

Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Афанасьева М.Н.*, Кузнецов Е.Б.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: mary.mai.8@yandex.ru*

***e-mail: kuznetsov@mai.ru*

Аннотация

Рассматривается численное решение нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью метода пристрелки (стрельбы) и метода продолжения решения по наилучшему параметру. Затрагиваются вопросы нахождения параметра пристрелки более точными методами, нахождения нескольких возможных значений параметра пристрелки, а также нахождения параметра в случае решения сингулярно возмущенного уравнения. Для нахождения всех возможных решений применяются метод Лаэя и метод продолжения по наилучшему параметру. На примере системы из двух уравнений рассматривается работа алгоритма. В случае решения системы сингулярно возмущенных уравнений методом стрельбы с использованием метода продолжения решения по наилучшему параметру для отыскания значения параметра «пристрелки», можно найти все возможные решения с необходимой точностью, другие же методы не всегда позволяют найти все решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, численные методы, метод пристрелки, метод продолжения по наилучшему параметру, метод продолжения по параметру в форме Лаэя.

Введение

Рассматривается краевая задача для нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y(x), y(x-\tau)), x \in [a, b], \\ \bar{y}(x) &= \varphi(x), a \in [a-\tau, a], \\ y(b) &= y_b, \\ \bar{y}(x) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^m, y(b) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k, G(\bar{y}(x), y(b)) : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^n,\end{aligned}\tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ – искомая функция, $\tau > 0$ – аргумент запаздывания, $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – достаточно гладкая функция своих аргументов, на множестве $E_0 = \{x \leq a \mid \exists x_1 > a, x_1 - \tau = x\}$ задана достаточно гладкая функция $\varphi(x)$, y_b – значение функции на правом конце интервала интегрирования.

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом применяются при решении задач, связанных с механикой деформируемого твердого тела, радиолокацией, теорией автоматического регулирования, автоматикой.

Для решения краевой задачи можно использовать совместно методы решения начальной задачи и методы решения операторного уравнения [1]. Для численного решения подобных задач может использоваться метод конечных разностей или метод стрельбы [2]. Так, в монографии [2] описываются метод стрельбы и метод конечных разностей для решения краевых задач, рассматриваются линейные задачи. Для нелинейных задач предлагается сначала линеаризовать задачу, а затем

использовать метод ортогональной прогонки. В [1] излагаются способы приближенного решения операторных уравнений. Рассматриваются различные итерационные процессы решения линейных и нелинейных уравнений. При выборе начального приближения нелинейного операторного уравнения в него вводится параметр $\lambda \in [0,1]$ такой, что при $\lambda = 0$ решение уравнения известно или может быть легко найдено, а при $\lambda = 1$ получается решение исходного уравнения. Решение строится методом продолжения по параметру. Рассматриваются непрерывное продолжение и дискретное.

В [3] рассматривается решение линейных краевых задач для дифференциально-разностных уравнений.

В работе [4] исследуется численное решение краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием метода продолжения решения по наилучшему параметру [5].

Наилучшая параметризация также применяется в работе [6] при численном решении системы дифференциально-алгебраических уравнений, в работе [7] при численном решении начальной задачи для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом, в работе [8] при разработке вычислительных алгоритмов исследования прочности и устойчивости оболочек, в работе [9] при отыскании корней трансцендентного уравнения.

Постановка задачи

Рассмотрим применение подхода на примере системы двух уравнений, т. е. системы вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(x-\tau), y_2(x-\tau)), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_1(x-\tau), y_2(x-\tau)), \\ y_1(x) = \varphi(x), x \in [a-\tau, a], \\ y_2(b) = y_b, \end{array} \right. \quad (2)$$

где $y_1(x), y_2(x)$ – искомые функции, τ – величина запаздывания, $y_1(x), y_2(b)$ – значения функции на концах интервала интегрирования.

Метод пристрелки заключается в сведении решения краевой задачи (2) к решению последовательности задач Коши для той же системы с начальными условиями

$$y_1(a) = \varphi(a), y_2(a) = p.$$

Для решения краевой задачи методом пристрелки выбирается такое значение параметра p , которое аппроксимирует значение $y_2(a)$.

Далее решается задача Коши для системы уравнений с полученными краевыми условиями одним из численных методов, предназначенных для решения начальных задач.

Таким образом, считая решения задачи Коши $y_1(x, p), y_2(x, p)$ зависящими от параметра p , ищется такая кривая, которая выходит из точки $(a, \varphi(a))$ и попадает в точку (b, y_b) .

При $x=b$, учитывая второе краевое условие, получим:

$$F(p) = y_2(b, p) - y_b = 0. \quad (3)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению параметра p .

Для решения уравнения (3) нужно использовать один из методов решения нелинейных уравнений.

Отыскание параметра пристрелки

Так как нахождение каждого нового значения функции $F(p)$ требует численного интегрирования начальной задачи, необходимо решать последнее уравнение наиболее эффективным методом.

Применим метод Ньютона для нахождения p :

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - \frac{F(p^{(k)})}{F'(p^{(k)})},$$

$$p^{(0)} = p_0,$$

где $p^{(k)}$ – значение p на k -й итерации, $F'(p^{(k)})$ – производная исследуемого уравнения в точке $p^{(k)}$.

Но, так как вычислить производную $F'(p^{(k)})$ не представляется возможным, заменим производную функции приближенным разностным отношением:

$$F'(p^{(k)}) = \frac{F(p^{(k)}) - F(p^{(k-1)})}{p^{(k)} - p^{(k-1)}}.$$

Подставляя его в формулу для метода Ньютона, получим:

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - \left[\frac{F(p^{(k)}) - F(p^{(k-1)})}{p^{(k)} - p^{(k-1)}} \right]^{-1} F(p^{(k)}),$$

$$p^{(0)} = p_0.$$

Для осуществления первой итерации необходимо задать две точки: $p^{(0)}$ и $p^{(1)}$. Точка $p^{(1)}$ выбирается в непосредственной близости к точке $p^{(0)}$. Для нахождения значения функции при $p^{(0)}$ и $p^{(1)}$ необходимо решить задачу Коши при выбранных значениях.

Сходимость метода Ньютона сильно зависит от удачного выбора начального приближения. Но если начальное приближение выбрано непосредственно в ближайшей окрестности корня, то метод обеспечивает квадратичную сходимость итерационного процесса.

Следовательно, для обеспечения сходимости итерационного процесса необходимо удачно выбрать начальное приближение, что иногда затруднительно. Общие принципы или правила выбора начального приближения для оптимальной сходимости метода Ньютона отсутствуют.

Для преодоления трудностей, связанных с выбором начального приближения, совершим переход к уравнению

$$F(p, \mu) = 0.$$

Параметр $\mu \in [0, 1]$ вводится так, чтобы при $\mu = 0$ уравнение становилось уравнением с известным или легко определяемым решением p , а при $\mu = 1$ – исходным уравнением с искомым решением.

Так, параметр μ можно ввести следующим образом:

$$\Phi(p, \mu) = F(p) - (1 - \mu)F(p_0) = 0, \quad (4)$$

где p_0 – решение при $\mu = 0, \mu \in [0, 1]$.

Полученное уравнение (4) можно решать методом продолжения по параметру в форме М. Лаэя (дискретное продолжение) или в форме Д. Ф. Давиденко (непрерывное продолжение), см. [5].

Для решения уравнения (4) воспользуемся дискретным вариантом продолжения по параметру.

Отрезок, на котором изменяется параметр $\mu \in [0,1]$, разобьем на m частей:

$$0 < \mu_1 < \dots < \mu_{m-1} < \mu_m = 1.$$

Таким образом, для каждого μ_k вычисляем p_k с помощью описанного выше метода Ньютона:

$$p_{(k)}^{(i+1)} = p_{(k)}^{(i)} - \left[\frac{\Phi(p_{(k)}^{(i)}, \mu_{(k)}) - \Phi(p_{(k)}^{(i-1)}, \mu_{(k)})}{p_{(k)}^{(i)} - p_{(k)}^{(i-1)}} \right]^{-1} \Phi(p_{(k)}^{(i)}, \mu_{(k)}),$$

$$p_{(k-1)}^{(0)} = p_{(k)}^{(r_k)}, i=1, 2, \dots, r_{k-1}.$$

Однако, если кривая множества решений содержит участки, на которых параметр μ может меняться немонотонно, итерационный процесс может расходиться. Тогда для решения нужно использовать метод продолжения решения по наилучшему параметру.

Кривая множества решений разбивается на l участков: $v_0 = 0 < v_1 < v_2 < \dots < v_l = L$. Теперь параметры μ и p становятся равноправными. Решение строим, продвигаясь по последовательности значений введенного наилучшего параметра. Неизвестные переменные принимают значения:

$$p_k = p(v_k), \mu_k = \mu(v_k).$$

Пусть приращение наилучшего параметра $\Delta v = v_{k+1} - v_k$ постоянно тогда систему можно описать следующим образом [8]:

$$\Psi_{k+1}(z) = \begin{cases} F(p) - (1 - \mu)F(p_0) = 0, \\ (p - p_k^{(r_k)})^2 + (\mu - \mu_k^{(r_k)})^2 - \Delta v^2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Где $z = (p, \mu), v_{k+1} = v_k + \Delta v, v_0 = 0, v_l = L$. Геометрически решение этой системы показано на рис.1.

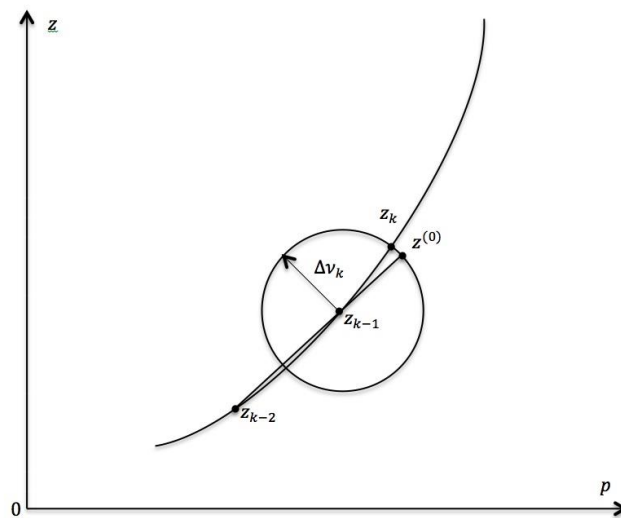


Рис. 1. Геометрическое решение системы (5)

Система (5) решается при помощи метода Ньютона следующим образом:

$$z_k^{(i+1)} = z_k^{(i)} - \left[\frac{\partial \Psi_k(z_k^{(i)})}{\partial z} \right]^{-1} \Psi_k(z_k^{(i)}), i = 1, 2, \dots, r_{k-1},$$

$$z_k^{(0)} = 2z_{k-1}^{(r_{k-1})} - z_{k-2}^{(r_{k-2})}$$

где $\frac{\partial \Psi_k(z_k^{(i)})}{\partial z}$ – матрица Якоби.

Для нашего случая матрица Якоби примет вид:

$$\frac{\partial \Psi_k(z_k^{(i)})}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi(p_{(k)}^{(i)}, \mu_{(k)}) - \Phi(p_{(k)}^{(i-1)}, \mu_{(k)})}{p_{(k)}^{(i)} - p_{(k)}^{(i-1)}} & F(p_0) \\ 2(p - p_k^{(r_k)}) & 2(\mu - \mu_k^{(r_k)}) \end{pmatrix}$$

Недостатком данного подхода является тот факт, что такой алгоритм будет работать лишь тогда, когда на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ задачу Коши можно успешно проинтегрировать. Трудности могут возникнуть при неудачном выборе начальных условий или если система является плохо обусловленной.

Вычисление функции на предыстории

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в рассматриваемой краевой задаче решение зависит также от значения функций на предыстории.

Задана начальная точка $x_0 = a$. Отклонение τ определяет начальное множество $E_0 = \{x \leq a \mid \exists x_1 > a, x_1 - \tau = x\}$. На E_0 задана достаточно гладкая функция $\varphi(x)$ – начальная функция.

Для вычисления значения функции в точке $z = t - \tau$ (на предыстории), где t – аргумент запаздывания, целесообразно использовать интерполяцию методом Лагранжа по трем точкам.

В общем случае для $n+1$ значения функции $y(x)$ в узлах x_i интерполяционный полином в форме Лагранжа имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

В нашем случае полином строится по трем точкам, следовательно, получим формулу для вычисления полинома Лагранжа второй степени:

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Решение задачи Коши

На каждом шаге метода пристрелки решается задача Коши. Для решения начальной задачи воспользуемся методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Общий вид рекуррентной формулы для метода Рунге-Кутты четвертого порядка имеет вид:

$$Y^{(n+1)} = Y^{(n)} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

где коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4 определяются формулами:

$$K_1 = f(X^{(n)}, Y^{(n)}),$$

$$K_2 = f\left(X^{(n)} + \frac{h}{2}, Y^{(n)} + \frac{h}{2}K_1\right),$$

$$K_3 = f\left(X^{(n)} + \frac{h}{2}, Y^{(n)} + \frac{h}{2}K_2\right),$$

$$K_4 = f(X^{(n)} + h, Y^{(n)} + hK_3).$$

Так, для рассматриваемой системы рекуррентный процесс будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{(n+1)} = y_1^{(n)} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ y_2^{(n+1)} = y_2^{(n)} + \frac{h}{6}(M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4), \\ y_1(x_0) = \varphi(x_0), \\ y_2(x_0) = p. \end{array} \right.$$

Здесь значения коэффициентов K_1, K_2, K_3, K_4 вычисляются по формулам:

$$K_1 = f_1(x^n, y_1^{(n)}(x^n), y_2^{(n)}(x^n), y_1^{(n)}(x^n - \tau), y_2^{(n)}(x^n - \tau)),$$

$$K_2 = f_1(x^n + \frac{h}{2}, y_1^{(n)}(x^n) + \frac{h}{2}K_1, y_2^{(n)}(x^n) + \frac{h}{2}M_1, y_1^{(n)}(x^n - \tau) + \frac{h}{2}K_1, y_2^{(n)}(x^n - \tau)) + \frac{h}{2}M_1),$$

$$K_3 = f_1(x^n + \frac{h}{2}, y_1^{(n)}(x^n) + \frac{h}{2}K_2, y_2^{(n)}(x^n) + \frac{h}{2}M_2, y_1^{(n)}(x^n - \tau) + \frac{h}{2}K_2, y_2^{(n)}(x^n - \tau)) + \frac{h}{2}M_2),$$

$$K_4 = f_1(x^n + h, y_1^{(n)}(x^n) + hK_3, y_2^{(n)}(x^n) + hM_3, y_1^{(n)}(x^n - \tau) + hK_3, y_2^{(n)}(x^n - \tau)) + hM_3).$$

Коэффициенты M_1, M_2, M_3, M_4 вычисляются по аналогичным формулам.

Численные исследования

Рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения с запаздывающим аргументом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon u(x)'' = u(x) - u(x - \tau)^4, \\ u(x) = \cos(x), x \in [0 - \tau, 1], \\ u(1) = 0.3, \end{array} \right.$$

где аргумент запаздывания $\tau = 0.02$.

Сведем систему к задаче Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x)' = z, \\ z(x)' = \frac{1}{\varepsilon}(u(x) - u(x-\tau)^4), \\ u(x) = \cos(x), x \in [0-\tau, 1], \\ u(0)' = p. \end{array} \right.$$

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon = 0.05$.

Видно, что решение полученной начальной задачи будет иметь вид: $u(x, p)$.

1. Рассмотрим решение краевой задачи с помощью метода пристрелки, параметр пристрелки будем находить методом Ньютона.

При использовании метода Ньютона для отыскания дополнительного начального условия, необходимо достаточно близко выбрать начальное приближение.

Так, чтобы найти оба возможных решения, были выбраны начальные приближения $p_0 = -2.9$ и $p_0 = 1.1$ при шаге интегрирования системы $h = 0.05$. При выборе же начального приближения $p_0 = -1$, программа входила в бесконечный цикл.

2. Заметим, что метод Ньютона работает при достаточно близком выборе начального приближения. Для ослабления этой проблемы воспользуемся методом

продолжения по параметру в форме Лаэя. На рис. 2 и 3 изображены графики функций $u(y_b, p)$ при найденных значениях параметра пристрелки p .

На приведенных графиках видно, что применение данного подхода, приводит к непредсказуемым скачкам итерационных приближений на одну из ветвей функции.

Отыскание корня в этом случае может зависеть от плотности сетки H по параметру продолжения μ , плотности сетки h интегрирования задачи Коши, а также от точности метода Ньютона.

Перескок может совершаться в точку, где нарушается монотонность функции, тогда метод перестает сходиться и следует воспользоваться методом продолжения по наилучшему параметру.

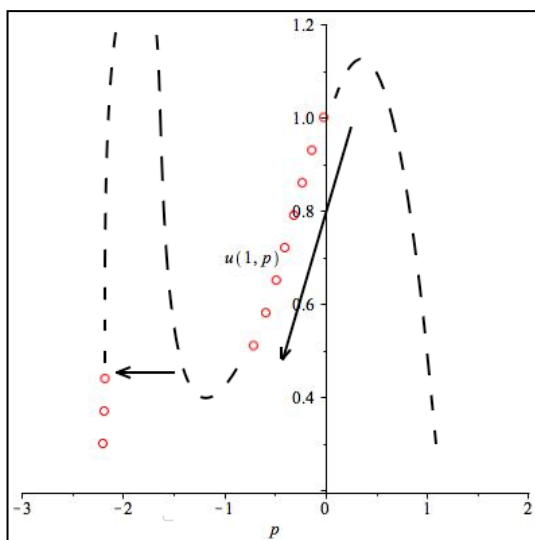


Рис. 2. График функции $u(1, p)$,

$$p_0 = 0.21, h = 0.1, H = 0.1.$$

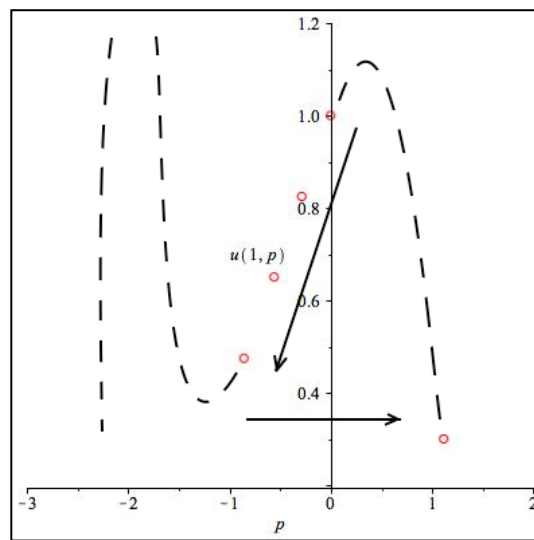


Рис. 3. График функции $u(1, p)$,

$$p_0 = 0.21, h = 0.05, H = 0.25.$$

3. Решение краевой задачи с помощью метода пристрелки. Для нахождения параметра пристрелки используем метод продолжения по наилучшему параметру.

На рис. 4 и 5 показано поведение функции $u(y_b, p)$ при найденных значениях параметра p , где h - плотность сетки интегрирования задачи Коши, H - плотность сетки по наилучшему параметру ν .

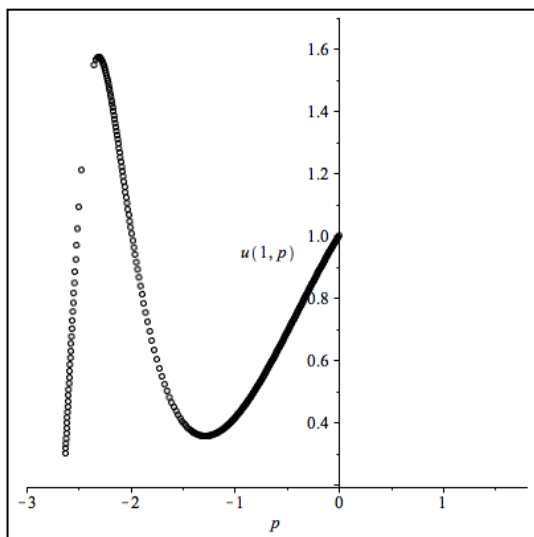


Рис. 4. График функции $u(1, p)$,

$p_0 = 0.21, h = 0.05, H = 0.01$

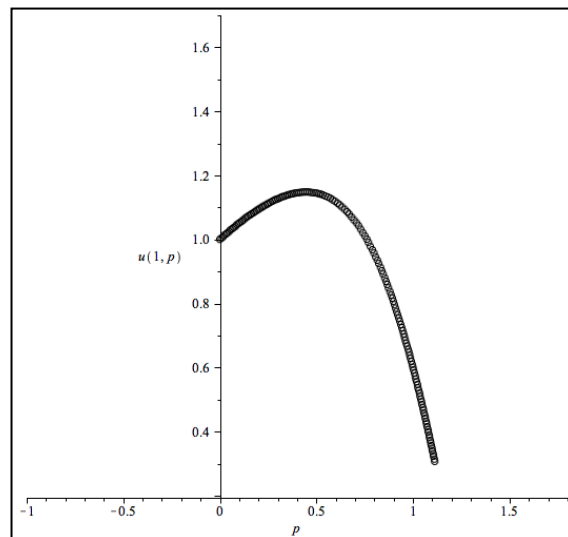


Рис. 5. График функции $u(1, p)$,

$p_0 = 0.21, h = 0.05, H = 0.01$

На рис. 6 и 7 приведены полученные решения исследуемой системы при найденных значениях параметра p .

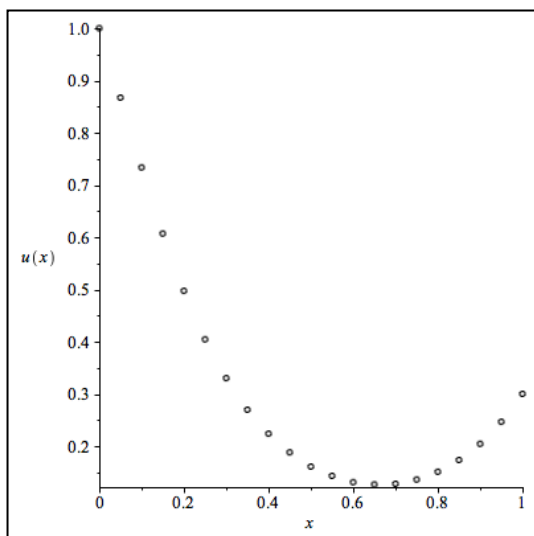


Рис. 6. График решения $u(x)$ при

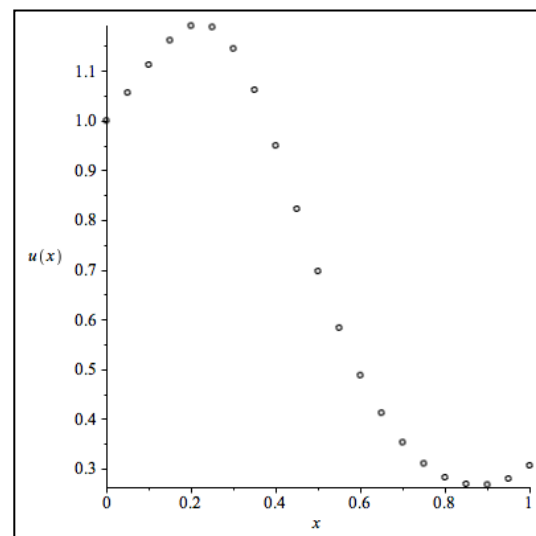


Рис. 7. График решения $u(x)$ при

$$p=2.626060867$$

$$p=1.112667996$$

Выводы

С помощью численных исследований было показано, что использование метода продолжения решения по наилучшему параметру позволяет определить все возможные значения параметров пристрелки, и, таким образом, найти все возможные решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00943

Библиографический список

1. Красносельский А.М., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969. - 456 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987. - 600 с.
3. Каменский Г.А., Скубачевский А.Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. - М.: Изд-во МАИ, 1992. - 190 с.
4. Красников С.Д., Кузнецов Е.Б. Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. том 45. № 12. С. 2148 – 2158.

5. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. - М.: Эдиториал УРСС, 1999. - 224 с.

6. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Математическое моделирование чистого изгиба балки из авиационного материала // Труды МАИ, 2013, № 65: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35927>

7. Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Оптимальная параметризация систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т. 15. № 2. С. 36-44.

8. Карпов В.В., Семенов А.А., Холод Д.В. Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика // Труды МАИ, 2014, №76: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=49970>

9. Данилин А.Н., Козлов К.С., Кузнецова Е.Л., Тарасов С.С. Моделирование колебаний гасителя вибрации проводов воздушных систем энергоснабжения // Труды МАИ, 2013, №64: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=36556>

10. Kuznetsov E.B. Optimal parametrization in numerical construction of curve - Journal of the Franklin Institute. 2007. V. 344. P. 658-671.