ > q_{lmp}^0 > q_{lmp}^-$. При $Fr^2 > 1$, собственные значения q_{lmp} обратных волн всегда больше, чем прямых ($q_{lmp}^- > q_{lmp}^+$). Сравнение значений q_{lmp} для трёх типов волн при $Fr^2 > 1$ показывает, что $q_{lmp}^- > q_{lmp}^0 > q_{lmp}^+$.

1.2. Случай частичного заполнения жидкости

Рассмотрим случай, когда в полости имеется свободная поверхность жидкости.

Для этого случая граничные условия (9) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 0, \quad \text{при } x_3 = -H, \\ (N^2 - \omega^2)\varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 0, \quad \text{при } x_3 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Внутренние волны

Первое граничное условие (13), допускает решение

$$\xi_{mp} J_m'(\xi_{mp}) + \frac{m}{q_{lmp}} J_m(\xi_{mp}) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (14)$$

Полагая $Z(x_3) = \cos k_l(x_3 + H)$, из второго и третьего условий (13), получаем следующее выражение

$$N^2 - \omega^2 = g k_l \tan k_l H, \quad (15)$$

или преобразуя к безразмерному виду, имеем

$$f(y) = \tan(y) = \frac{Fr^2 - q^2}{y} \bar{H} \varepsilon^2, \quad (16)$$

здесь

$$y = \bar{k}_l \bar{H}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\bar{\beta}}{Fr^2}, \quad \bar{\beta} = \beta r_0. \quad (17)$$

Определим собственные значения q_{lmp} с учетом уравнений (14), (16) и (17), предполагая, что $\varepsilon \leq 0.2$. На рис. 3 приведены зависимости собственных значений

Для вычисления поверхностных волн, первое уравнение граничных условий (13) допускает вид,

$$\xi_{mp} J_m'(\xi_{mp}) + \frac{m}{q_{mp}} J_m(\xi_{mp}) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (18)$$

Положим $Z(x_3) = \cosh \mu(x_3 + H)$, тогда из второго и третьего условий (13), получается следующее граничное условие,

$$N^2 - \omega^2 = -g \mu \tanh \mu H, \quad (19)$$

и если преобразовать (19) к безразмерному виду,

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{z(1 - Fr^2)}{z^2 - \xi^2 \bar{H}^2} \bar{H} \varepsilon^2, \quad (20)$$

то формула для собственных значений q_{mp} поверхностных волн при фиксированных значениях m и p записывается в следующем виде:

$$q_{mp} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}^2 - \xi_{mp}^2 Fr^2}{\bar{\mu}^2 - \xi_{mp}^2}}, \quad (21)$$

здесь

$$\bar{\mu} = \frac{z}{\bar{H}}, \quad \bar{\mu} = \mu r_0.$$

В соответствии со сказанным, спектр частот внутренних волн представляет собой трехпараметрическое, а спектр частот поверхностных волн – двухпараметрическое множества. Из уравнения (20) определяем значение z , далее находим значения q_{mp} поверхностных волн. На рис. 4 приведены зависимости

собственных значений q_{mp} поверхностных волн от параметра \bar{H} при различных числах Fr^2 ($Fr^2 = 0 \div 10$) в случае наличия свободной поверхности.

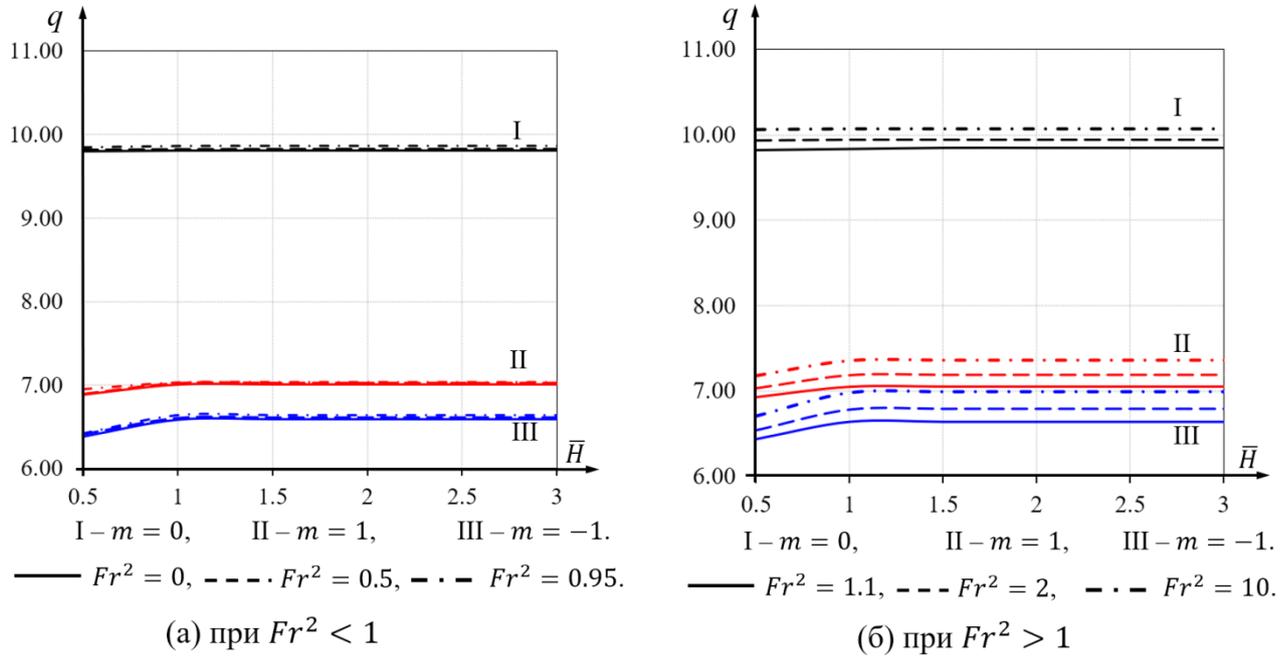


Рис. 4. Зависимости значений собственных частот $q_{mp} = \omega_{mp} / \omega_0$ поверхностных волн от параметра \bar{H} при $m = -1, 0, 1$; $p = 1$, (а) $Fr^2 < 1$ и (б) $Fr^2 > 1$.

пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Из рис. 4 следует, что с увеличением Fr^2 расслоение вызывает повышение частоты свободных колебаний всех трех типов поверхностных волн. При медленном вращении собственные значения поверхностных волн слабо зависят от числа Fr^2 , и сильно зависят от типа бегущих волн, т. е. от числа m ($m = -1, 0, 1$). При увеличении безразмерного параметра \bar{H} , собственные значения q_{mp} поверхностных волн также увеличиваются и стремятся к постоянному значению, которое приблизительно равно

$\bar{H} \geq 1.5$. Для любых чисел Fr^2 ($0 \leq Fr^2 < 1$ и $Fr^2 > 1$) собственные значения стоячих волн являются наибольшими среди трех типов волн, т. е. $(q_{mp}^0 > q_{mp}^+ > q_{mp}^-)$.

2. Колебания вращающейся криогенной жидкости в поле центробежных сил

В качестве примера, отличного от предыдущих случаев, рассмотрим колебания криогенной жидкости при большой угловой скорости вращения. При достаточно больших значениях угловой скорости ω_0 стационарного движения жидкости, порождающих поле центробежных сил инерции значительно большей интенсивности, чем интенсивности поля сил тяжести, то есть, когда $(\omega_0^2 \ell / g \gg 1)$, действием сил тяжести на жидкость с точностью до величины $(g / \omega_0^2 \ell)^2$ можно пренебречь. Когда цилиндрический сосуд частично заполнен жидкостью и достаточно быстро вращается, жидкость движется как жесткое тело вокруг своей вертикальной оси. Потенциальная энергия на единицу масс жидкости равна $\Pi_0 = \omega_0^2 r^2 / 2$, и в таком случае свободная поверхность Γ вращающейся жидкости в закрытом сосуде в отсутствии колебаний примет форму цилиндрической поверхности с внутренним радиусом r_0 (рис. 5), а угловая скорость вращения, отвечающую этому положению, приближённо оценивается формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10gH}{r_0}},$$

где H высота цилиндрического сосуда. Будем также считать, что в результате вращения в жидкости установилось некоторое распределение плотности $\rho_0(r)$, среднее значение которой обозначим ρ_0^* .

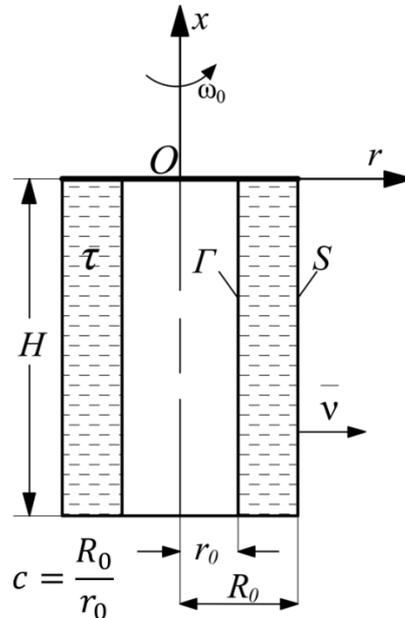


Рис. 5. Цилиндрической сосуд, наполненный стратифицированной жидкостью

Уравнения возмущенного движения вращающейся неоднородной жидкости при использовании приближения Буссинеска имеют вид, совпадающий с уравнениями (1) и (2).

В предположении, что жидкость находится в невозмущенном движении, закон, определяющий изменение плотности, имеет следующий вид: $\rho_0(r) = \rho_0^* k (1 + \ln r/r_0)$, ($r \geq r_0$), тогда получим

$$\rho = - \int w_r \rho_0^* \frac{k}{r} dt,$$

k – некоторая постоянная.

В цилиндрической системе координат (r, η, x) уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{в } \tau. \quad (22)$$

Уравнения возмущенного движения должны подчиняться граничным условиям

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{на } S, \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p_0(r)}{\partial r} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (24)$$

\vec{v} – внешняя нормаль к смачиваемой поверхности S ; τ – область, занимаемая жидкостью.

Введем квадрат частот плавучести $N^2(r)$,

$$N^2(r) = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} = k \omega_0^2, \quad (25)$$

который аналогичен квадрату частоты Вейселя-Брента при вертикальном распределении плотности [1, 12-14].

Пусть все переменные по времени изменяются пропорционально $e^{\lambda t}$, где $\lambda = i\omega$ – комплексное число.

После небольших преобразований и применения уравнения непрерывности получаем [20]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N_{rr}^2 \Delta_{\eta x} p + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (26)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Delta_{\eta x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

2.1. Случай наличия свободной поверхности

Определим собственные значения $q = \frac{\omega}{2\omega_0}$ и собственные функции задачи о

свободных колебаниях жидкости $\varphi(r, \eta, x)$, полагая $p = \varphi e^{i\omega t}$. Уравнение для определения собственных колебаний жидкости в возмущенном движении, соответствующее уравнению (26), выражается следующим образом [20]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1 - Fr^2 \chi^2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + [1 - \chi^2 (1 + Fr^2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (27)$$

а граничные условия (23) и (24) для цилиндрического сосуда со стратифицированной жидкостью имеют вид:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - i \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left[4 \frac{1 - \chi^2 (1 + Fr^2)}{\chi^2} \varphi - i \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H. \end{aligned} \quad (28)$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, ω – частота колебаний жидкости, $Fr^2 = \frac{N_{rr}^2}{4\omega_0^2}$.

Внутренние волны

Решение краевой задачи (27) и (28) получено с помощью метода разделения переменных для случая $\chi^2 (1 + Fr^2) > 1$:

$$\varphi_{lmp} = \left[AJ_m(\xi_{mp} \bar{r}) + BY_m(\xi_{mp} \bar{r}) \right] e^{im(1 - Fr^2 \cdot \chi^2)^{\frac{1}{2}} \eta} \cos k_l x, \quad (29)$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad k_l = \frac{l\pi}{H}; \quad \bar{k}_l = k_l r_0, \quad \chi = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{mn}^2}{\bar{k}_l^2 (1 + Fr^2)}};$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

здесь $J_m(\xi_{mp}\bar{r})$ и $Y_m(\xi_{mp}\bar{r})$ – функции Бесселя первого и второго родов m -го порядка.

Функция $\varphi_{lmp}(r, \eta, x)$ из (29) должна удовлетворять граничным условиям (28),

то есть

$$\begin{aligned} & A \left[\xi_{mp} c \cdot J'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{mp} c) \right] + \\ & \quad + B \left[\xi_{mp} c \cdot Y'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mp} c) \right] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ & A \left[\xi_{mp} J'_m(\xi_{mp}) + (4\chi_3 + m\chi_2) J_m(\xi_{mp}) \right] + \\ & \quad + B \left[\xi_{mp} Y'_m(\xi_{mp}) + (4\chi_3 + m\chi_2) Y_m(\xi_{mp}) \right] = 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$J'_m(\xi_{mp}) = \frac{dJ_m(\xi_{mp})}{d(\xi_{mp})}, \quad Y'_m(\xi_{mp}) = \frac{dY_m(\xi_{mp})}{d(\xi_{mp})}, \quad c = \frac{R_0}{r_0},$$

$$\chi_2 = \frac{\chi}{\sqrt{1 - Fr^2 \cdot \chi^2}}, \quad \chi_3 = \frac{1 - \chi^2(1 + Fr^2)}{\chi^2}$$

Условие существования нетривиальных решений системы двух однородных алгебраических уравнений (30), записанное в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{mp} c \cdot J'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{mp} c) & \xi_{mp} c \cdot Y'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mp} c) \\ \xi_{mp} J'_m(\xi_{mp}) + (4\chi_3 + m\chi_2) J_m(\xi_{mp}) & \xi_{mp} Y'_m(\xi_{mp}) + (4\chi_3 + m\chi_2) Y_m(\xi_{mp}) \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

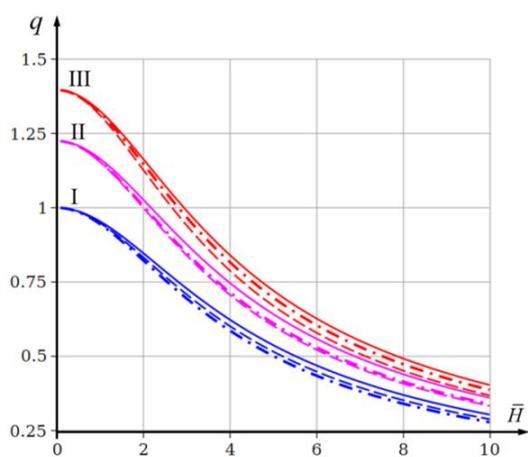
является одновременно уравнением для определения собственных чисел ξ_{lmp} .

Собственные значения $q_{lmp}^{(вну.)}$ внутренних волн при фиксированных значениях l ,

m и p определяются формулой

$$q_{lmp}^{(вну.)} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 (1 + Fr^2)}{\bar{k}_l^2 + \xi_{mp}^2}}. \quad (32)$$

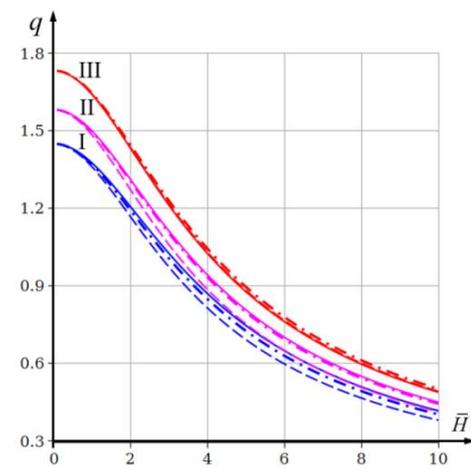
Спектр частот собственных колебаний является одной из наиболее важных характеристик колебательного движения в жидкости. В рассматриваемом случае этот спектр определяется уравнениями (31) и (32). При больших скоростях вращения корни уравнений (31) определяются безразмерными параметрами. $c = R_0/r_0$, $\bar{H} = H/r_0$ и Fr^2 . В рассматриваемой задаче корни уравнений (31) зависят как от параметров c и \bar{H} , так и от величины стратификации Fr^2 . Рассмотрим зависимость собственных значений $q_{lmp}^{(вну.)}$ внутренних волн от стратификации числа Fr^2 , безразмерных параметров \bar{H} и c . На рис. 6 приведены зависимости собственных значений $q_{lmp}^{(вну.)}$ внутренних волн от параметров \bar{H} и c при большой скорости вращения.



I – $Fr^2 = 0$, II – $Fr^2 = 0.5$, III – $Fr^2 = 0.95$.

--- $m = 1$, — $m = 0$, - - - $m = -1$.

(а) при $Fr^2 < 1$



I – $Fr^2 = 1.1$, II – $Fr^2 = 1.5$, III – $Fr^2 = 2$.

--- $m = 1$, — $m = 0$, - - - $m = -1$.

(б) при $Fr^2 > 1$

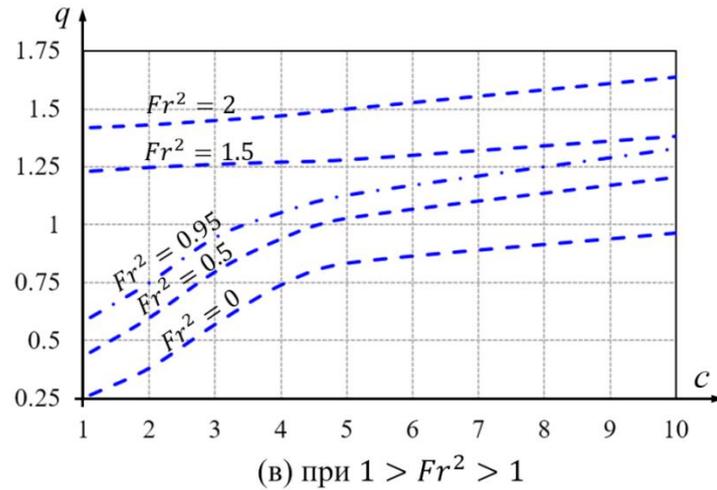


Рис. 6. Зависимости значений собственных частот $q_{lmp}^{(вну.)} = \omega_{lmp} / \omega_0$ внутренних волн от параметров \bar{H} и c : (а) $Fr^2 < 1$, (б) $Fr^2 > 1$, $m = -1, 0, 1$; $p = 1$, $l = 1$, $c = 5$; (в)

$$m = 1, \quad p = 1, \quad l = 1, \quad H = 2.$$

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$)

, штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

На рис. 6 показано, что присутствие расслоения вызывает увеличение частот свободных колебаний жидкости. Чем больше значение числа Fr^2 , тем больше собственные значения $q_{lmp}^{(вну.)}$. При больших скоростях вращения, собственные значения внутренних волн слабо зависят от типа бегущих волн ($m = -1, 0, 1$), и существенно различаются при разных числах Fr^2 .

Поверхностные волны

Теперь обратимся к поверхностным волнам. В уравнении (27) будем считать, что произведение $\chi^2(1 + Fr^2) < 1$. Собственные функции жидкости для поверхностных волн могут быть представлены следующим образом:

$$\varphi_{lm} = [CI_m(\mu_m \bar{r}) + DK_m(\mu_m \bar{r})] e^{im(1-Fr^2 \cdot \chi^2)^{-\frac{1}{2}\eta}} \cos \kappa_l x, \quad (33)$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \kappa_l = \frac{l\pi}{H}, \quad \bar{\kappa}_l = \kappa_l r_0, \quad \chi = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2 - \mu_m^2}{\bar{\kappa}_l^2 (1 + Fr^2)}};$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots,$$

здесь $I_m(\mu_m \bar{r})$ и $K_m(\mu_m \bar{r})$ – функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя) m -го порядка.

Функция $\varphi_{lm}(r, \eta, x)$ из (33) удовлетворяет граничным условиям (28), то есть

$$\begin{aligned} C[\mu_m c I'_m(\mu_m c) + m\chi_2 I_m(\mu_m c)] + \\ + D[\mu_m c K'_m(\mu_m c) + m\chi_2 K_m(\mu_m c)] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ C[\mu_m I'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2)I_m(\mu_m)] + \\ + D[\mu_m K'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2)K_m(\mu_m)] = 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$I'_m(\mu_m \bar{r}) = \frac{dI_m(\mu_m \bar{r})}{d(\mu_m \bar{r})}, \quad K'_m(\mu_m \bar{r}) = \frac{dK_m(\mu_m \bar{r})}{d(\mu_m \bar{r})}, \quad c = \frac{R_0}{r_0},$$

Условие существования нетривиальных решений системы двух однородных алгебраических уравнений (34), записанное в виде

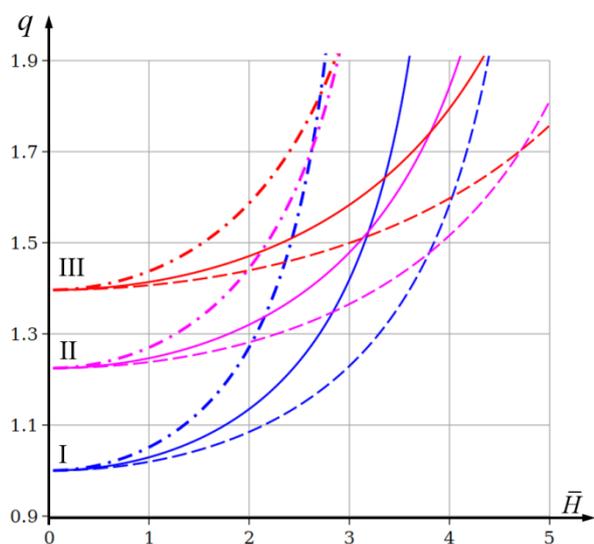
$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_m c I'_m(\mu_m c) + m\chi_2 I_m(\mu_m c) & \mu_m c K'_m(\mu_m c) + m\chi_2 K_m(\mu_m c) \\ \mu_m I'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2)I_m(\mu_m) & \mu_m K'_m(\mu_m) + (4\chi_3 + m\chi_2)K_m(\mu_m) \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

является одновременно уравнением для определения частотного спектра поверхностных волн жидкости, здесь μ_m – корень характеристического уравнения, получаемого из (35).

Собственные значения $q_{lm}^{(нов.)}$ поверхностных волн при фиксированных значениях l, m определяются формулой

$$q_{lm}^{(нов.)} = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2 (1 + Fr^2)}{\bar{\kappa}_l^2 - \mu_m^2}}. \quad (36)$$

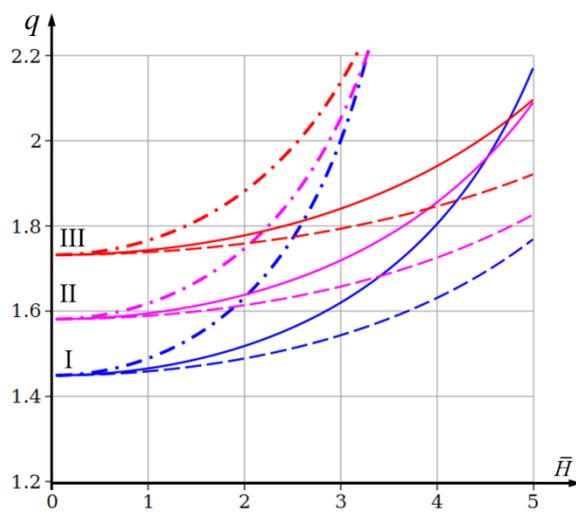
Определяем корни μ_m характеристического уравнения (35) и собственные значения $q_{lm}^{(нов.)}$ уравнения (36) для поверхностных волн.



I – $Fr^2 = 0$, II – $Fr^2 = 0.5$, III – $Fr^2 = 0.95$.

— · — · $m = 1$, — $m = 0$, - - - $m = -1$.

(а) при $Fr^2 < 1$



I – $Fr^2 = 1.1$, II – $Fr^2 = 1.5$, III – $Fr^2 = 2$.

— · — · $m = 1$, — $m = 0$, - - - $m = -1$.

(б) при $Fr^2 > 1$

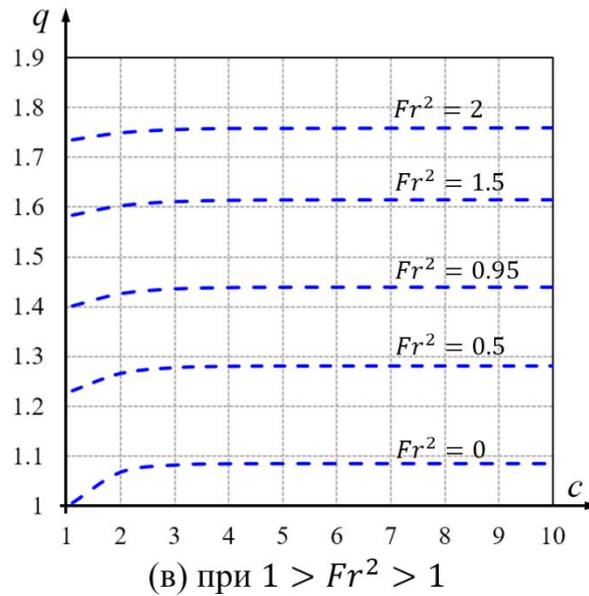


Рис. 7. Зависимости значений собственных частот $q_{lm}^{(нов.)} = \omega_{lm} / \omega_0$ поверхностных волн от параметров \bar{H} и c : (а) $Fr^2 < 1$, (б) $Fr^2 > 1$, $m = -1, 0, 1$; $l = 1$, $c = 5$; (в) $m = 1$, $l = 1$, $H = 2$.

пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$),
штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

На рис. 7 приведены зависимости собственных значений $q_{lm}^{(нов.)}$ поверхностных волн от параметров \bar{H} и c при большой скорости вращения. Из рис. 7 видно, что наличие стратификации приводит к увеличению частот нормальных колебаний жидкости, чем больше значение числа Fr^2 тем больше величина собственных чисел $q_{lm}^{(нов.)}$.

2.2. Случай отсутствия свободной поверхности в коаксиальном цилиндрическом сосуде

Для сравнения результатов внутренних волн, рассмотрим колебание вращающейся жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде с внутренним и

внешним радиусами (r_0, R_0) . Тогда граничные уравнения (28) преобразуются к более простому виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \text{при } r = R_0, \quad r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \text{при } x_3 = 0, \quad x_3 = -H. \end{aligned} \quad (37)$$

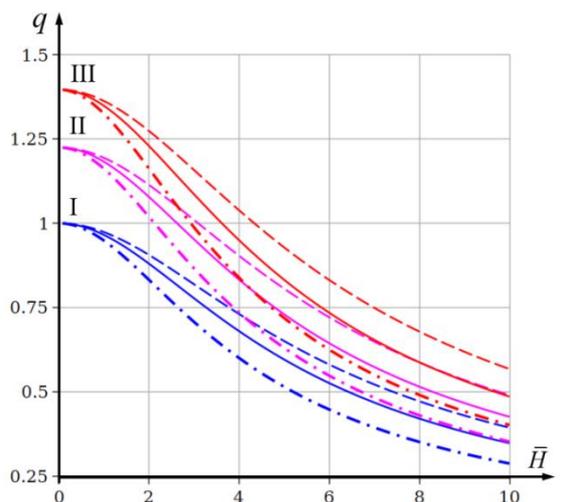
Внутренние волны

Частотное трансцендентное уравнение для внутренних волн можно получить из граничных условий (37):

$$\begin{aligned} A \left[\xi_{mp} c J'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{mp} c) \right] + \\ + B \left[\xi_{mp} c Y'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mp} c) \right] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ A \left[\xi_{mp} J'_m(\xi_{mp}) + m \chi_2 J_m(\xi_{mp}) \right] + \\ + B \left[\xi_{mp} Y'_m(\xi_{mp}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mp}) \right] = 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{mp} c J'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{mp} c) & \xi_{mp} c Y'_m(\xi_{mp} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mp} c) \\ \xi_{mp} J'_m(\xi_{mp}) + m \chi_2 J_m(\xi_{mp}) & \xi_{mp} Y'_m(\xi_{mp}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{mp}) \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

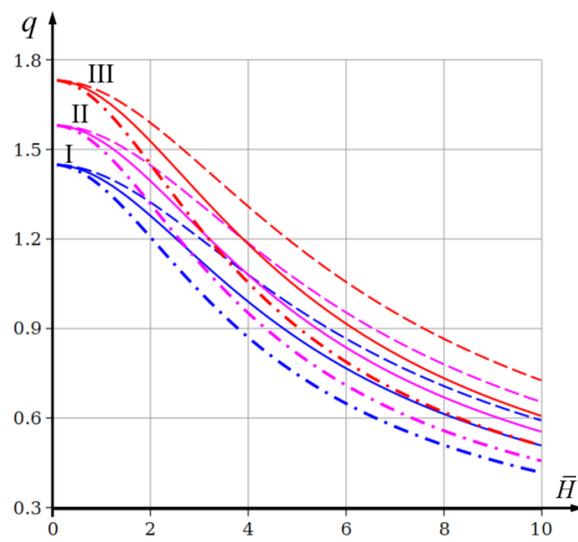
На рис. 8 представлены зависимости собственных значений $q_{lmp}^{(вну.)}$ внутренних волн от безразмерных параметров \bar{H} и c .



I – $Fr^2 = 0$, II – $Fr^2 = 0.5$, III – $Fr^2 = 0.95$.

— · — $m = 1$, — $m = 0$, - - - $m = -1$.

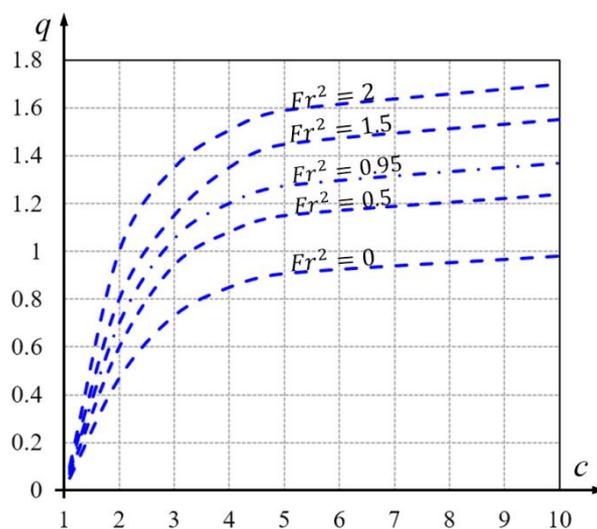
(а) при $Fr^2 < 1$



I – $Fr^2 = 1.1$, II – $Fr^2 = 1.5$, III – $Fr^2 = 2$.

— · — $m = 1$, — $m = 0$, - - - $m = -1$.

(б) при $Fr^2 > 1$



(в) при $1 > Fr^2 > 1$

Рис. 8. Зависимости значений собственных частот $q_{lmp}^{(вну.)} = \omega_{lmp} / \omega_0$ внутренних волн от параметров \bar{H} и c : (а) $Fr^2 < 1$, (б) $Fr^2 > 1$, $m = -1, 0, 1$; $p = 1$, $l = 1$, $c = 5$; (в)

$$m = 1, \quad p = 1, \quad l = 1, \quad H = 2.$$

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$)

штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

На рис. 8 можно увидеть, что присутствие стратификации приводит к повышению частот свободных колебаний жидкости. Значения собственных чисел $q_{lmp}^{(вну.)}$ уменьшаются при увеличении значения параметра \bar{N} и увеличиваются при увеличении величины c . Из проведенных результатов рис 6 и 8 видно, что собственные значения $q_{lmp}^{(вну.)}$ внутренних волн для всех типов бегущих волн ($m = -1, 0, 1$) в коаксиальном цилиндрическом сосуде больше собственных значений колебаний в случае свободной поверхности при малых числах параметра c . При больших числах параметра c собственные значения этих двух случаев очень близки.

Заключение

В данной работе рассмотрены свободные колебания жидкости во вращающемся осесимметричном сосуде при малых и больших скоростях вращения. Полученная краевая задача приводит к эллиптическому или гиперболическому дифференциальному уравнению, в зависимости от соотношения частоты и угловой скорости. Численные результаты представлены в виде графиков. Полученные результаты показывают, что различные типы волн могут наблюдаться во вращающейся криогенной жидкости как при малых, так и при больших скоростях вращения, в зависимости от величины чисел Fr^2 . Частота собственных колебаний этих волн зависит от соотношения сил плавучести и кориолисовой силы инерции. Проведённое исследование колебаний вращающейся стратифицированной жидкости показало, что спектр собственных чисел колебаний состоит из двух множеств действительных чисел: двухиндексного q_{lmp} для поверхностных волн (при малой

скорости вращения) и q_{lm} (при большой скорости вращения), и трёхиндексного множества q_{lmp} для внутренних волн. Частоты свободных колебаний жидкости для внутренних и поверхностных волн увеличиваются по мере наличия стратификации.

При малой скорости вращения собственные значения внутренних волн, полученные при полном и частичном заполнении жидкостью полости, отличаются незначительно, если значения стратификации и высоты жидкости в цилиндре одинаковы. При $0 \leq Fr^2 < 1$, частоты колебаний внутренних прямых волн криогенной вращающейся жидкости всегда больше частот колебаний внутренних обратных волн. В этом диапазоне чисел Fr^2 , собственные значения внутренних прямых волн являются наибольшими из трех типов бегущих волн ($q_{lmp}^+ > q_{lmp}^0 > q_{lmp}^-$). При $Fr^2 > 1$, частоты колебаний внутренних обратных волн криогенной вращающейся жидкости всегда больше частот колебаний внутренних прямых волн. Собственные значения внутренних обратных волн являются наибольшими из трех типов бегущих волн ($q_{lmp}^- > q_{lmp}^0 > q_{lmp}^+$). При любых числах Fr^2 собственные значения поверхностных прямых волн вращающейся жидкости всегда больше значений поверхностных обратных волн, а стоячие волны являются самыми большими из трех типов бегущих волн, т. е. ($q_{mp}^0 > q_{mp}^+ > q_{mp}^-$).

При большой скорости вращения собственные значения внутренних волн в обычном цилиндрическом резервуаре со свободной поверхностью и в коаксиальном цилиндрическом резервуаре без свободной поверхности близки между собой, если значения стратификации и размеры цилиндрического резервуара одинаковы. В

случае полного заполнения при любых значениях числа Fr^2 собственные частоты внутренних прямых волн больше частот обратных волн. Частичное заполнение также приводит к образованию прямых, обратных и стоячих бегущих волн на поверхности. Собственные значения поверхностных обратных волн больше стоячих и прямых волн в независимости от числа Fr^2 .

Список источников

1. Turner J.S. Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge, Cambridge University Press, 1973, 367 p.
2. Глинский Н.Т. Внутренние волны в океанах и морях. - М.: Наука, 1973. - 127 с.
3. Гончаров В.П., Красильников В.А., Павлов В.И. К теории волновых взаимодействий в стратифицированных средах // Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 12. № 11. С. 1143-1151.
4. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. - М.: Наука, 1977. - 816 с.
5. Miles J.W., Troesch B.A. *Surface oscillations of a rotating liquid* // Journal of Applied Mechanics, 1961, vol. 28 (4), pp. 491-496. DOI: [10.1115/1.3641773](https://doi.org/10.1115/1.3641773)
6. Гонткевич В.С. Собственные колебания вращающейся жидкости в сосудах. Гидромеханика // Республиканский межвузовский сборник. 1972. № 20. С. 52–58.
7. Рвалов Р.В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 4. С. 81-88.

8. Greenspan H.P. The theory of rotating fluids. London, Cambridge University Press, 1968, 327 p.
9. Черноусько Ф.Л. Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. - 230 с.
10. Mcewan A.D. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder // Journal of Fluid Mechanics, 1970, vol. 40, part 3, pp. 603-640. DOI: [10.1017/S0022112070000344](https://doi.org/10.1017/S0022112070000344)
11. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. - М.: Наука, 1986. - 288 с.
12. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103-130.
13. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объёме: дисс... канд. физ. мат. наук. Москва, 1984. 192 с.
14. Цветков Д.О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Таврический вестник информатики и математики. 2002. № 1. С. 98-103.
15. Темнов А.Н., Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/291.html>
16. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55633>
17. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84412>

18. Вин К.К. Уравнения для обобщенных координат нелинейных движений поверхности раздела жидкостей // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176847>
19. Ян Наинг У. Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2023. № 130. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=174605>. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)
20. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в поле центробежных сил инерции // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176845>

References

1. Turner J.S. *Buoyancy Effects in Fluids*. Cambridge, Cambridge University Press, 1973, 367 p.
2. Glinskii N.T. *Vnutrennie volny v okeanakh i moryakh* (Internal waves in oceans and seas), Moscow, Nauka, 1973, 127 p.
3. Goncharov V.P., Krasil'nikov V.A., Pavlov V.I. *Fizika atmosfery i okeana*, 1976, vol. 12, no. 11, pp. 1143-1151.
4. Sretenskii L.N. *Teoriya volnovykh dvizhenii zhidkosti* (Theory of wave motions of fluid), Moscow, Nauka, 1977, 816 p.
5. Miles J.W., Troesch B.A. Surface oscillations of a rotating liquid, *Journal of Applied Mechanics*, 1961, vol. 28 (4), pp. 491-496. DOI: [10.1115/1.3641773](https://doi.org/10.1115/1.3641773)
6. Gontkevich V.S. *Sobstvennye kolebaniya vrashchayushcheysya zhidkosti v sosudakh*. *Gidromekhanika, Respublikanskii mezhvuzovskii sbornik*, 1972, no. 20, pp. 52–58.

7. Rvalov R.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1973, no. 4, pp. 81-88.
8. Greenspan H.P. *The theory of rotating fluids*. London, Cambridge University Press, 1968, 327 p.
9. Chernous'ko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, sodержashchimi vyazkuyu zhidkost'* (Motion of a solid body with cavities containing a viscous liquid), Moscow, Vychislitel'nyj centr AN SSSR, 1968, 230 p.
10. Mcewan A.D. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, vol. 40, part 3, pp. 603-640. DOI: [10.1017/S0022112070000344](https://doi.org/10.1017/S0022112070000344)
11. Gabov C.A., Sveshnikov A.G. *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkosti*. (Problems of dynamics of stratified fluids), Moscow, Nauka, 1986, 288 s.
12. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya*, 2008, vol. 29, pp. 103-130.
13. Temnov A.N. *Kolebaniya stratifitsirovannoi zhidkosti v ogranichennom ob'eme* (Oscillations of a stratified fluid in a limited volume), Doctor's thesis. Moscow, MVTU, 1984, 192 p.
14. Tsvetkov D.O. *Tavrisheskii vestnik informatiki i matematiki*, 2002, no. 1, pp. 98-103.
15. Temnov A.N., Ai Min Vin. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2012, no. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/291.html>
16. Ai Min Vin, Temnov A.N. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55633>
17. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>

18. Vin K.K. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL:
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176847>
19. Yan Naing U. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. URL:
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=174605>. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)
20. Temnov A.N., Yan Naing U. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL:
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176845>

Статья поступила в редакцию 26.03.2024

Одобрена после рецензирования 30.03.2024

Принята к публикации 26.04.2024

The article was submitted on 26.03.2024; approved after reviewing on 30.03.2024; accepted for publication on 26.04.2024