УДК: 519.677

Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте

В.Н. Нефедов

Настоящая работа является продолжением работ [1-3], в которых решалась задача построения конструктивных необходимых и достаточных условий положительности (или неотрицательности) действительного полинома в положительном ортанте. В работах [1-2] было получено необходимое и некоторые достаточные условия, применимые для решения ряда прикладных задач, в частности, для задач исследования матриц на D*-устойчивость и* aD*-устойчивость, возникающих в математической экологии и математической экономике (см., например, [4-10]).*

В работе [3] получено необходимое и достаточное условие положительности (неотрицательности) полинома в положительном ортанте без каких-либо ограничений на полином. Однако, практически реализуемый метод проверки выполнения этого условия описан в [3] только для специального класса полиномов, у которых векторы степеней членов с отрицательными коэффициентами находятся во внутренности выпуклой оболочки множества векторов степеней членов с положительными коэффициентами. Одна из основных идей метода из [3] заключается в привлечении методов векторной оптимизации.

В настоящей работе используется то же, что и в [3], необходимое и достаточное условие положительности (неотрицательности) полинома в положительном ортанте, метод проверки выполнения которого также основан на использовании методов векторной оптимизации. Однако, описанный в настоящей работе метод не требует никаких ограничений на исследуемый полином. Следует, однако, отметить, что этот метод имеет экспоненциальную сложность по числу членов в полиноме с отрицательными коэффициентами и поэтому может быть реально применим лишь при не очень большом числе таких членов.

1. Введение.

Пусть $\mathbf{R}^m$ - евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$ и нормой $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$; $\mathbf{Q}$ – множество рациональных чисел; $\mathbf{Q}^m$ - множество векторов из $\mathbf{R}^m$ с рациональными координатами; $\mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m | \ x_i > 0, \ i = 1,2,\ldots,m\}$ - положительный ортант; $\mathbf{N} = \{1,2,\ldots\}$ - натуральный ряд; $\mathbf{N}^m = \{x \in \mathbf{R}^m | \ x_i \in \mathbf{N}, \ i = 1,2,\ldots,m\}$; $\mathbf{Z}_{\geq} = \{0,1,2,\ldots\}$ - множество целых неотрицательных чисел; $\mathbf{Z}_{\geq}^{m} = \left\{x \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, x_i \in \mathbf{Z}_{\geq},\ i = 1,2,\ldots,m\right\}$. Для любых $x \in \mathbf{R}_{+}^{m}$, $l \in$ $\mathbf{R}^m$, $a > 0$ обозначим

$$x^l = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_m^{l_m},\ a^l = \left(a^{l_1}, a^{l_2}, \ldots, a^{l_m}\right) \in \mathbf{R}^m.$$

Тогда для любых $x \in \mathbf{R}_{+}^{m}$, $k, l \in \mathbf{R}^m$, $a > 0$ и для любой квадратной матрицы U порядка m с действительными элементами выполняются равенства:

$$x^{k+l} = x^k x^l;\ (a^k)^l = a^{\langle k,l \rangle} = (a^l)^k;\ (a^k)^{Ul} = a^{\langle k,Ul \rangle} = a^{\langle U'k,l \rangle} = (a^l)^{U'k},$$

где U' - матрица, транспонированная по отношению к матрице U.

Пусть $a \in \mathbf{R}$; $x \in \mathbf{R}_{+}^{m}$; $k, v^1, \ldots, v^m \in \mathbf{R}^m$. Тогда справедливы также следующие равенства:

$$(x^k)^a = x^{ak},\ (x^{v^1}, \ldots, x^{v^m})^k = (x^{v^1})^{k_1} \cdots (x^{v^m})^{k_m} = x^{k_1 v^1 + \ldots + k_m v^m} = x^{Vk},$$

где $V = [v^1 \ldots v^m]$ - квадратная матрица порядка m, составленная из вектор-столбцов $v^1, \ldots, v^m$.

Для любого множества $S \subseteq \mathbf{R}^m$ обозначим: $\operatorname{int} S$ - совокупность всех внутренних точек множества S; $\operatorname{Co} S$ - выпуклая оболочка множества S (см., например, [11, гл. 4]).

Будем рассматривать полином

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i x^{l^i} - \sum_{j=1}^{n_2} b_j x^{k^j},$$

(1.1)

где $x \in \mathbf{R}_{+}^{m}$, $l^i \in \mathbf{R}^m$, $k^j \in \mathbf{R}^m$; $l^{i_1} \neq l^{i_2}$ при $i_1 \neq i_2$; $k^{j_1} \neq k^{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$; $l^i \neq k^j$, $\forall i, j$; $a_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n_1$; $b_j > 0$, $j = 1,2,\ldots,n_2$; $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$.

Обозначим

$$p_1(x) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i x^{l^i},\quad p_2(x) = \sum_{j=1}^{n_2} b_j x^{k^j}.$$

Полином $p(x)$ называется *положительным* в положительном ортанте, если

$$\forall x \in \mathbf{R}_{+}^{m} \quad p(x) > 0.$$

(1.2)

Полином $p(x)$ называется *неотрицательным* в положительном ортанте, если

$$\forall x \in \mathbf{R}_{+}^{m} \quad p(x) \geq 0 .$$

(1.3)

К задаче проверки полинома на выполнение условия (1.2) (или (1.3)) сводится немало математических задач. Например, нередко возникает необходимость (см. пример ниже) проверки для полинома $p(x)$ с целыми неотрицательными показателями степеней при переменных (т.е. при $l^{i} \in \mathbf{Z}_{\geq}^{m}, k^{j} \in \mathbf{Z}_{\geq}^{m}$), определенного на всем пространстве $\mathbf{R}^{m}$, выполнения условия

$$\forall x \in \mathbf{R}^{m} \quad p(x) \geq 0 ,$$

(1.4)

или

$$\forall x \in \mathbf{R}^{m} \quad p(x) > 0 ,$$

(1.5)

или

$$\forall x \in \left\{ u \in \mathbf{R}^{m} \middle| u_1 \neq 0,\ldots,u_m \neq 0 \right\} \quad p(x) > 0 .$$

(1.6)

Указанные задачи легко сводятся к конечным совокупностям задач на проверку выполнения условий вида (1.2) или (1.3). В самом деле, справедливы следующие простые утверждения:

1) $\forall x \in \mathbf{R}^{m} \quad p(x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_m) \in \{1,-1\}^{m} \quad p(\beta_1 x_1,\ldots,\beta_m x_m) \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}_{+}^{m}$;

2) $\forall x \in \mathbf{R}^{m} \quad p(x) > 0 \Leftrightarrow \forall \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_m) \in \{0,1,-1\}^{m} \quad p(\beta_1 x_1,\ldots,\beta_m x_m) > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}_{+}^{m}$;

3) $\forall x \in \left\{ u \in \mathbf{R}^{m} \middle| u_1 \neq 0,\ldots,u_m \neq 0 \right\} \quad p(x) > 0 \Leftrightarrow \forall \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_m) \in \{1,-1\}^{m}$

$p(\beta_1 x_1,\ldots,\beta_m x_m) > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}_{+}^{m}$.

Условия (1.4-6) используются, например, для получения необходимых и достаточных условий локального минимума полинома с целыми неотрицательными показателями степеней при переменных (а также аналитических функций).

В работах [12,13] показано, что необходимым условием локального минимума полинома $p(x)$ в точке $(0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^{m}$ с целыми неотрицательными показателями степеней при переменных, удовлетворяющего условиям: $p(0,\ldots,0) = 0$, $p'(0,\ldots,0) = (0,\ldots,0)$, является выполнение условия: $\forall A \in \mathbf{N}^{m},\ \forall x \in \mathbf{R}^{m} \quad \varphi_A(x) \geq 0$, где $\varphi_A(x)$ является главной A – квазиоднородной полиномиальной формой полинома $p(x)$ (см. [13 , стр. 209]). Указанные формы являются полиномами, состоящими из части членов исходного полинома $p(x)$, их конечное число, и они легко выделяются из исходного полинома $p(x)$.

В той же работе показано, что достаточным условием локального минимума полинома $p(x)$ в точке $(0,...,0)\in\mathbf{R}^m$ с целыми неотрицательными показателями степеней при переменных, удовлетворяющего условиям: $p(0,\ldots,0)=0$, $p'(0,\ldots,0)=(0,\ldots,0)$, является выполнение условия: $\forall A\in\mathbf{N}^m$, $\forall x\in\{u\in\mathbf{R}^m | u_1\neq 0,...,u_m\neq 0\}$ $\varphi_A(x)>0$, где $\varphi_A(x)$ является главной $A-$ квазиоднородной полиномиальной формой полинома $p(x)$.

Аналогичные необходимые и достаточные условия локального минимума функции $p(x)$ в точке $(0,...,0)\in\mathbf{R}^m$, удовлетворяющей условиям: $p(0,\ldots,0)=0$, $p'(0,\ldots,0)=(0,\ldots,0)$, справедливы и для случая, когда функция $p(x)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $(0,...,0)\in$ $\mathbf{R}^m$ (см. [14, стр. 96]).

Вернемся к исходной задаче проверки выполнения условий (1.2),(1.3) для полинома (1.1). Воспользовавшись подстановкой $x_i=e^{t_i}$, $i=1,2,...,m,$ в полиноме $p(x)$, имеем

$$p(e^t)=p_1(e^t)-p_2(e^t)=\sum_{i=1}^{n_1}a_i e^{\langle l^i,t\rangle}-\sum_{j=1}^{n_2}b_j e^{\langle k^j,t\rangle}=\left(\sum_{i=1}^{n_1}a_i e^{\langle l^i,t\rangle}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n_2}\frac{b_j}{\sum_{i=1}^{n_1}a_i e^{\langle l^i-k^j,t\rangle}}\right),$$

(1.7)

где $t=(t_1,...,t_m)\in\mathbf{R}^m$ (указанная подстановка используется в теории геометрического программирования; см., например, [15, стр. 92]).

Обозначим

$$f_j(t)=\sum_{i=1}^{n_1}a_i e^{<l^i-k^j,t>},\ j=1,2,\ldots,n_2,$$

$$F(t)=F[p(x);t]=p_2(e^t)\big/p_1(e^t)=\sum_{j=1}^{n_2}b_j e^{\langle k^j,t\rangle}\Big/\sum_{i=1}^{n_1}a_i e^{\langle l^i,t\rangle}=\sum_{j=1}^{n_2}\frac{b_j}{f_j(t)}.$$

Тогда из (1.7) получаем

$$p(e^t)=\left(\sum_{i=1}^{n_1}a_i e^{\langle l^i,t\rangle}\right)[1-F(t)]. \tag{1.8}$$

Обозначим

$$\alpha_* = \alpha_*[p(x)] = \sup F(\mathbf{R}^m) = \sup\{F(t) \mid t \in \mathbf{R}^m\}.$$

Возможны случаи:

$\alpha_* > 1,$ (1.9)

$\alpha_* = 1$ и sup достижим, (1.10)

$\alpha_* = 1$ и sup не достижим, (1.11)

$\alpha_* < 1$. (1.12)

Утверждение 1.1. Случай (1.9) возможен тогда и только тогда, когда $\exists u \in \mathbf{R}_+^m : \ p(u) < 0$.

Утверждение 1.2. Случай (1.10) возможен тогда и только тогда, когда

$\forall x \in \mathbf{R}_+^m \quad p(x) \ge 0$ и $\exists u \in \mathbf{R}_+^m : \ p(u) = 0$.

(1.13)

Утверждения 1.1,1.2 являются очевидными следствиями равенства (1.8).

Следствием утверждений 1.1,1.2 являются:

Теорема 1.1. Для справедливости (1.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялся один из случаев: (1.11) или (1.12).

Теорема 1.2. Для справедливости (1.3) необходимо и достаточно, чтобы не выполнялся случай (1.9).

Таким образом, определение положительности (неотрицательности) полинома в положительном ортанте сводится к вычислению величины α_*, а также к выяснению (в наиболее тонком случае, когда α_*=1), является ли величина α_* достижимой или нет. При этом для нахождения величины α_* следует решить задачу безусловной оптимизации

$F(t) \to \sup(=\alpha_*); \ t \in \mathbf{R}^m.$ (1.14)

В дальнейшем также будут использоваться следующие обозначения

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_{n_2}(t)), \ Y = \{f(t) \mid t \in \mathbf{R}^m\},$$

$$L_p = \{l^1, \dots, l^{n_1}\}, \ K_p = \{k^1, \dots, k^{n_2}\}, \ N_p = L_p \cup K_p.$$

В работе [3] предлагается подход к нахождению величины α_*, основанный на исследовании задачи (1.14) и на привлечении к решению этой задачи методов векторной оптимизации. При этом векторным критерием является $f(t)$, Y - множеством векторных оценок, частными критериями - выпуклые и бесконечно гладкие на всем пространстве $\mathbf{R}^m$ функции $f_1(t), \dots, f_{n_2}(t)$. Следует, однако, отметить, что в методе из [3] используется дополнительное достаточно сильное предположение

$$\operatorname{int}\operatorname{Co} N_p \neq \varnothing,\ k^1,\dots,k^{n_2} \in \operatorname{int}\operatorname{Co} N_p .$$

(1.15)

Замечание 1.1. Предположение $\operatorname{int}\operatorname{Co} N_p \neq \varnothing$ не является ограничительным, поскольку, как показано в работе [1] (см. теорему 1), с помощью невырожденной операции домножения и замены переменных можно перейти от исходного полинома $p(x)$ к полиному, для которого выполняется указанное условие, и при этом новый полином является положительным (неотрицательным) в положительном ортанте, тогда и только тогда, когда таковым является исходный полином $p(x)$.

Целью настоящей работы является развитие подхода из [3], заключающегося в привлечении к решению задачи (1.14) методов векторной оптимизации, а также ослабление условий, накладываемых на полином (1.1).

Используя предположение (1.15), в [3] было показано, что величина α_* в этом случае является конечной и достижимой в задаче (1.14). Кроме того, в [3] был описан численный метод вычисления величины α_* с любой желаемой точностью $\varepsilon > 0$. В этом методе нахождение приближенного (с точностью ε) решения задачи (1.14) сводится к решению конечного числа задач выпуклого программирования. Количество этих задач зависит от точности ε .

Одна из основных идей метода из [3] заключается в рассмотрении (наряду с задачей (1.14)) задачи векторной оптимизации

$$f(t) \to \min;\ t \in \mathbf{R}^m. \tag{1.16}$$

Множеством векторных оценок в задаче (1.16) является Y , а

$$P(Y) = \left\{ y^0 \in Y \,\middle|\, \forall y \in Y\ [y \le y^0 \Rightarrow y = y^0] \right\}$$

(здесь используется обозначение $y \le y^0 \Leftrightarrow y_i \le y_i^0, i = 1,2,\dots,n_2$) - множеством оптимальных по Парето векторных оценок (*множеством Парето*). Как было показано в [3], в случае (1.15)

$$\operatorname{Arg}\max F(\mathbf{R}^m) = \left\{ t \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, F(t) = \sup F(\mathbf{R}^m) \right\} \neq \varnothing ,$$

и при этом

$$\forall t^* \in \operatorname{Arg}\max F(\mathbf{R}^m)\ \ f(t^*) \in P(Y),$$

а следовательно, для решения задачи (1.14) можно воспользоваться известными методами аппроксимации множества Парето $P(Y)$ (см., например, [16,17]).

Метод определения величины α_* с заданной точностью $\varepsilon > 0$, предложенный в [3], представляет собой алгоритм, в котором можно выделить следующие три этапа.

На первом этапе строится координатный параллелепипед (т.е. ребра этого параллелепипеда параллельны координатным осям) $\prod \subset \mathbf{R}_+^{n_2}$ такой, что

$$P(Y) \subset \Pi . \tag{1.17}$$

На втором этапе для заданного числа $\varepsilon > 0$ выбирается число $\delta = \min\{\delta_0 ; \varepsilon / \eta\}$, где $\delta_0 > 0$, $\eta > 0$ - константы, определенные в [3, стр. 19]. Далее строится параллелепипед Π_0 (не координатный) размерности $n_2 - 1$, являющийся подмножеством линейного подпространства

$H = \{u \in \mathbf{R}^{n_2} \mid u_1 + \ldots + u_{n_2} = 0\}$ и включающий в себя проекцию параллелепипеда Π на H. Этот

параллелепипед покрывается кубами (также размерности $n_2 - 1$), ребра которых параллельны ребрам параллелепипеда Π_0, с длиной ребер у этих кубов, равной 2δ, и определяется множество H_0^δ, состоящее из центров указанных кубов.

На третьем этапе для каждого $h \in H_0^\delta$ решается задача выпуклого программирования (а именно, задача безусловной минимизации выпуклой кусочно-аналитической функции)

$$\Phi(t, h) = \max_{1 \le j \le n_2} \{f_j(t) - h_j\} \to \min, \; t \in \mathbf{R}^m, \tag{1.18}$$

которая, как показано в [3], в случае (1.15) имеет единственное решение $t(h) \in \mathbf{R}^m$, $\forall h \in \mathbf{R}^{n_2}$.

Далее вычисляется величина $\alpha_\varepsilon = \max\{F(t(h)) \mid h \in H_0^\delta\}$, для которой выполняется $\alpha_* - \varepsilon \le \alpha_\varepsilon \le \alpha_*$.

Кроме того, для сокращения общего объёма вычислений в [3] предлагается модификация метода, использующая идеи ветвления (метод «ветвей и границ»).

Таким образом, в [3] использовалась идея аппроксимации множества Парето $P(Y)$ методом «сверток», причем в качестве такой свертки использовалась функция $\Phi(t, h)$ (аналогичная свертка использовалась в [16,17] для аппроксимации $P(Y)$ в некотором «слабом» смысле).

Замечание 1.2. Нетрудно показать, что метод из [3] остается в силе, если условие (1.17) на координатный параллелепипед $\prod \subset \mathbf{R}_+^{n_2}$ заменить на более слабое

$$\Pi \cap f(\operatorname{Arg\,max} F(\mathbf{R}^m)) \ne \varnothing . \tag{1.19}$$

Более того, метод из [3] применим к любому полиному (1.1), для которого удается построить координатный параллелепипед $\prod \subset \mathbf{R}_+^{n_2}$, удовлетворяющий (1.19), и для которого задача (1.18) имеет единственное решение для любого $h \in \mathbf{R}^{n_2}$.

В настоящей работе расширяется область применения метода из [3] (или модификаций этого метода). Так при описании метода вычисления величины α_* с заданной точностью $\varepsilon > 0$ (см. раздел 4) снимается предположение (1.15) и вместо него используется предположение

$$K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p, \tag{1.20}$$

которое можно считать выполненным. Действительно, если условие (1.20) не выполняется, то, как нетрудно видеть, не выполняется необходимое условие неотрицательности полинома (1.1) на положительном ортанте (поскольку в этом случае $\exists k^j \in K_p : k^j$ является угловой точкой выпуклого многогранника $\mathrm{Co}\, N_p$, а следовательно, $\varphi(x) = -b_j x^{k^j}$ является главной квазиоднородной полиномиальной формой полинома (1.1) и, например, для точки $(1,\ldots,1) \in \mathbf{R}^m$ справедливо неравенство $\varphi(1,\ldots,1) = -b_j < 0$, т.е. не выполняется необходимое условие неотрицательности полинома на положительном ортанте, заключающееся в неотрицательности на положительном ортанте всех главных квазиоднородных полиномиальных форм этого полинома; см. [1,2]). Поэтому в случае невыполнения условия (1.20) исходная задача решается тривиальным образом.

В случае выполнения условия (1.20) в предлагаемом в настоящей работе подходе проверяется далее выполнение условия

$$\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing. \tag{1.21}$$

Для случая, когда условие (1.21) не выполняется, в разделе 3 описывается практически реализуемый метод преобразования исходного полинома $p(x)$ к некоторому новому полиному (с меньшим числом переменных, а также членов с положительными коэффициентами), для которого условие вида (1.21) выполняется, и при этом значения величины $\alpha_*[p(x)]$, а также аналогичной величины для нового полинома равны. Таким образом, условие (1.21) также можно считать выполненным.

В случае выполнения условий (1.20),(1.21) задача (1.18) (также как и в случае выполнения предположений, использованных в работе [3]) снова имеет единственное решение $t(h) \in \mathbf{R}^m$, $\forall h \in \mathbf{R}^{n_2}$ (см. следствие 2.1). Заметим , далее, что, если величина α_* достижима, т.е. $\mathrm{Arg\,max}\, F(\mathbf{R}^m) \neq \varnothing$, то существует координатный параллелепипед $\prod \subset \mathbf{R}_+^{n_2}$, удовлетворяющий (1.19), и, если он будет определен (т.е. будут известны нижние и верхние границы этого параллелепипеда), то, как уже отмечалось, мы находимся в области применимости метода из [3] и тем самым можем вычислить значение α_* с любой желаемой точностью $\varepsilon > 0$.

Таким образом, если мы располагаем описанием следующих методов:

1) метода определения нижних и верхних границ координатного параллелепипеда $\prod \subset \mathbf{R}_+^{n_2}$, удовлетворяющего (1.19), практически реализуемого в случае выполнения некоторого условия **У**, при выполнении которого величина α_* заведомо достигается (а следовательно, в этом случае для вычисления α_* может быть применен метод из [3]) ;
2) метода редукции исходной задачи к совокупности более простых (с меньшим числом членов с отрицательными коэффициентами), в случае невыполнения условия **У**,

то в этом случае мы получаем существенное расширение области применимости метода из [3], поскольку вместо очень сильного предположения (1.15) используем предположение (1.20), которое можно считать выполненным всегда (за исключением тривиальных случаев).

Именно эти вопросы и рассматриваются в настоящей работе. При описании метода проверки выполнения упомянутого выше условия **У** используется также «свертка» вида (см., например, [18, стр. 71,105])

$$G_\gamma(t) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j f_j(t), \quad \gamma \in \Gamma_{n_2}^+ = \{\gamma \in \mathbf{R}_+^{n_2} \mid \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j = 1\}.$$

Для проверки выполнения условия **У**, требуется многократное (при различных значениях векторного параметра $\gamma \in \Gamma_{n_2}^+$) решение задачи выпуклого программирования

$$G_\gamma(t) \to \min; \ t \in \mathbf{R}^m.$$

(1.22)

Заметим, что для любого $\gamma \in \Gamma_{n_2}^+$ функция $G_\gamma(t)$ является бесконечно гладкой и выпуклой на $\mathbf{R}^m$. Кроме того, как показано в разделе 2, для любого $\gamma \in \Gamma_{n_2}^+$ справедливы следующие утверждения: $\forall t \in \mathbf{R}^m$ матрица $G''_\gamma(t)$ является положительно определенной (см., например, [21, стр. 259]); функция $G_\gamma(t)$ является сильно выпуклой на любом выпуклом ограниченном множестве из $\mathbf{R}^m$; если выполняются условия (1.20),(1.21), то $\forall t^0 \in \mathbf{R}^m$ $\{t \in \mathbf{R}^m \mid G_\gamma(t) \le G_\gamma(t^0)\}$ – выпуклый компакт. Из приведенных утверждений следует, что, в случае выполнения условий (1.20),(1.21), для любого $\gamma \in \Gamma_{n_2}^+$ справедливы также следующие утверждения: значение $\inf G_\gamma(\mathbf{R}^m)$ достигается; точка минимума функции $G_\gamma(t)$ на $\mathbf{R}^m$ является единственной; функция $G_\gamma(t)$ является одноэкстремальной. Но тогда задача (1.22) является хорошо исследованной, и для её решения могут быть применены такие эффективные методы, как метод сопряженных градиентов или метод Ньютона (см., например, [11, гл.5]).

Продолжение в разделах 2-4

Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте

В.Н. Нефедов

2. Вспомогательные сведения

Пусть $y \in \mathbf{R}_+^{n_2}$. Обозначим $g(y) = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{b_j}{y_j}$. Заметим, что функция $g(y)$ выпукла и непрерывна (более того, является аналитической) на $\mathbf{R}_+^{n_2}$. Очевидно, что $\forall t \in \mathbf{R}^m$ $F(t) = g(f(t))$. Всюду в этом разделе предполагаем, что $n_2 \geq 2$.

Пусть $t \in \mathbf{R}^m$, $1 \leq k \leq n_2$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n_2$. Обозначим

$$F_{j_1 j_2 \ldots j_k}(t) = F_{j_1 j_2 \ldots j_k}[p(x); t] = \frac{b_{j_1}}{f_{j_1}(t)} + \frac{b_{j_2}}{f_{j_2}(t)} + \ldots + \frac{b_{j_k}}{f_{j_k}(t)},$$

$$\omega_j = \omega_j[p(x)] = \inf f_j(\mathbf{R}^m), \; j = 1,2,\ldots,n_2,$$

$$\alpha^*_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \alpha^*_{j_1 j_2 \ldots j_k}[p(x)] = \sup F_{j_1 j_2 \ldots j_k}(\mathbf{R}^m),$$

$$\hat{\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \hat{\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_k}[p(x)] = \max\{\alpha^*_{j_1 j_2 \ldots j_{k-1}}, \alpha^*_{j_1 j_2 \ldots j_{k-2} j_k}, \ldots, \alpha^*_{j_2 \ldots j_k}\} \text{ (при } k > 1\text{)}.$$

Пусть $\tau \geq 0$. Обозначим $T(\tau) = \{t \in \mathbf{R}^m \mid F(t) \geq \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} + \tau\}$.

Утверждение 2.1. Пусть $\tau > 0$. Тогда

$$f[T(\tau)] \subseteq \{y \in \mathbf{R}^{n_2} \mid \omega_j \leq y_j \leq \frac{b_j}{\tau}, \; j = 1,2,\ldots,n_2\}.$$

Доказательство. Пусть $t \in T(\tau),\ y = f(t) \in f[T(\tau)]$. Покажем, что $\forall j \in \{1,2,\dots,n_2\}$

$\omega_j \le y_j \le \dfrac{b_j}{\tau}$. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $j = 1$. Из условия $t \in T(\tau)$, имеем

$F(t) = \sum_{j=1}^{n_2} \dfrac{b_j}{y_j} \ge \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} + \tau$, следовательно, используя то, что $\hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} =$

$= \max\{\alpha^*_{1,2,\dots,n_2-1}, \alpha^*_{1,2,\dots,n_2-2,n_2}, \dots, \alpha^*_{2,\dots,n_2}\} \ge \alpha^*_{2,\dots,n_2}$, получаем $\dfrac{b_1}{y_1} \ge \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} - \sum_{j=2}^{n_2} \dfrac{b_j}{y_j} + \tau \ge$

$\ge \alpha^*_{2,\dots,n_2} - \sum_{j=2}^{n_2} \dfrac{b_j}{y_j} + \tau \ge \tau$, откуда $y_1 \le \dfrac{b_1}{\tau}$. Неравенство $\omega_1 \le y_1$ следует из определения ω_1.

Утверждение 2.2. Пусть $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_{n_2-1} \le n_2$, $\hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} = \alpha^*_{j_1 j_2 \cdots j_{n_2-1}}$, $\exists t^* \in \mathbf{R}^m$:

$\alpha^*_{j_1 j_2 \cdots j_{n_2-1}} = F_{j_1 j_2 \cdots j_{n_2-1}}(t^*)$, $\{j\} = \{1,2,\dots,n_2\} \setminus \{j_1,\dots,j_{n_2-1}\}$. Тогда $\hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} \le \alpha_* - \dfrac{b_j}{f_j(t^*)} < \alpha_*$.

Доказательство. По условиям доказываемого утверждения выполняются равенства

$$F(t^*) = F_{j_1 j_2 \cdots j_{n_2-1}}(t^*) + \frac{b_j}{f_j(t^*)} = \alpha^*_{j_1 j_2 \cdots j_{n_2-1}} + \frac{b_j}{f_j(t^*)} = \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} + \frac{b_j}{f_j(t^*)},$$

откуда $\hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} = F(t^*) - \dfrac{b_j}{f_j(t^*)} \le \alpha_* - \dfrac{b_j}{f_j(t^*)} < \alpha_*$, что и требовалось доказать.

Обозначим $\Gamma_{n_2} = \{\gamma \in \mathbf{R}^{n_2} \mid \gamma_1,\dots,\gamma_{n_2} \ge 0,\ \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j = 1\}$.

Произвольная квадратная матрица A порядка m с действительными элементами называется *положительно определенной* (см., например, [21, стр. 259]), если $\forall x \in \mathbf{R}^m \setminus \{(0,\dots,0)\}$ $\langle Ax, x\rangle > 0$; при этом кратко пишем $A > 0$.

Утверждение 2.3. Пусть $\operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \ne \varnothing,\ \gamma \in \Gamma_{n_2}$. Тогда

1) $\forall t \in \mathbf{R}^m$ $G''_\gamma(t) > 0$;

2) для любого выпуклого замкнутого ограниченного множества $T \subset \mathbf{R}^m$ функция $G_\gamma(t)$ является сильно выпуклой на T.

Доказательство. В силу утверждения 3.1 из [3] (см., кроме того, замечание 2.1), $\forall j \in \{1,2,\dots,n_2\}$ функция $f_j(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\forall t \in \mathbf{R}^m$ $f_j''(t) > 0$;

б) для любого выпуклого замкнутого ограниченного множества $T \subset \mathbf{R}^m$ функция $f_j(t)$ является сильно выпуклой на T.

Из утверждений а), б) и следует справедливость доказываемых утверждений 1), 2).

Замечание 2.1. Условие $k \in \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p$ в утверждении 3.1 из [3] является излишним.

Обозначим для $t^0 \in \mathbf{R}^m,\ r > 0$ $B^{(m)}\left[t^0;r\right] = \left\{t \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \left|t - t^0\right| \le r\right\}$ - шар радиуса r с центром в точке t^0.

Утверждение 2.4. Пусть $k \in \mathbf{R}^m,\ f_0(t) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i e^{\left\langle l^i - k, t\right\rangle}$, $\operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \ne \varnothing,\ k \in \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p$, $r > 0,\ B^{(m)}\left[k;r\right] \subset \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p$. Тогда

$$\forall t \in \mathbf{R}^m \quad f_0(t) \ge \left[\min_{1 \le i \le n_1} a_i\right] e^{r|t|}.$$

(2.1)

Доказательство. Из условий утверждения 2.4 следует, что для любой точки $u \in \mathbf{R}^m$, удовлетворяющей условию $|u| = 1$, выполняется $k + ru \in \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \subset \operatorname{Co} L_p$, а следовательно, найдется вектор $\eta(u) \in \mathbf{R}^{n_1}$ такой, что $\eta_i(u) \in [0,1],\ i = 1,2,\dots,n_1$, $\sum_{i=1}^{n_1} \eta_i(u) = 1$, $\sum_{i=1}^{n_1} \eta_i(u) l^i = k + ru$. Обозначим $I = \{1,2,\dots,n_1\}$, и $\forall t \in \mathbf{R}^m \setminus \{(0,\dots,0)\}$ обозначим $u^t = |t|^{-1} t$.

Тогда $\forall t \in \mathbf{R}^m \setminus \{(0,\dots,0)\}$, используя выпуклость функции e^τ, где $\tau \in \mathbf{R}$, имеем

$$f(t) = \sum_{i \in I} a_i e^{\left\langle l^i - k, t\right\rangle} \ge [\min_{i \in I} a_i] \sum_{i \in I} e^{\left\langle l^i - k, t\right\rangle} \ge [\min_{i \in I} a_i] \sum_{i \in I} \eta_i(u^t) e^{\left\langle l^i - k, t\right\rangle} \ge$$

$$\ge [\min_{i \in I} a_i]\, e^{\sum_{i \in I} \eta_i(u^t)\left\langle l^i - k, t\right\rangle} = [\min_{i \in I} a_i]\, e^{\left\langle ru^t, t\right\rangle} = [\min_{i \in I} a_i]\, e^{r|t|},$$

т.е. неравенство (2.1) доказано (выполнение (2.1) при $|t| = 0$ очевидно).

Утверждение 2.5. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\,L_p, \mathrm{Co}\,K_p \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p \neq \varnothing,\ \gamma \in \Gamma^+_{n_2},\ k^\gamma = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j k^j$. Тогда $k^\gamma \in \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p$.

Доказательство. Предположим, что k^γ является граничной точкой многогранника $\mathrm{Co}\,L_p$. Тогда (см. [19, стр.19,46]) для точки k^γ существует собственная опорная плоскость

$H(c,\sigma) = \{x \in \mathbf{R}^m \,|\langle x,c\rangle = \sigma\}$ к многограннику $\mathrm{Co}\,L_p$, где $c \in \mathbf{R}^m,\ |c| \neq 0, \sigma \in \mathbf{R}$, т.е. для точки k^γ выполняется

$$\langle c, k^\gamma\rangle = \sigma\,;\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{Co}\,L_p \quad \langle c,x\rangle \leq \sigma\,;\ \exists \mathrm{x}^0 \in \mathrm{Co}\,L_p:\ \langle c,x^0\rangle < \sigma.$$

(2.2)

Докажем, что

$$\forall x \in \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p \quad \langle c,x\rangle < \sigma.$$

(2.3)

Предположим, что для некоторой точки $x \in \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p$ выполняется $\langle c,x\rangle = \sigma.$ Тогда из условия $x \in \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p$ следует, что $\exists \beta > 0:\ x + \beta(x - x^0) \in \mathrm{Co}\,L_p$, откуда, используя (2.2), получаем

$$\langle c,x\rangle = \langle c, x + \beta(x - x^0) + \beta(x^0 - x)\rangle = \langle c, x + \beta(x - x^0)\rangle + \beta\langle c, x^0 - x\rangle \leq$$
$$\leq \sigma + \beta[\langle c,x^0\rangle - \langle c,x\rangle] = \sigma + \beta[\langle c,x^0\rangle - \sigma] < \sigma,$$

т.е. пришли к противоречию с предположением $\langle c,x\rangle = \sigma$, а следовательно, условие (2.3) выполняется.

По условиям доказываемого утверждения $\exists k^0 \in \mathrm{Co}\,K_p:\ k^0 \in \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p$. Тогда $\exists \gamma' \in \Gamma_{n_2}$:

$k^0 = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma'_j k^j$, и справедливо (см. (2.3))

$$\langle c,k^0\rangle = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma'_j \langle c,k^j\rangle < \sigma. \tag{2.4}$$

Заметим, что $\forall j \in \{1,2,\ldots,n_2\}$, в силу $k^j \in \mathrm{Co}\,L_p$, выполняется неравенство (см. (2.2)) $\langle c,k^j\rangle \leq \sigma.$ Но тогда из (2.4) следует, что $\exists j_0 \in \{1,2,\ldots,n_2\}:\ \gamma'_{j_0} > 0,\ \langle c,k^{j_0}\rangle < \sigma,$ откуда,

используя условие $\gamma \in \Gamma^+_{n_2}$, получаем, что $\sigma = \langle c,k^\gamma\rangle = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j \langle c,k^j\rangle < \sigma.$ Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения 2.5.

Утверждение 2.6. Пусть $\gamma \in \Gamma_{n_2}$, $k^\gamma = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j k^j \in \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \neq \varnothing$, $r > 0$, $B^{(m)}[k^\gamma; r] \subseteq \operatorname{Co} L_p$.

Тогда $\forall t \in \mathbf{R}^m$ $G_\gamma(t) \geq \left[\min_{1 \leq i \leq n_1} a_i\right] e^{r|t|}$.

Доказательство утверждения 2.6 легко может быть получено как следствие утверждения 2.4, а также того, что $\forall t \in \mathbf{R}^m$ (используя выпуклость функции e^τ, где $\tau \in \mathbf{R}$) имеем

$$G_\gamma(t) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j \sum_{i=1}^{n_1} a_i e^{\langle l^i - k^j, t \rangle} = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j e^{\langle l^i - k^j, t \rangle} \geq \sum_{i=1}^{n_1} a_i e^{\sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j < l^i - k^j, t >} = \sum_{i=1}^{n_1} a_i e^{\langle l^i - k^\gamma, t \rangle}.$$

Следствием утверждений 2.3, 2.5, 2.6 является

Утверждение 2.7. Пусть $K_p \subset \operatorname{Co} L_p$, $\operatorname{Co} K_p \cap \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \neq \varnothing$, $\gamma \in \Gamma_{n_2}^+$, $G_\gamma(t) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j f_j(t)$, $t \in \mathbf{R}^m$. Тогда

1) $G_\gamma(t) \to +\infty$ при $|t| \to +\infty$;

2) $\forall t^0 \in \mathbf{R}^m$ $\left\{ t \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, G_\gamma(t) \leq G_\gamma(t^0) \right\}$ - выпуклый компакт, на котором функция $G_\gamma(t)$ является сильно выпуклой ;

3) $\operatorname{Arg\,min} G_\gamma(\mathbf{R}^m) = \left\{ t \in \mathbf{R}^m \mid G_\gamma(t) = \inf G_\gamma(\mathbf{R}^m) \right\} \neq \varnothing$ и состоит из единственной точки.

Следствие 2.1. Пусть мы находимся в условиях утверждения 2.7 и $\gamma = \gamma^0 = (1/n_2, \ldots, 1/n_2) \in \Gamma_{n_2}^+$. Тогда, в силу этого утверждения,

$$G_{\gamma^0}(t) = \frac{1}{n_2}\left[\sum_{j=1}^{n_2} f_j(t)\right] \to +\infty \text{ при } |t| \to +\infty,$$

откуда следует, что $\forall h \in \mathbf{R}^{n_2}$ выполняется

$$\Phi(t,h) = \max_{1 \leq j \leq n_2} \left\{ f_j(t) - h_j \right\} \to +\infty \text{ при } |t| \to +\infty,$$

а следовательно, $\forall h \in \mathbf{R}^{n_2}$, $\forall t^0 \in \mathbf{R}^m$ множество $\left\{ t \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \Phi(t,h) \leq \Phi(t^0,h) \right\}$ является компактом.

Кроме того, из утверждения 2.7 следует, что $\forall h \in \mathbf{R}^{n_2}$ функция $\Phi(t,h)$ является строго выпуклой на $\mathbf{R}^m$, а следовательно, $\forall h \in \mathbf{R}^{n_2}$ задача (1.18) имеет и притом единственное решение.

Утверждение 2.8. Пусть $\hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} < \alpha_* < +\infty$. Тогда $\exists y^* \in \overline{Y} \bigcap \mathbf{R}_+^{n_2}$: $g(y^*) = \alpha_*$.

Доказательство. Пусть $d = \alpha_* - \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} > 0$. Тогда, в силу утверждения 2.1, выполняется

$$f[T(d/2)] \subseteq \Pi_d = \{y \in \mathbf{R}^{n_2} \mid \omega_j \leq y_j \leq \frac{2b_j}{d},\ j = 1,2,\ldots,n_2\}. \quad (2.5)$$

Пусть $t(n) \in \mathbf{R}^m$, $n = 1,2,\ldots$; $F(t(n)) \to \alpha_*$ при $n \to \infty$. Тогда для некоторого $n_0 \geq 1$ справедливо

$$F(t(n)) \geq \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} + d/2,\ \ n = n_0, n_0 + 1, \ldots\ ,$$

т.е. $t(n) \in T(d/2),\ n = n_0, n_0 + 1, \ldots,$ откуда, в силу (2.5),

$$f(t(n)) \in \Pi_d,\ \ n = n_0, n_0 + 1, \ldots. \quad (2.6)$$

Из (2.5),(2.6) получаем, что последовательность $\{f(t(n))\}$ является ограниченной, а следовательно, у нее существует предельная точка $y^* \in \Pi_d$. Чтобы не переходить к подпоследовательности, для простоты обозначений считаем, что

$$f(t(n)) \to y^* \text{ при } n \to \infty. \quad (2.7)$$

Заметим, что $y^* \in \mathbf{R}_+^{n_2}$, так как в противном случае $F(t(n)) \to +\infty$ при $n \to \infty$, откуда $\alpha_* = +\infty$, а это противоречит предположению $\alpha_* < +\infty$. Кроме того, в силу (2.7), $y^* \in \overline{Y}$. Далее, в силу непрерывности функции $g(y)$ на $\mathbf{R}_+^{n_2}$, получаем

$$g(y^*) = \lim_{n\to\infty} g(f(t(n))) = \lim_{n\to\infty} F(t(n)) = \alpha_*.$$

Замечание 2.2. Нетрудно видеть, что для выполнения условия $\alpha_* < +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие неравенства: $\omega_j > 0,\ j = 1,2,\ldots,n_2$. В разделе 3 (см. утверждение 3.7) доказано, что $\forall j \in \{1,2,\ldots,n_2\}$ выполняется $\omega_j > 0 \Leftrightarrow k^j \in \mathrm{Co}\, L_p$. Поэтому для выполнения условия $\alpha_* < +\infty$ достаточно, чтобы $K \subset \mathrm{Co}\, L_p$.

Утверждение 2.9. Пусть $\exists y^* \in \overline{Y} \bigcap \mathbf{R}_+^{n_2}$: $g(y^*) = \alpha_*$. Тогда $\exists \gamma \in \Gamma_{n_2}^+$, что для функции $G_\gamma(t)$ выполняется

$$\inf G_\gamma(\mathbf{R}^m) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j y_j^*. \quad (2.8)$$

Если, кроме того, $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, то $\exists t^* \in \mathbf{R}^m$:

1) $\{t^*\} = \mathrm{Arg}\min G_\gamma(\mathbf{R}^m)$;

2) $f(t^*) = y^*$, $F(t^*) = g(f(t^*)) = g(y^*) = \alpha_*$.

Доказательство. Рассмотрим линейную функцию $l(y) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j y_j - \eta$, где (используем то, что $y^* \in \mathbf{R}_+^{n_2}$)

$$\gamma_i = b_i w_i^{-1} \left[\sum_{j=1}^{n_2} b_j w_j^{-1} \right]^{-1}, w_i = \left(y_i^*\right)^2, i = 1,2,...,n_2, \ \eta = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j y_j^*, \ \gamma \in \Gamma_{n_2}^+.$$

В силу выпуклости функции $g(y)$ на $\mathbf{R}_+^{n_2}$, выполняется (см. [11, стр.170])

$$\forall y \in \mathbf{R}_+^{n_2} \quad g(y) \geq g(y^*) + \langle g'(y^*), y - y^* \rangle.$$

(2.9)

Используя (2.9), а также то, что

$$g'(y^*) = \begin{bmatrix} -b_1/w_1 \\ ... \\ -b_{n_2}/w_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

докажем, что

$$\forall y \in \mathbf{R}_+^{n_2} \quad [g(y) \leq \alpha_* \Rightarrow l(y) \geq 0].$$

(2.11)

Действительно, пусть для некоторого $y \in \mathbf{R}_+^{n_2}$ выполняется $g(y) \leq \alpha_*$. Тогда, используя равенство $g(y^*) = \alpha_*$, а также (2.9), получаем $\langle g'(y^*), y - y^* \rangle \leq g(y) - g(y^*) \leq 0$, откуда $\langle -g'(y^*), y \rangle - \langle -g'(y^*), y^* \rangle \geq 0$, а следовательно,

$\left[\sum_{j=1}^{n_2} b_j w_j^{-1} \right]^{-1} \langle -g'(y^*), y \rangle - \left[\sum_{j=1}^{n_2} b_j w_j^{-1} \right]^{-1} \langle -g'(y^*), y^* \rangle \geq 0$, что, в силу (2.10), и доказывает справедливость неравенства $l(y) \geq 0$.

Заметим теперь, что

$$\forall t \in \mathbf{R}^m \quad g(f(t)) = F(t) \leq \alpha_*,$$

откуда, используя (2.11), имеем

$$\forall t \in \mathbf{R}^m \quad G_\gamma(t) - \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j y_j^* = G_\gamma(t) - \eta = l(f(t)) \geq 0.$$

С другой стороны, в силу того, что $y^* \in \bar{Y}$, $\exists t(n) \in \mathbf{R}^m$ $(n = 1,2,\ldots)$: $f(t(n)) \to y^*$ при $n \to \infty$. Но тогда

$$G_\gamma(t(n)) = l(f(t(n))) + \eta \to l(y^*) + \eta = \eta = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j y_j^* \text{ при } n \to \infty,$$

откуда и следует справедливость (2.8).

Докажем теперь вторую часть утверждения 2.9. Пусть $K_p \subset \operatorname{Co} L_p$, $\operatorname{Co} K_p \cap \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \neq \varnothing$.

Тогда, в силу утверждения 2.7, $\exists t^* \in \mathbf{R}^m$: $\{t^*\} = \operatorname{Arg\,min} G_\gamma(\mathbf{R}^m)$. Покажем, что $f(t^*) = y^*$. Из утверждения 2.7 следует, что рассмотренная выше последовательность $\{t(n)\}$ является ограниченной, а следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем для простоты обозначений считать, что вся последовательность $\{t(n)\}$ сходится к

некоторой точке $t^0 \in \mathbf{R}^m$. Тогда $f(t^0) = y^*$, $G_\gamma(t^0) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j y_j^* = \inf G_\gamma(\mathbf{R}^m)$, откуда $t^0 = t^*$,

$f(t^*) = f(t^0) = y^*$.

Из утверждений 2.8,2.9 , а также замечания 2.2 получаем, что справедливо

Следствие 2.2. Если $\hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} < \alpha_*$, $K_p \subset \operatorname{Co} L_p$, $\operatorname{Co} K_p \cap \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \neq \varnothing$, то $\exists \gamma^* \in \Gamma_{n_2}^+$, $t^* \in \mathbf{R}^m$: $\{t^*\} = \operatorname{Arg\,min} G_{\gamma^*}(\mathbf{R}^m)$, $F(t^*) = g(f(t^*)) = \alpha_*$.

Нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $\beta \in \mathbf{R}_+^{n_2}$. Обозначим

$$\Gamma_{n_2}^\beta = \{\gamma \in \Gamma_{n_2} \mid \gamma_j \geq \beta_j,\ j = 1,2,\ldots,n_2\}.$$

Обозначим, далее,

$$\forall \gamma \in \Gamma_{n_2} \quad h(\gamma) = \inf G_\gamma(\mathbf{R}^m); \quad M = \inf_{t \in \mathrm{R}^m} \sum_{j=1}^{n_2} f_j(t).$$

Очевидно, что

$$\forall \gamma \in \Gamma_{n_2} \quad h(\gamma) \leq M. \tag{2.12}$$

В случае выполнения условий: $\gamma \in \Gamma_{n_2}^+$, $K_p \subset \operatorname{Co} L_p$, $\operatorname{Co} K_p \cap \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \neq \varnothing$, обозначим через $t^*(\gamma)$ точку из $\mathbf{R}^m$ такую, что (см. утверждение 2.7)

$$\{t^*(\gamma)\} = \operatorname{Arg\,min} G_\gamma(\mathbf{R}^m).$$

Утверждение 2.10. Пусть $K_p \subset \operatorname{Co} L_p$, $\operatorname{Co} K_p \cap \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \neq \varnothing$, $\beta \in \mathbf{R}_+^{n_2}$. Тогда

$$\forall \gamma \in \Gamma_{n_2}^{\beta} \quad f_j(t^*(\gamma)) \le M[\beta_j]^{-1},\ j = 1,2,...,n_2.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma_{n_2}^{\beta}$. В силу (2.12), имеем

$$M \ge h(\gamma) = G_\gamma(t^*(\gamma)) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j f_j(t^*(\gamma)) \ge \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j f_j(t^*(\gamma)),$$

откуда и следует справедливость доказываемого утверждения.

Утверждение 2.11. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$, $\beta \in \mathbf{R}_+^{n_2}$. Тогда

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{\beta} \quad |h(\gamma) - h(\gamma')| \le M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{|\gamma_j - \gamma'_j|}{\beta_j}.$$

Доказательство. Пусть $\gamma, \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{\beta}$. Тогда

$$h(\gamma') = G_{\gamma'}(t^*(\gamma')) \le G_{\gamma'}(t^*(\gamma)) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma'_j f_j(t^*(\gamma)) = h(\gamma) + \sum_{j=1}^{n_2} (\gamma'_j - \gamma_j) f_j(t^*(\gamma)),$$

откуда, используя утверждение 2.10, получаем

$$h(\gamma') - h(\gamma) \le M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{|\gamma_j - \gamma'_j|}{\beta_j}. \tag{2.13}$$

Меняя в (2.13) γ, γ' местами, имеем

$$h(\gamma) - h(\gamma') \le M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{|\gamma_j - \gamma'_j|}{\beta_j}. \tag{2.14}$$

Из (2.13),(2.14) и получаем справедливость утверждения 2.11.

Замечание 2.3. Из утверждения 2.11 следует, что в случае $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$ функция $h(\gamma)$ является непрерывной на $\Gamma_{n_2}^{+}$. Нетрудно показать, что в указанном случае функция $h(\gamma)$ является также вогнутой на $\Gamma_{n_2}^{+}$.

Утверждение 2.12. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$, $\beta \in \mathbf{R}_+^{n_2}$. Тогда

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{\beta} \quad |G_\gamma(t^*(\gamma')) - G_\gamma(t^*(\gamma))| \le 2M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{|\gamma_j - \gamma'_j|}{\beta_j}.$$

Доказательство. Пусть $\gamma, \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{\beta}$. Тогда, используя утверждения 2.10,11, получаем

$$G_\gamma(t^*(\gamma')) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j f_j(t^*(\gamma')) = h(\gamma') + \sum_{j=1}^{n_2} (\gamma_j - \gamma'_j) f_j(t^*(\gamma')) \le$$

$$\le h(\gamma') + M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{|\gamma_j - \gamma'_j|}{\beta_j} \le h(\gamma) + 2M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{|\gamma_j - \gamma'_j|}{\beta_j} = G_\gamma(t^*(\gamma)) + 2M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{|\gamma_j - \gamma'_j|}{\beta_j},$$

откуда, в силу $G_\gamma(t^*(\gamma)) \le G_\gamma(t^*(\gamma'))$, и следует справедливость доказываемого утверждения.

Обозначим $\forall t^1, t^2 \in \mathbf{R}^m$ $[t^1, t^2] = \{t^1 + \alpha(t^2 - t^1) \mid \alpha \in [0,1]\}$ - прямоугольный отрезок, соединяющий точки t^1, t^2.

Утверждение 2.13. Пусть $K_p \subset \operatorname{Co} L_p$, $\operatorname{Co} K_p \cap \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \ne \varnothing$, $\gamma \in \Gamma^+_{n_2}$. Тогда $\forall t \in \mathbf{R}^m$ найдется точка $\xi \in [t^*(\gamma), t]$ такая, что

$$\min_{|u|=1} \left\langle G''_\gamma(\xi)u, u \right\rangle \left| t - t^*(\gamma) \right|^2 \le \left\langle G''_\gamma(\xi)[t - t^*(\gamma)], t - t^*(\gamma) \right\rangle \le 2[G_\gamma(t) - G_\gamma(t^*(\gamma))].$$

(2.15)

Доказательство. Пусть $t \in \mathbf{R}^m$. В силу бесконечной гладкости функции $G_\gamma(t)$, согласно формуле Тейлора для функций многих переменных, $\exists \xi \in [t^*(\gamma), t]$:

$$G_\gamma(t) = G_\gamma(t^*(\gamma)) + \left\langle G'_\gamma(t^*(\gamma)), t - t^*(\gamma) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle G''_\gamma(\xi)[t - t^*(\gamma)], t - t^*(\gamma) \right\rangle,$$

откуда, используя то, что $G'_\gamma(t^*(\gamma)) = 0,$ и получаем справедливость правого из неравенств (2.15). Левое неравенство в (2.15) очевидно.

Замечание 2.4. Для произвольной симметричной квадратной матрицы *A* порядка m

величина $\min\limits_{|u|=1} \langle Au, u \rangle = \min \{ \langle Au, u \rangle \mid u \in \mathbf{R}^m, \ |u| = 1 \}$, очевидно, совпадает с минимальным собственным числом матрицы *A*.

Обозначим для произвольной прямоугольной матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n | a_{ij} |^2 \right)^{1/2}$$

- евклидова норма матрицы *A* (см., например, [20, стр. 270]). Евклидова норма матрицы удовлетворяет следующему свойству (см. [20, стр. 271])

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad | Ax | \le \|A\|_E \, | x | .$$

(2.16)

Утверждение 2.14. Пусть $K_p \subset \operatorname{Co} L_p$, $\operatorname{Co} K_p \cap \operatorname{int} \operatorname{Co} L_p \ne \varnothing$, $\gamma \in \Gamma^+_{n_2}$. Тогда $\forall t \in \mathbf{R}^m$

$$\min_{|u|=1} \left\langle G''_\gamma(t)u, u \right\rangle \ge \min_{|u|=1} \left\langle G''_\gamma(t^*(\gamma))u, u \right\rangle - \left\| G''_\gamma(t) - G''_\gamma(t^*(\gamma)) \right\|_E .$$

(2.17)

Доказательство. Пусть $t \in \mathbf{R}^m$. Тогда, используя неравенство Коши-Буняковского (см., например [20, стр. 90]), а также неравенство (2.16), имеем

$$\min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t)u,u\right\rangle = \min_{|u|=1}\left\langle\left\{G''_\gamma(t^*(\gamma))+[G''_\gamma(t)-G''_\gamma(t^*(\gamma))]\right\}u,u\right\rangle \geq$$

$$\geq \min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t^*(\gamma))u,u\right\rangle - \max_{|u|=1}\left|\left\langle[G''_\gamma(t)-G''_\gamma(t^*(\gamma))]u,u\right\rangle\right| \geq$$

$$\geq \min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t^*(\gamma))u,u\right\rangle - \max_{|u|=1}\left\{\left|\,[G''_\gamma(t)-G''_\gamma(t^*(\gamma))]\,u\,\right|\cdot|u|\right\} =$$

$$= \min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t^*(\gamma))u,u\right\rangle - \max_{|u|=1}\left\{\left|\,[G''_\gamma(t)-G''_\gamma(t^*(\gamma))]\,u\,\right|\right\} \geq$$

$$= \min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t^*(\gamma))u,u\right\rangle - \max_{|u|=1}\left\{\left\|G''_\gamma(t)-G''_\gamma(t^*(\gamma))\right\|_E |u|\right\} =$$

$$= \min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t^*(\gamma))u,u\right\rangle - \left\|G''_\gamma(t)-G''_\gamma(t^*(\gamma))\right\|_E .$$

Утверждение 2.15. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, $\gamma \in \Gamma^+_{n_2}$. Тогда $\exists \nu > 0$:

$$\forall t \in B^{(m)}[t^*(\gamma);\nu] \quad \min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t)u,u\right\rangle \geq \frac{1}{2}\min_{|u|=1}\left\langle G''_\gamma(t^*(\gamma))u,u\right\rangle > 0.$$

Справедливость утверждения 2.15 следует из утверждения 2.14, из бесконечной гладкости функции $G_\gamma(t)$, а также, в силу того, что $G''_\gamma(t^*(\gamma)) > 0$ (см. утверждение 2.3).

Утверждение 2.16. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, $\gamma \in \Gamma^+_{n_2}$, $\nu > 0$,

$$\varepsilon(\nu) = \min\left\{G_\gamma(t) \,\middle|\, t \in \mathbf{R}^m,\ |t - t^*(\gamma)| = \nu\right\} - G_\gamma(t^*(\gamma)).$$

Тогда

1) $\varepsilon(\nu) > 0$;

2) $\forall t \in \mathbf{R}^m \quad G_\gamma(t) \leq G_\gamma(t^*(\gamma)) + \varepsilon(\nu) \Rightarrow |t - t^*(\gamma)| \leq \nu$;

3) $\varepsilon(\nu) \to 0$ при $\nu \to 0$.

Доказательство. Используя утверждение 2.7, получаем, что $\forall\, t \neq t^*(\gamma) \quad G_\gamma(t) > G_\gamma(t^*(\gamma))$, откуда $\varepsilon(\nu) > 0$. Третье из доказываемых утверждений следует из непрерывности функции $G_\gamma(t)$. Покажем справедливость второго утверждения. Пусть $t \in \mathbf{R}^m$, $G_\gamma(t) \leq G_\gamma(t^*(\gamma)) + \varepsilon(\nu)$. Покажем, что $|t - t^*(\gamma)| \leq \nu$. Предположим, что $|t - t^*(\gamma)| > \nu$. Положим $\alpha = \nu|t - t^*(\gamma)|^{-1}$, $\xi = t^*(\gamma) + \alpha[t - t^*(\gamma)] = \alpha t + (1-\alpha)t^*(\gamma)$. Тогда $\alpha \in (0,1)$, $|\xi - t^*(\gamma)| = \nu$, и, в силу выпуклости функции $G_\gamma(t)$, имеем

$$G_\gamma(\xi) \leq \alpha G_\gamma(t) + (1-\alpha)G_\gamma(t^*(\gamma)) = G_\gamma(t^*(\gamma)) + \alpha[G_\gamma(t) - G_\gamma(t^*(\gamma))] \leq$$

$$\leq G_\gamma(t^*(\gamma)) + \alpha\varepsilon(\nu)) < G_\gamma(t^*(\gamma)) + \varepsilon(\nu),$$

а это противоречит определению $\varepsilon(\nu)$.

Утверждение 2.17. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, $\gamma \in \Gamma_{n_2}^{+}$, $\lambda_{\min}^{*} = \min\limits_{|u|=1} \langle G_{\gamma}''(t^{*}(\gamma))u, u\rangle$. Тогда $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{+}$ в случае $|\gamma - \gamma'| \le \delta$ выполняется неравенство

$$\left| t^{*}(\gamma') - t^{*}(\gamma) \right| \le \left(\frac{16M}{\lambda_{\min}^{*}} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\left|\gamma_j - \gamma_j'\right|}{\gamma_j} \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $\delta_1 = \min\{\gamma_1/2, ..., \gamma_{n_2}/2\} > 0.$ Тогда

$$\forall \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{+} \quad \left|\gamma - \gamma'\right| = [(\gamma_1 - \gamma_1')^2 + ... + (\gamma_{n_2} - \gamma_{n_2}')^2]^{1/2} \le \delta_1 \Rightarrow \gamma_j' \ge \gamma_j / 2,\ j = 1,2,...,n_2. \qquad (2.18)$$

Из (2.18), используя утверждение 2.12, получаем, что

$$\forall \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{+} \quad \left|\gamma - \gamma'\right| \le \delta_1 \Rightarrow \left| G_{\gamma}(t^{*}(\gamma')) - G_{\gamma}(t^{*}(\gamma)) \right| \le 4M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\left|\gamma_j - \gamma_j'\right|}{\gamma_j}. \qquad (2.19)$$

Пусть $\nu > 0$ - число такое, что

$$\forall t \in B^{(m)}[t^{*}(\gamma); \nu] \quad \min_{|u|=1} \langle G_{\gamma}''(t)u, u\rangle \ge \frac{1}{2}\lambda_{\min}^{*}$$

(2.20)

(число ν найдется в силу утверждения 2.15). Пусть

$$\varepsilon(\nu) = \min\left\{ G_{\gamma}(t) \,\middle|\, t \in \mathbf{R}^m, \left|t - t^{*}(\gamma)\right| = \nu \right\} - G_{\gamma}(t^{*}(\gamma)).$$

Тогда (см. утверждение 2.16) $\varepsilon(\nu) > 0$ и

$$\forall t \in \mathbf{R}^m \quad G_{\gamma}(t) \le G_{\gamma}(t^{*}(\gamma)) + \varepsilon(\nu) \Rightarrow \left|t - t^{*}(\gamma)\right| \le \nu.$$

(2.21)

Пусть $\delta \in (0, \delta_1]$:

$$\forall \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{+} \quad \left|\gamma - \gamma'\right| \le \delta \Rightarrow 4M \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\left|\gamma_j - \gamma_j'\right|}{\gamma_j} \le \varepsilon(\nu).$$

Тогда, в силу (2.19),(2.21),

$$\forall \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{+} \quad \left|\gamma - \gamma'\right| \le \delta \Rightarrow \left| t^{*}(\gamma') - t^{*}(\gamma) \right| \le \nu,$$

откуда, в силу (2.20), а также утверждения 2.13, выполняется

$$\forall \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{+} \quad \left|\gamma - \gamma'\right| \le \delta \Rightarrow \left| t^{*}(\gamma') - t^{*}(\gamma) \right|^2 \le \frac{4}{\lambda_{\min}^{*}} [G_{\gamma}(t^{*}(\gamma')) - G_{\gamma}(t^{*}(\gamma))],$$

а следовательно, в силу (2.19), имеем

$$\forall \gamma' \in \Gamma_{n_2}^{+} \quad \left|\gamma - \gamma'\right| \le \delta \Rightarrow \left| t^{*}(\gamma') - t^{*}(\gamma) \right| \le \left(\frac{16M}{\lambda_{\min}^{*}} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\left|\gamma_j - \gamma_j'\right|}{\gamma_j} \right)^{1/2}.$$

Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$. Обозначим $\forall \gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \quad r_{n_2}(\gamma) = g(f(t^*(\gamma))) =$ $= F(t^*(\gamma))$ (см. утверждение 2.7).

Утверждение 2.18. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, $\gamma^* \in \Gamma_{n_2}^+$, $r_{n_2}(\gamma^*) = g(f(t^*(\gamma^*))) = \alpha_*$. Тогда $\exists \delta > 0, C > 0$ такие, что

$$\forall \gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \quad \left|\gamma - \gamma^*\right| \le \delta \Rightarrow r_{n_2}(\gamma) \ge \alpha_* - C\left|\gamma - \gamma^*\right|^{1/2}.$$

Доказательство. Используя утверждение 2.17, получаем, что $\exists \delta > 0, C_1 > 0$:

$$\forall \gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \quad |\gamma - \gamma^*| \le \delta \Rightarrow \left|t^*(\gamma) - t^*(\gamma^*)\right| \le C_1 \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left|\gamma_j - \gamma_j^*\right| \right)^{1/2} \le C_1 \sqrt{n_2} \left|\gamma - \gamma^*\right|^{1/2} \qquad (2.22)$$

(здесь мы воспользовались очевидными неравенствами $\left|\gamma_j - \gamma_j^*\right| \le \left|\gamma - \gamma^*\right|,\ j = 1,2,\ldots,n_2$). В силу бесконечной гладкости функции $g(f(t))$ на $\mathbf{R}^m$, она удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L > 0$ на $B^{(m)}[t^*(\gamma^*);\delta_1]$, где $\delta_1 = C_1\sqrt{n_2 \delta}$, т.е.

$$\forall t, t' \in B^{(m)}[t^*(\gamma^*);\delta_1] \quad \left|g(f(t')) - g(f(t))\right| \le L\left|t - t'\right|.$$

(2.23)

Из (2.22),(2.23) заключаем, что $\forall \gamma \in \Gamma_{n_2}^+$

$$\left|\gamma - \gamma^*\right| \le \delta \Rightarrow \alpha_* - r_{n_2}(\gamma) = g(f(t^*(\gamma^*))) - g(f(t^*(\gamma))) \le L\left|t^*(\gamma^*) - t^*(\gamma)\right| \le LC_1\sqrt{n_2}\left|\gamma - \gamma^*\right|^{1/2},$$

откуда и следует справедливость доказываемого утверждения при $C = LC_1\sqrt{n_2}$.

Утверждение 2.19. Пусть $\hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} < \alpha_*$, $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$. Тогда

1) $\exists \gamma^* \in \Gamma_{n_2}^+ :\ r_{n_2}(\gamma^*) = g(f(t^*(\gamma^*))) = \alpha_*$;

2) $\exists \mu > 0 :\ \left\{\gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \,\middle|\, r_{n_2}(\gamma) > \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}\right\} \supseteq \left\{\gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \,\middle|\, \left|\gamma - \gamma^*\right| < \mu\right\}$.

Доказательство. Первое утверждение справедливо в силу следствия 2.2. Докажем второе утверждение. Воспользовавшись утверждением 2.18, получаем, что $\exists \delta > 0, C > 0$: $\forall \gamma \in \Gamma_{n_2}^+$ $\left|\gamma - \gamma^*\right| \le \delta \Rightarrow r_{n_2}(\gamma) \ge \alpha_* - C\left|\gamma - \gamma^*\right|^{1/2}$. Но тогда

$$\left\{\gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \,\middle|\, r_{n_2}(\gamma) > \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}\right\} \supseteq \left\{\gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \,\middle|\, \left|\gamma - \gamma^*\right| \le \delta, r_{n_2}(\gamma) > \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}\right\} \supseteq$$

$$\supseteq \left\{\gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \,\middle|\, \left|\gamma - \gamma^*\right| \le \delta, \alpha_* - C\left|\gamma - \gamma^*\right|^{1/2} > \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}\right\} =$$

$$= \left\{\gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \,\middle|\, \left|\gamma - \gamma^*\right| \le \delta, \left|\gamma - \gamma^*\right| < C^{-2}\left(\alpha_* - \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}\right)^2\right\} \supseteq \left\{\gamma \in \Gamma_{n_2}^+ \,\middle|\, \left|\gamma - \gamma^*\right| < \mu\right\},$$

где $\mu = \min\{\delta, \delta_1\}, \delta_1 = C^{-2}\left(\alpha_* - \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}\right)^2$.

Для дальнейшего понадобится биективная функция $\Psi:(0,1)^{n_2-1}\to\Gamma^+_{n_2}$. Сначала определим это отображение для $n_2=2$ и для $n_2=3$. Для $n_2=2$ положим $\Psi(\rho_1)=(\rho_1,1-\rho_1)$, где $\rho_1\in(0,1)$.

Для $n_2=3$ положим $\Psi(\rho_1,\rho_2)=(\rho_1,\rho_2(1-\rho_1),(1-\rho_1)(1-\rho_2))$, где $\rho_1,\rho_2\in(0,1)$.

Зададим теперь отображение $\Psi:(0,1)^{n_2-1}\to\Gamma^+_{n_2}$ в общем случае. Пусть

$\Psi(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})=(\Psi_1(\rho_1,...,\rho_{n_2-1}),...,\Psi_{n_2}(\rho_1,...,\rho_{n_2-1}))$, $\Psi_1(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})=\rho_1$,

$\Psi_2(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})=\rho_2(1-\rho_1)$, $\Psi_3(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})=\rho_3(1-\rho_1)(1-\rho_2)$, ...,

$\Psi_{n_2-1}(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})=\rho_{n_2-1}(1-\rho_1)(1-\rho_2)\cdots(1-\rho_{n_2-2})$,

$\Psi_{n_2}(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})=(1-\rho_1)(1-\rho_2)\cdots(1-\rho_{n_2-1})$.

Справедливо следующее очевидное равенство $(0,1)^{n_2-1}$

$\Psi_{n_2}(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})=1-\Psi_1(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})-...-\Psi_{n_2-1}(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})$,

где $\rho\in(0,1)^{n_2-1}$, а следовательно, $\forall\rho\in(0,1)^{n_2-1}\quad \Psi_{n_2}(\rho_1,...,\rho_{n_2-1})\in\Gamma^+_{n_2}$.

Указанное отображение, очевидно, является биективным и непрерывным. Обратным к нему является отображение

$$\Phi:\Gamma^+_{n_2}\to(0,1)^{n_2-1}, \tag{2.24}$$

где

$\Phi(\gamma_1,...,\gamma_{n_2})=(\Phi_1(\gamma_1,...,\gamma_{n_2}),...,\Phi_{n_2-1}(\gamma_1,...,\gamma_{n_2}))$, $\Phi_1(\gamma_1,...,\gamma_{n_2})=\gamma_1$,

(2.25) $\Phi_2(\gamma_1,...,\gamma_{n_2})=\dfrac{\gamma_2}{1-\gamma_1}$, $\Phi_3(\gamma_1,...,\gamma_{n_2})=\dfrac{\gamma_3}{1-\gamma_1-\gamma_2}$, ...,

$$\Phi_{n_2-1}(\gamma_1,...,\gamma_{n_2})=\frac{\gamma_{n_2-1}}{1-\gamma_1-...-\gamma_{n_2-2}}.$$

Отображение (2.24),(2.25) также является биективным и непрерывным. При этом , очевидно, выполняются следующие тождества:

$\forall\rho\in(0,1)^{n_2-1}\quad \Phi(\Psi(\rho))=\rho$; $\forall\gamma\in\Gamma^+_{n_2}\quad \Psi(\Phi(\gamma))=\gamma$.

(2.26)

Пусть $K_p\subset \mathrm{Co}\,L_p$, $\mathrm{Co}\,K_p\cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p\neq\varnothing$. Обозначим $\forall\rho\in(0,1)^{n_2-1}\ s_{n_2}(\rho)=r_{n_2}(\Psi(\rho))$.

Поскольку функция $r_{n_2}(\gamma)$ определена на $\Gamma^+_{n_2}$, то, в силу биективности отображения $\Psi:(0,1)^{n_2-1}\to\Gamma^+_{n_2}$, функция $s_{n_2}(\rho)$ определена на $(0,1)^{n_2-1}$.

. **Утверждение 2.20.** Пусть $\hat{\alpha}_{1,2,...,n_2}<\alpha_*$, $K_p\subset \mathrm{Co}\,L_p$, $\mathrm{Co}\,K_p\cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p\neq\varnothing$. Тогда

1) $\Gamma^*_{n_2} = \{\gamma \in \Gamma^+_{n_2} \mid r_{n_2}(\gamma^*) = \alpha_*\} \neq \varnothing$;

2) $\forall \rho^* \in \Phi(\Gamma^*_{n_2}) \quad s_{n_2}(\rho^*) = \alpha_*$;

3) $\forall \rho^* \in \Phi(\Gamma^*_{n_2})\ \exists \mu_0 > 0:\ \left\{\rho \in (0,1)^{n_2-1} \middle| \ s_{n_2}(\rho) > \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}\right\} \supseteq \left\{\rho \in (0,1)^{n_2-1} \middle| \left|\rho - \rho^*\right| < \mu_0\right\}$.

Доказательство. Первое утверждение справедливо в силу следствия 2.2. Для доказательства второго утверждения заметим, что, в силу (2.26), $\forall \gamma^* \in \Gamma^*_{n_2}$ для $\rho^* = \Phi(\gamma^*)$ выполняется $s_{n_2}(\rho^*) = s_{n_2}(\Phi(\gamma^*)) = r_{n_2}(\Psi(\Phi(\gamma^*))) = r_{n_2}(\gamma^*) = \alpha_*$.

Докажем справедливость третьего утверждения. Пусть $\gamma^* \in \Gamma^*_{n_2}$, $\rho^* = \Phi(\gamma^*)$. Используя (2.26), а также утверждение 2.19, получаем, что для некоторого $\mu > 0$ выполняется

$$\left\{\rho \in (0,1)^{n_2-1} \middle| s_{n_2}(\rho) > \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}\right\} = \left\{\Phi(\gamma) \middle| \gamma \in \Gamma^+_{n_2}, s_{n_2}(\Phi(\gamma)) > \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}\right\} =$$

$$= \Phi\left[\left\{\gamma \in \Gamma^+_{n_2} \middle| s_{n_2}(\Phi(\gamma)) > \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}\right\}\right] = \Phi\left[\left\{\gamma \in \Gamma^+_{n_2} \middle| r_{n_2}(\Psi(\Phi(\gamma))) > \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}\right\}\right] =$$

$$= \Phi\left[\left\{\gamma \in \Gamma^+_{n_2} \mid r_{n_2}(\gamma) > \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}\right\}\right] \supseteq \Phi\left[\left\{\gamma \in \Gamma^+_{n_2} \middle| \left\|\gamma - \gamma^*\right\| < \mu\right\}\right] =$$

$$= \left\{\Phi(\gamma) \middle| \gamma \in \Gamma^+_{n_2}, \left\|\gamma - \gamma^*\right\| < \mu\right\} = \left\{\rho \in (0,1)^{n_2-1} \middle| \rho = \Phi(\gamma), \left\|\gamma - \gamma^*\right\| < \mu\right\} =$$

$$= \left\{ \rho \in (0,1)^{n_2-1} \;\middle|\; \left\| \Phi^{-1}(\rho) - \Phi^{-1}(\rho^*) \right\| < \mu \right\} = \left\{ \rho \in (0,1)^{n_2-1} \;\middle|\; \left\| \Psi(\rho) - \Psi(\rho^*) \right\| < \mu \right\},$$

откуда, в силу непрерывности отображения $\Psi : (0,1)^{n_2-1} \to \Gamma^+_{n_2}$, и следует справедливость доказываемого утверждения.

Утверждение 2.21. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$. Тогда функция $r_{n_2}(\gamma)$ является непрерывной на $\Gamma^+_{n_2}$, а функция $s_{n_2}(\rho)$ является непрерывной на $(0,1)^{n_2-1}$.

Доказательство. Пусть γ^0 - произвольная точка из $\Gamma^+_{n_2}$. Покажем непрерывность функции $r_{n_2}(\gamma)$ в точке γ^0. В силу утверждения 2.17, $\exists \delta > 0, C > 0$ такие, что

$$\forall \gamma \in \Gamma^+_{n_2} \quad |\gamma - \gamma^0| \le \delta \Rightarrow |t^*(\gamma) - t^*(\gamma^0)| \le C|\gamma - \gamma^0|^{1/2} \tag{2.27}$$

(см. аналогичное рассуждение в доказательстве утверждения 2.18). В силу бесконечной гладкости функции $g(f(t))$ на $\mathbf{R}^m$, она удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L > 0$ на $B^{(m)}[t^*(\gamma^0); \delta_1]$, где $\delta_1 = C\sqrt{\delta}$, т.е.

$$\forall t, t' \in B^{(m)}[t^0(\gamma^*); \delta_1] \quad |g(f(t')) - g(f(t))| \le L|t - t'|.$$

(2.28)

Из (2.27),(2.28) заключаем, что

$$\forall \gamma \in \Gamma^+_{n_2} \quad |\gamma - \gamma^0| \le \delta \Rightarrow |g(f(t^*(\gamma))) - g(f(t^*(\gamma^0)))| \le L|t^*(\gamma) - t^*(\gamma^0)| \le LC|\gamma - \gamma^0|^{1/2},$$

откуда и следует непрерывность функции $r_{n_2}(\gamma) = g(f(t^*(\gamma)))$ в точке γ^0.

Непрерывность функции $s_{n_2}(\rho)$ на $(0,1)^{n_2-1}$ следует из непрерывности функции $r_{n_2}(\gamma)$ на $\Gamma^+_{n_2}$, непрерывности отображения $\Psi : (0,1)^{n_2-1} \to \Gamma^+_{n_2}$ и соотношения $s_{n_2}(\rho) = r_{n_2}(\Psi(\rho))$.

Утверждение 2.22. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, $t^0 \in \mathbf{R}^m$. Тогда $\exists \gamma^0 \in \Gamma^+_{n_2}$: $F(t^*(\gamma^0)) \ge F(t^0)$.

Доказательство. Рассмотрим линейную функцию

$$l_0(y) = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma^0_j y_j - \eta_0,$$

где

$$\gamma^0_i = b_i w_i^{-1} \left[\sum_{j=1}^{n_2} b_j w_j^{-1} \right]^{-1}, w_i = (y^0_i)^2, i = 1,2,\ldots,n_2,\ y^0 = f(t^0),\ \eta_0 = \sum_{j=1}^{n_2} \gamma^0_j y^0_j.$$

Докажем, что

$$\forall y \in \mathbf{R}_+^{n_2} \quad [l_0(y) \le 0 \Rightarrow g(y) \ge g(y^0)].$$

(2.29)

Действительно, пусть для некоторого $y \in \mathbf{R}_+^{n_2}$ выполняется $l_0(y) \le 0$. Тогда, в силу (2.9-10) (полагаем в (2.9-10) $y^* = y^0$),

$$g(y) - g(y^0) \ge \left\langle g'(y^0), y - y^0 \right\rangle = \left\langle g'(y^0), y \right\rangle - \left\langle g'(y^0), y^0 \right\rangle = -\left[\sum_{j=1}^{n_2} b_j w_j^{-1}\right] l(y) \ge 0,$$

откуда $g(y) \ge g(y^0)$.

Заметим теперь, что в точке $t^*(\gamma^0)$ выполняется $G_{\gamma^0}(t^*(\gamma^0)) \le G_{\gamma^0}(t^0)$, откуда $l_0(f(t^*(\gamma^0))) \le l_0(f(t^0)) = 0$, а следовательно, используя (2.29), получаем $F(t^*(\gamma^0)) = g(f(t^*(\gamma^0))) \ge g(y^0) = g(f(t^0)) = F(t^0)$.

Утверждение 2.23. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$. Тогда

1) $\alpha_* = \sup\{r_{n_2}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma_{n_2}^+\} = \sup\{s_{n_2}(\rho) \mid \rho \in (0,1)^{n_2-1}\}$;

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\{\rho \in (0,1)^{n_2-1} \mid s_{n_2}(\rho) > \alpha_* - \varepsilon\}$ - непустое открытое множество (а следовательно, мера этого множества положительна).

Доказательство. Первое утверждение следует из утверждения 2.22, а второе – из первого и непрерывности $s_{n_2}(\rho)$ на $(0,1)^{n_2-1}$ (см. утверждение 2.21).

Продолжение в разделах 3,4

Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте

В.Н. Нефедов

3. Об исключении переменных в задаче нахождения величины α_*

Суть предлагаемого метода заключается в следующем. В случае, если для полинома $p(x)$ вида (1.1) не выполняется условие

$$\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$$

(3.1)

(предполагаем, что $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, иначе исходная задача решается тривиальным образом, так как в случае невыполнения этого условия не выполняется необходимое условие неотрицательности полинома $p(x)$ в положительном ортанте; см. соответствующее рассуждение относительно условия (1.20) в разделе 1), описывается простой практически реализуемый алгоритм перехода от полинома $p(x)$ к некоторому новому полиному $\hat{w}(z)$, где $z \in \mathbf{R}^r_+$, с меньшим числом переменных - r, для которого условие вида (3.1) выполняется. При этом полином $\hat{w}(z)$ содержит то же количество членов с отрицательными коэффициентами, что и полином $p(x)$, и выполняются равенства $\alpha_*[p(x)] = \alpha_*[\hat{w}(z)]$, $\hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}[p(x)] = \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}[\hat{w}(z)]$ (справедливы также и другие аналогичные равенства). Число r имеет простой геометрический смысл. Оно равно размерности минимальной (относительно частичного порядка включения множеств) грани W выпуклого многогранника $\mathrm{Co}\, L_p$ такой, что $\mathrm{Co}\, K_p \subset W$.

Для любого множества $S \subseteq \mathbf{R}^m$ будем использовать следующие обозначения (см., например, [19]): $\mathrm{cl}\, S$ - замыкание множества S; $\mathrm{bound}\, S = \mathrm{cl}\, S \setminus \mathrm{int}\, S$ - граница множества S; $\mathrm{span}\, S$ - линейная оболочка множества S.

Кроме того, для произвольного выпуклого множества S обозначим (см., например, [19]): $\mathrm{aff}\, S$ - аффинная оболочка множества S; $\dim S$ - размерность множества S, которая определяется, как размерность $\mathrm{aff}\, S$; $\mathrm{ri}\, S$ - относительная внутренность множества S; $\mathrm{rb}\, S = \mathrm{cl}\, S \setminus \mathrm{ri}\, S$ - относительная граница множества S.

Для полинома $p(x)$ вида (1.1) обозначим (в соответствии с [1]) $\dim p(x) = \dim \mathrm{Co}\, N_p$.

Приведем теперь некоторые утверждения относительно полинома $p(x)$ вида (1.1). Всюду в утверждениях 3.1, 3.2 обозначим

$$\forall t = (t_1,\dots,t_m) \in \mathbf{R}^m \quad \bar{t} = (t_1,\dots,t_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}.$$

Утверждение 3.1. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $I = \{1,2,\dots,n_1\}$, $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$, $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, $I_1 \neq \varnothing$, $I_2 \neq \varnothing$, $L_p^1 = \{l^i \in L_p \mid i \in I_1\}$,

$$\forall i \in I_1 \quad l_m^i = 0; \ \forall i \in I_2 \quad l_m^i > 0; \ k_m^j = 0, \ j = 1,2,\dots,n_2.$$

Пусть $p_1(\bar{x}) = p(x_1,\dots,x_{m-1},0)$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^{m-1}_+$,

$$\widetilde{f}_j(\bar{t}) = \sum_{i \in I_1} a_i e^{\langle \bar{l}^i - \bar{k}^j, \bar{t} \rangle}, \ j = 1,2,\dots,n_2, \ \widetilde{F}(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{b_j}{\widetilde{f}_j(\bar{t})} = F[p_1(\bar{x}); \bar{t}].$$

Тогда

1) $\alpha_*[p(x)] = \sup F(\mathbf{R}^m) = \sup \widetilde{F}(\mathbf{R}^{m-1}) = \alpha_*[p_1(\bar{x})]$;

2) $L_p^1 = \{l \in \mathbf{R}^m \mid l = (l_1,...,l_{m-1},0), \bar{l} \in L_{p_1}\}$, $K_p = \{k \in \mathbf{R}^m \mid k = (k_1,...,k_{m-1},0), \bar{k} \in K_{p_1}\}$,

$\dim p_1(\bar{x}) = \dim \mathrm{Co}\, N_{p_1} = \dim \mathrm{Co}\,(L_{p_1} \cup K_{p_1}) = \dim \mathrm{Co}\,(L_p^1 \cup K_p)$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{\alpha}_* = \alpha_*[p_1(\bar{x})] = \sup \tilde{F}(\mathbf{R}^{m-1})$. Пусть $t(n) \in \mathbf{R}^m$ ($n = 1,2,\dots$) : $F(t(n)) \to \alpha_*$ при $n \to \infty$. Тогда

$$F(t(n)) = \sum_{j=1}^{n_2} b_j \left(\sum_{i \in I_1} a_i e^{\langle \bar{l}^i - \bar{k}^j, \bar{t}(n) \rangle} + \sum_{i \in I_2} a_i e^{\langle l^i - k^j, t(n) \rangle} \right)^{-1} \le \tilde{F}(\bar{t}(n)) \le \tilde{\alpha}_*, \; n = 1,2,\dots ,$$

откуда

$$\alpha_* \le \tilde{\alpha}_*. \tag{3.2}$$

Пусть теперь $\bar{t}(n) \in \mathbf{R}^{m-1}$ ($n = 1,2,\dots$) : $\tilde{F}(\bar{t}(n)) \to \tilde{\alpha}_*$ при $n \to \infty$. Выберем для каждого номера $n = 1,2,\dots$ число $t_m(n)$ отрицательным и столь большим по абсолютной величине, чтобы выполнялось неравенство

$$F(t(n)) = \sum_{j=1}^{n_2} b_j \left(\sum_{i \in I_1} a_i e^{\langle \bar{l}^i - \bar{k}^j, \bar{t}(n) \rangle} + \sum_{i \in I_2} a_i e^{\langle \bar{l}^i - \bar{k}^j, \bar{t}(n) \rangle + l_m^i t_m(n)} \right)^{-1} \ge \tilde{F}(\bar{t}(n)) - 1/n .$$

(3.3)

Из (3.3) следует, что $\alpha_* \ge \tilde{\alpha}_*$, откуда, учитывая (3.2), получаем справедливость первого утверждения. Второе утверждение очевидно.

Замечание 3.1. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3.1. Тогда $\alpha_* < +\infty$ (см. замечание 2.2), однако, величина $\alpha_*[p(x)]$ не является достижимой (см. формулу (3.3), из рассмотрения которой следует, что функция $F(t) = F[p(x);t]$ монотонно убывает по переменной t_m), хотя величина $\alpha_*[p_1(\bar{x})]$ может оказаться достижимой. Кроме того, члены с отрицательными коэффициентами b_j у полиномов $p(x)$ и $p_1(\bar{x})$ совпадают и при этом справедливы равенства:

$\omega_j[p(x)] = \omega_j[p_1(\bar{x})]$, $j = 1,2,\dots,n_2$;

$\alpha^*_{j_1,j_2,\dots,j_k}[p(x)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\dots,j_k}[p_1(\bar{x})]$, $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n_2$, $k \ge 1$;

$\hat{\alpha}_{j_1,j_2,\dots,j_k}[p(x)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\dots,j_k}[p_1(\bar{x})]$, $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n_2$, $k > 1$.

Доказательство аналогично.

Утверждение 3.2. Пусть $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\, \mathrm{Co}\, L_p = \varnothing$. Тогда $\exists C \in \mathbf{R}^m$, $\gamma \in \mathbf{R}$:

1) $|C| \ne 0$, $\forall k \in K_p \quad \langle C, k \rangle = \gamma$;

2) $\forall l \in L_p \quad \langle C, l \rangle \le \gamma$;

3) $\exists l \in L_p : \; \langle C, l \rangle < \gamma$;

4) $K_p \subset \mathrm{Co}\, L'_p$, где $L'_p = \{l \in L_p \mid \langle C, l\rangle = \gamma\}$;

5) $\dim \mathrm{Co}\, L'_p \le \dim \mathrm{Co}\, L_p - 1$;

6) существует линейно независимая система векторов $\nu^1,\ldots,\nu^m \in \mathbf{R}^m$, а также вектор $\nu^0 \in \mathbf{R}^m$ такие, что полином $\widetilde{p}(y) = p(y^{\nu^1},\ldots,y^{\nu^m})y^{\nu^0}$, где $y \in \mathbf{R}^m_+$, удовлетворяет условиям утверждения 3.1 при $I_1 = \{i \in I \mid l^i \in L'_p\}$, $I_2 = I \setminus I_1$. При этом для полинома $\widetilde{p}_1(\overline{y}) = \widetilde{p}(y_1,\ldots,y_{m-1},0)$ (соответствующего полиному $p_1(\overline{x})$ из утверждения 3.1) выполняется

$$K_{\widetilde{p}_1} \subset \mathrm{Co}\, L_{\widetilde{p}_1},\ \dim \widetilde{p}_1(\overline{y}) \le \dim \widetilde{p}(y) - 1 = \dim p(x) - 1.$$

Доказательство. Пусть k^0 - произвольная точка из $\mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, K_p$ ($\mathrm{ri}\, S \ne \varnothing$ для любого непустого выпуклого множества $S \subseteq \mathbf{R}^m$; см. , например, [19, стр.35]). Из условий

$$K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p,\ \mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_p = \varnothing$$

следует, что $\mathrm{Co}\, K_p \subseteq \mathrm{Co}\, L_p$, $k^0 \in \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, K_p \subset \mathrm{Co}\, K_p \subseteq \mathrm{rb}\,\mathrm{Co}\, L_p$, а следовательно (см. [19, стр.19,46]), для точки k^0 существует собственная опорная гиперплоскость $H(C,\gamma) = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \langle C, x\rangle = \gamma\}$ к многограннику $\mathrm{Co}\, L_p$, проходящая через точку k^0, где $C \in \mathbf{R}^m$, $|C| \ne 0$, $\gamma \in \mathbf{R}$, т.е. для $H(C,\gamma)$ выполняется

$$\langle C, k^0\rangle = \gamma;\ \forall x \in \mathrm{Co}\, L_p\ \ \langle C, x\rangle \le \gamma;\ \exists x^0 \in \mathrm{Co}\, L_p:\ \langle C, x^0\rangle < \gamma.$$

(3.4)

Из (3.4) очевидным образом следует справедливость утверждений 2,3. Покажем выполнение утверждения 1. Предположим, что $\exists k' \in K_p:\ \langle C, k'\rangle < \gamma$ ($k' \in K_p \Rightarrow \langle C, k'\rangle \le \gamma$, так как $k' \in K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$). Рассмотрим точки $k(\lambda) = k^0 + \lambda(k^0 - k')$, где $\lambda > 0$. Поскольку $k^0 \in \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, K_p$, то $\exists \varepsilon > 0$: $B^{(m)}[k^0,\varepsilon] \cap \mathrm{aff}\,\mathrm{Co}\, K_p \subseteq \mathrm{Co}\, K_p$. Выберем λ столь малым, чтобы $k(\lambda) \in B^{(m)}[k^0,\varepsilon]$. Очевидно, что $k(\lambda) \in \mathrm{aff}\,\mathrm{Co}\, K_p$ (см. [19, стр.16]), а следовательно, $k(\lambda) \in \mathrm{Co}\, K_p \subseteq \mathrm{Co}\, L_p$. Заметим, что $\langle C, k(\lambda)\rangle = \langle C, k^0\rangle + \lambda(\langle C, k^0\rangle - \langle C, k'\rangle) = \gamma + \lambda(\gamma - \langle C, k'\rangle) > \gamma$, а это противоречит (3.4).

Покажем теперь справедливость утверждения 4. Действительно, пусть k - произвольная точка из K_p. Тогда, в силу того, что $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, найдутся $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n_1} \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i l^i = k;\ \lambda_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,n_1;\ \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i = 1.$$

При этом, в силу доказанного утверждения 2, выполняются неравенства $\langle C, l^i \rangle \le \gamma$, $i = 1,2,\dots,n_1$.

Но тогда, используя равенство $\langle C,k\rangle = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \langle C, l^i \rangle$, получаем, что $\forall i \in \{1,2,\dots,n_1\}$ в случае $\lambda_i > 0$, очевидно, выполняется равенство $\langle C, l^i \rangle = \gamma$ (так как в противном случае $\langle C, k \rangle < \gamma$, что противоречит утверждению 1), откуда и следует, что $k \in \mathrm{Co}\, L'_p$. Утверждение 5 следует из равенства $L'_p = \{l \in L_p \mid \langle C,l\rangle = \gamma\}$, а также из утверждения 3.

Докажем справедливость утверждения 6. Пусть теперь k^0 - произвольный элемент из K_p. Рассмотрим множества точек

$$\widetilde{K} = K_p - k^0,\ \widetilde{L} = L_p - k^0,\ \widetilde{L}' = L'_p - k^0.$$

Тогда, в силу уже доказанного включения $K_p \subset \mathrm{Co}\, L'_p$, имеем $\widetilde{K} \subset \mathrm{Co}\, \widetilde{L}'$, а, в силу утверждений 1-3 и равенства $L'_p = \{l \in L_p \mid \langle C,l\rangle = \gamma\}$, выполняются равенства

$$\forall l \in \widetilde{L}' \quad \langle C, l \rangle = 0;\ \forall k \in \widetilde{K} \quad \langle C, k \rangle = 0;$$

(3.5)

а также неравенства

$$\forall l \in \widetilde{L} \setminus \widetilde{L}' \ne \varnothing \quad \langle C, l \rangle < 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим базис $u^1,\dots,u^m$ в $\mathbf{R}^m$ такой, что

$$u^m = -C;\ u^1,\dots,u^{m-1} \perp u^m.$$

(3.7)

Пусть

$$U = \begin{bmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^m \end{bmatrix}$$

- квадратная матрица порядка m, строками которой являются векторы $u^1,\dots,u^m \in \mathbf{R}^m$. Она является невырожденной, поскольку векторы $u^1,\dots,u^m$ линейно независимы. Рассмотрим множества точек

$$\widetilde{\widetilde{K}} = U\widetilde{K},\ \widetilde{\widetilde{L}} = U\widetilde{L},\ \widetilde{\widetilde{L}}' = U\widetilde{L}'.$$

Тогда, в силу (3.5-7), имеем

$$\forall l \in \widetilde{\widetilde{L}}' \ l_m = 0;\ \forall k \in \widetilde{\widetilde{K}} \quad k_m = 0;\ \forall l \in \widetilde{\widetilde{L}} \setminus \widetilde{\widetilde{L}}' \ne \varnothing \quad l_m > 0.$$

(3.8)

Обозначим через $\nu^1,\dots,\nu^m$ векторы из $\mathbf{R}^m$, являющиеся вектор-столбцами матрицы U.

Рассмотрим полином $\widetilde{p}(y) = p(y^{\nu^1},\dots,y^{\nu^m})y^{\nu^0}$, где $y \in \mathbf{R}^m_+$, $\nu^0 = -Uk^0$. Тогда

$$\widetilde{p}(y) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i y^{U(l^i - k^0)} - \sum_{j=1}^{n_2} b_j y^{U(k^j - k^0)}, \; L_{\widetilde{p}} = \widetilde{\widetilde{L}}, \; K_{\widetilde{p}} = \widetilde{\widetilde{K}}, \; N_{\widetilde{p}} = \widetilde{\widetilde{L}} \cup \widetilde{\widetilde{K}}$$

(3.9)

(т.е. $\widetilde{p}(y)$ - полином вида (1.1)), и, в силу (3.8), $\widetilde{p}(y)$ удовлетворяет условиям утверждения 3.1 при $I_1 = \{i \in I \mid l^i \in L'_p\}$, $I_2 = I \setminus I_1$. Используя (3.9), невырожденность матрицы U, уже доказанные утверждения 4,5, утверждение 2 из утверждения 3.1, утверждения 3.3-5 (приведенные ниже), а также очевидное равенство $\widetilde{\widetilde{L}}' = \{U(l^i - k^0) \mid i \in I_1\}$, получаем, что для полинома $\widetilde{p}_1(\bar{y}) = \widetilde{p}(y_1,\dots,y_{m-1},0)$ (соответствующего полиному $p_1(\bar{x})$ из утверждения 3.1) выполняется

$$\dim \widetilde{p}_1(\bar{y}) = \dim \mathrm{Co}\,(\widetilde{\widetilde{L}}' \cup K_{\widetilde{p}}) = \dim \mathrm{Co}\,\{U(L'_p - k^0) \cup U(K_p - k^0)\} =$$

$$= \dim \mathrm{Co}\, U\{(L'_p - k^0) \cup (K_p - k^0)\} = \dim U \mathrm{Co}\,\{(L'_p - k^0) \cup (K_p - k^0)\} = =$$

$$\dim \mathrm{Co}\,\{(L'_p - k^0) \cup (K_p - k^0)\} = \dim \mathrm{Co}\,\{(L'_p \cup K_p) - k^0\} = \dim \mathrm{Co}\,(L'_p \cup K_p) =$$

$$= \dim \mathrm{Co}\, L'_p \le \dim \mathrm{Co}\, L_p - 1 = \dim \mathrm{Co}\,(L_p \cup K_p) - 1 = \dim p(x) - 1 .$$

Кроме того, используя доказанное утверждение 4, а также утверждение 3.4, имеем

$$U(K_p - k^0) \subset U(\mathrm{Co}\, L'_p - k^0) = U\mathrm{Co}\,(L'_p - k^0) = \mathrm{Co}\, U(L'_p - k^0),$$

а следовательно,

$$\widetilde{\widetilde{K}} \subset \mathrm{Co}\, \widetilde{\widetilde{L}}'.$$

(3.10)

Используя (3.9), утверждение 2 из утверждения 3.1, а также равенство $\widetilde{\widetilde{L}}' = \{U(l^i - k^0) \mid i \in I_1\}$, получаем

$$\widetilde{\widetilde{L}}' = \{l \in \mathbf{R}^m \mid l = (l_1,\dots,l_{m-1},0), \bar{l} \in L_{\widetilde{p}_1}\}, \; \widetilde{\widetilde{K}} = \{k \in \mathbf{R}^m \mid k = (k_1,\dots,k_{m-1},0), \bar{k} \in K_{\widetilde{p}_1}\}. \qquad (3.11)$$

Но тогда из (3.10), используя (3.11), имеем $K_{\widetilde{p}_1} \subset \mathrm{Co}\, L_{\widetilde{p}_1}$, т.е. утверждение 3.2 полностью доказано.

Следующие утверждения либо очевидны, либо общеизвестны (они использовались при доказательстве утверждения 3.2).

Утверждение 3.3. Пусть U - невырожденная квадратная матрица порядка m, S - выпуклое множество из $\mathbf{R}^m$, $x^0 \in \mathbf{R}^m$. Тогда

1) $\dim S = \dim US$;

2) $\dim S = \dim (S - x^0)$.

Утверждение 3.4. Пусть U - квадратная матрица порядка m, S - конечное множество из $\mathbf{R}^m$. Тогда $\mathrm{Co}\, US = U \mathrm{Co}\, S$.

Утверждение 3.5. Пусть S, S_1 - конечные множества из $\mathbf{R}^m$, $S_1 \subset \mathrm{Co}\, S$. Тогда $\mathrm{Co}\,(S \cup S_1) = \mathrm{Co}\, S$.

Замечание 3.2. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3.2. Тогда $\alpha_* < +\infty$ (см. замечание 2.2), однако, величина $\alpha_*[p(x)]$ не является достижимой (см. замечание 3.1), хотя величина $\alpha_*[p_1(\bar{x})]$ может оказаться достижимой.

Утверждение 3.6. Пусть $\nu^1, \ldots, \nu^m$ - линейно независимая система векторов из $\mathbf{R}^m$, $k^0 \in \mathbf{R}^m$, $\nu^0 = -Uk^0$, $y \in \mathbf{R}^m_+$, $\tilde{p}(y) = p(y^{\nu^1}, \ldots, y^{\nu^m}) y^{\nu^0}$. Тогда $\alpha_*[p(x)] = \alpha_*[\tilde{p}(y)]$, и при этом любая из этих величин достижима тогда и только тогда, когда достижима другая.

Доказательство. Используя равенство (3.9), $\forall t \in \mathbf{R}^m$ имеем

$$F[\tilde{p}(y);t] = \left(\sum_{j=1}^{n_2} b_j [e^t]^{U(k^j - k^0)} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i [e^t]^{U(l^i - k^0)} \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n_2} b_j e^{\langle U(k^j - k^0), t \rangle} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i e^{\langle U(l^i - k^0), t \rangle} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n_2} b_j e^{\langle k^j - k^0, U't \rangle} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i e^{\langle l^i - k^0, U't \rangle} \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n_2} b_j \left[e^{U't}\right]^{k^j - k^0} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i \left[e^{U't}\right]^{l^i - k^0} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n_2} b_j \left[e^{U't}\right]^{k^j} \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i \left[e^{U't}\right]^{l^i} \right) = F\left[p(x); U't\right],$$

откуда, в силу невырожденности матрицы U', и следует справедливость доказываемого утверждения.

Замечание 3.3. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3.6. Тогда, в силу (3.9), полином $\tilde{p}(y)$ содержит то же количество членов с отрицательными коэффициентами b_j, что и полином $p(x)$, и, если члену $b_j x^{k^j}$ полинома $p(x)$ поставить в соответствие член $b_j y^{U(k^j - k^0)}$ полинома $\tilde{p}(y)$, где $j = 1, 2, \ldots, n_2$, то справедливы равенства (а также справедлива одновременность достижимости или недостижимости соответствующих величин):

$\omega_j[p(x)] = \omega_j[\tilde{p}(y)]$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$;

$\alpha^*_{j_1, j_2, \ldots, j_k}[p(x)] = \alpha^*_{j_1, j_2, \ldots, j_k}[\tilde{p}(y)]$, $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2$, $k \ge 1$;

$\hat{\alpha}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}[p(x)] = \hat{\alpha}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}[\tilde{p}(y)]$, $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2$, $k > 1$.

Доказательство аналогично.

Замечание 3.4. Можно также воспользоваться приемом, описанным при доказательстве утверждения 6 из утверждения 3.2 для того, чтобы в случае

$$K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p,\ \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p = \varnothing \tag{3.12}$$

перейти от полинома $p(x)$ к полиному $\hat{p}(z)$ с меньшим числом переменных - r, т.е. при $z \in \mathbf{R}^r_+$, такому, что

$$r = \dim p(x) = \dim \hat{p}(z),$$

(3.13)

$$K_{\hat{p}} \subset \mathrm{Co}\, L_{\hat{p}},\ \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} \neq \varnothing. \tag{3.14}$$

При этом, если $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, то $\mathrm{Co}\, K_{\hat{p}} \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} \neq \varnothing$.

Действительно, в случае (3.12), как и при доказательстве утверждения 6 из утверждения 3.2, выберем произвольное $k^0 \in K_p$ и обозначим $\widetilde{K} = K_p - k^0$, $\widetilde{L} = L_p - k^0$. В силу утверждений 3.3,3.5, для $r = \dim p(x)$ имеем

$$r = \dim p(x) = \dim \mathrm{Co}\, N_p = \dim \mathrm{Co}\,(L_p \cup K_p) = \dim \mathrm{Co}\, L_p = \dim \mathrm{Co}\, \widetilde{L} = \dim \mathrm{aff}\ \mathrm{Co}\, \widetilde{L}.$$

Рассмотрим базис $u^1,\dots,u^r;\ u^{r+1},\dots,u^m$ в $\mathbf{R}^m$ такой, что

$$u^1,\dots,u^r \in H = \mathrm{aff}\ \mathrm{Co}\, \widetilde{L};\ u^{r+1},\dots,u^m \perp H$$

(3.15)

(H - линейное подпространство, поскольку $k^0 \in K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p \Rightarrow (0,\dots,0) \in \widetilde{K} \subset \mathrm{Co}\, \widetilde{L} \subset$ $\subset \mathrm{aff}\ \mathrm{Co}\, \widetilde{L} = H$). Далее (как и в доказательстве утверждения 3.2) рассмотрим матрицу U, строками которой являются векторы $u^1,\dots,u^m \in \mathbf{R}^m$, а затем полином $\widetilde{p}(y) = p(y^{\nu^1},\dots,y^{\nu^m})y^{\nu^0}$, где $y \in \mathbf{R}^m_+$, $\nu^0 = -Uk^0$; $\nu^1,\dots,\nu^m$ - векторы из $\mathbf{R}^m$, являющиеся вектор-столбцами матрицы U.

Тогда искомым полиномом будет полином

$$\hat{p}(z) = \widetilde{p}(z_1,\dots,z_r,0,\dots,0).$$

(3.16)

Действительно, используя (3.9), включение $\widetilde{K} \subset \mathrm{Co}\, \widetilde{L}$ (следующее из включения $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$) и условие (3.15), получаем, что

$$N_{\widetilde{p}} = U(N_p - k^0) = U(\widetilde{L} \cup \widetilde{K}) \subset U\mathrm{Co}\, \widetilde{L} \subset UH \subseteq \left\{x \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, x_{r+1} = \dots = x_m = 0\right\},$$

откуда, обозначив $\forall x \in \mathbf{R}^m$ $\bar{\bar{x}} = (x_1,\dots,x_r,0,\dots,0)$, в силу (3.16), имеем

$$L_{\widetilde{p}} = \left\{l \in \mathbf{R}^m \mid l = (l_1,\dots,l_r,0,\dots,0), \bar{\bar{l}} \in L_{\hat{p}}\right\},\ K_{\widetilde{p}} = \left\{k \in \mathbf{R}^m \mid k =\right.$$

$$\left.= (k_1,\dots,k_r,0,\dots0), \bar{\bar{k}} \in K_{\hat{p}}\right\},\ N_{\widetilde{p}} = \left\{l \in \mathbf{R}^m \mid l = (l_1,\dots,l_r,0,\dots,0), \bar{\bar{l}} \in N_{\hat{p}}\right\}, \tag{3.17}$$

а следовательно, в силу невырожденности матрицы U (см. также утверждение 3.3),

$$\dim \hat{p}(z) = \dim \mathrm{Co}\, N_{\hat{p}} = \dim \mathrm{Co}\, N_{\widetilde{p}} = \dim \mathrm{Co}\,(UN_p - k^0) = \dim \mathrm{Co}\, N_p = \dim p(x) = r\,. \qquad (3.18)$$

Кроме того, в силу (3.9),(3.12) (см. также утверждение 3.4), справедливо

$$K_{\widetilde{p}} = U(K_p - k^0) \subset U\mathrm{Co}\,(L_p - k^0) = \mathrm{Co}\, U(L_p - k^0) = \mathrm{Co}\, L_{\widetilde{p}}\,,$$

откуда, в силу (3.17), получаем

$$K_{\hat{p}} \subset \mathrm{Co}\, L_{\hat{p}}\,. \qquad (3.19)$$

Заметим далее, что, в силу (3.18),(3.19) (см. также утверждение 3.5),

$$r = \dim \hat{p}(z) = \dim \mathrm{Co}\, N_{\hat{p}} = \dim \mathrm{Co}\,(L_{\hat{p}} \cup K_{\hat{p}}) = \dim \mathrm{Co}\, L_{\hat{p}}\,,$$

а следовательно (см., например, [11, стр. 202]), $\mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} \neq \varnothing$, откуда, используя (3.18),(3.19), получаем справедливость (3.13),(3.14).

Пусть теперь $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$. Покажем, что $\mathrm{Co}\, K_{\hat{p}} \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} \neq \varnothing$. Аналогично предыдущему, используя невырожденность матрицы U, нетрудно показать, что $\mathrm{Co}\, K_{\widetilde{p}} \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_{\widetilde{p}} = \; = U[(\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_p) - k^0]$, а следовательно, $\mathrm{Co}\, K_{\widetilde{p}} \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_{\widetilde{p}} \neq \varnothing$. Из последнего неравенства, в силу (3.17), имеем $\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} \neq \varnothing$, откуда, используя то, что $\dim \mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} = r \Rightarrow \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} = \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}}$, окончательно получаем, что $\mathrm{Co}\, K_{\hat{p}} \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_{\hat{p}} \neq \varnothing$.

Приведем, кроме того, следующее из (3.16),(3.17) равенство $\forall t \in \mathbf{R}^m$

$$F[\widetilde{p}(y);t] = F[\hat{p}(z);\bar{\bar{t}}].$$

Из этого равенства, используя утверждение 3.6, получаем, что $\alpha_*[p(x)] = \alpha_*[\widetilde{p}(y)] = \alpha_*[\hat{p}(z)]$ и при этом величина $\alpha_*[p(x)]$ достижима тогда и только тогда, когда достижима величина $\alpha_*[\hat{p}(z)]$. Более того, используя (3.17), а также замечание 3.3, получаем, что в полиномах $p(x)$, $\widetilde{p}(y)$, $\hat{p}(z)$ содержится одинаковое количество членов с отрицательными коэффициентами, и выполняются равенства (а также справедлива одновременность достижимости или недостижимости соответствующих величин):

$$\omega_j[p(x)] = \omega_j[\widetilde{p}(y)] = \omega_j[\hat{p}(z)],\; j = 1,2,\ldots,n_2\,;$$

$$\alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[p(x)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\widetilde{p}(y)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\hat{p}(z)],\; 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2\,,\; k \ge 1\,;$$

$$\hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[p(x)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\widetilde{p}(y)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\hat{p}(z)],\; 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2\,,\; k > 1\,.$$

В приведенных равенствах предполагается, что при переходе от $p(x)$ к $\widetilde{p}(y)$, а затем от $\widetilde{p}(y)$ к $\hat{p}(z)$ порядок соответствующих членов с отрицательными коэффициентами не меняется.

Доказательство аналогично. Другой подход к решению задачи, рассмотренной в настоящем замечании, предложен был ранее в теореме 1 из [1].

Следствие 3.1. Используя доказанные утверждения, нетрудно описать следующий метод перехода от полинома $p(x)$, такого, что $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, но не выполняется условие (3.1), к некоторому новому полиному с меньшим числом переменных и меньшей размерностью, для которого условие вида (3.1) выполняется. При этом в обоих полиномах содержится одинаковое количество членов с отрицательными коэффициентами, и для этих полиномов равны значения величины α_*, а также значения других аналогичных величин. Действительно, если для исходного полинома $p(x)$ не выполняется условие $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\, \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing$, то, в силу утверждения 3.2, можно перейти к полиному $\widetilde{p}_1(\bar{y})$ меньшей размерности и с меньшим числом переменных, для которого выполняется $K_{\widetilde{p}_1} \subset \mathrm{Co}\, L_{\widetilde{p}_1}$, а, в силу утверждений 3.1,3.6 (см. также замечания 3.1,3.4), справедливы равенства:

$$\alpha_*[p(x)] = \alpha_*[\widetilde{p}(y)] = \alpha_*[\widetilde{p}_1(\bar{y})];$$

$$\omega_j[p(x)] = \omega_j[\widetilde{p}(y)] = \omega_j[\widetilde{p}_1(\bar{y})],\ j = 1,2,\ldots,n_2;$$

$$\alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[p(x)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\widetilde{p}(y)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\widetilde{p}_1(\bar{y})],\ 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2,\ k \ge 1;$$

$$\hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[p(x)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\widetilde{p}(y)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[\widetilde{p}_1(\bar{y})],\ 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2,\ k > 1,$$

где $\widetilde{p}(y)$ - полином, определяемый в утверждении 6 из утверждения 3.2, используя который, там же определяется полином $\widetilde{p}_1(\bar{y})$. В приведенных равенствах предполагается, что при переходе от $p(x)$ к $\widetilde{p}(y)$, а затем от $\widetilde{p}(y)$ к $\widetilde{p}_1(\bar{y})$ порядок соответствующих членов с отрицательными коэффициентами не меняется (это же предположение остается справедливым для аналогичных равенств и всюду далее в настоящем замечании). Если для полинома $\widetilde{p}_1(\bar{y})$ не выполняется условие: $\mathrm{Co}\, K_{\widetilde{p}_1} \cap \mathrm{ri}\, \mathrm{Co}\, L_{\widetilde{p}_1} \neq \varnothing$, то осуществляем аналогичным образом переход к новому полиному, снова уменьшая размерность полинома и число переменных в нем. Очевидно, что через конечное число таких переходов получим полином $w(u)$ с тем же количеством членов с отрицательными коэффициентами, что и в полиноме $p(x)$, для которого выполняются условия: $K_w \subset \mathrm{Co}\, L_w$, $\mathrm{Co}\, K_w \cap \mathrm{ri}\, \mathrm{Co}\, L_w \neq \varnothing$, а также справедливы равенства:

$$\alpha_*[p(x)] = \alpha_*[w(u)];$$

$$\omega_j[p(x)] = \omega_j[w(u)],\ j = 1,2,\ldots,n_2;$$

$$\alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[p(x)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[w(u)],\ 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2,\ k \ge 1;$$

$$\hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[p(x)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}[w(u)],\ 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n_2,\ k > 1.$$

Далее, действуя в соответствии с замечанием 3.4, переходим от полинома $w(u)$ к полиному $\hat{w}(z)$ такому, что $z \in \mathbf{R}^r_+$, $r = \dim \hat{w}(z) = \dim w(u)$, $K_{\hat{w}} \subset \mathrm{Co}\, L_{\hat{w}}$, $\mathrm{Co}\, K_{\hat{w}} \cap \mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_{\hat{w}} \neq \varnothing$, т.е. для полинома $\hat{w}(z)$ уже выполняется условие вида (3.1) (а также условие вида $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$).

При этом (см. замечание 3.4) в полиномах $p(x)$, $w(u)$, $\hat{w}(z)$ содержится одинаковое количество членов с отрицательными коэффициентами, справедливы равенства:

$$\alpha_*[p(x)] = \alpha_*[w(u)] = \alpha_*[\hat{w}(z)];$$

$$\omega_j[p(x)] = \omega_j[w(u)] = \omega_j[\hat{w}(z)],\ j = 1,2,\dots,n_2;$$

$$\alpha^*_{j_1,j_2,\dots,j_k}[p(x)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\dots,j_k}[w(u)] = \alpha^*_{j_1,j_2,\dots,j_k}[\hat{w}(z)],\ 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n_2,\ k \ge 1;$$

$$\hat{\alpha}_{j_1,j_2,\dots,j_k}[p(x)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\dots,j_k}[w(u)] = \hat{\alpha}_{j_1,j_2,\dots,j_k}[\hat{w}(z)],\ 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n_2,\ k > 1,$$

и в случае $\alpha_* < \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}$ величина $\alpha_*[\hat{w}(z)]$ достигается (см. следствие 2.2).

Пример 3.1. Приведем пример, показывающий, что выполнение условий: $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$ не гарантирует того, что величина α_* достигается. Пусть

$$p(x) = (1-x_2)^2 + x_1(1 - x_1 + x_1^2) = p_1(x) - p_2(x),$$

где

$$p_1(x) = 1 + x_2^2 + x_1 + x_1^3,\ \ p_2(x) = 2x_2 + x_1^2.$$

Тогда $\forall x \in \mathbf{R}^2_+$ $p(x) > 0$, откуда $\alpha_* \le 1$ (см. теорему 1.1). Для последовательности $t(n) = (-n, 0),\ n = 1,2,\dots$, выполняется

$$F(t(n)) = \frac{p_2(e^{t(n)})}{p_1(e^{t(n)})} = \frac{2 + e^{-2n}}{2 + e^{-n} + e^{-3n}} \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

откуда $\alpha_* = 1$. При этом величина α_* не достигается, так как в противном случае $\exists t^* \in \mathbf{R}^2$:

$F(t^*) = 1$, откуда $\dfrac{p_2(e^{t^*})}{p_1(e^{t^*})} = 1$, а следовательно, $p(e^{t^*}) = 0$, а это противоречит тому, что $\forall x \in \mathbf{R}^2_+$ $p(x) > 0$. С другой стороны, для рассматриваемого полинома выполняется $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$.

Из рассмотрения настоящего примера следует, что $\sup F(\mathbf{R}^2)$=1, где $F(t) = p_2(e^t)/p_1(e^t)$. Но тогда для

$$F_1(t) = F(t)/2 = p_2(e^t)/[2p_1(e^t)] = F[2p_1(x) - p_2(x); t],$$

$$F_2(t) = 2F(t) = 2p_2(e^t)/p_1(e^t) = F[p_1(x) - 2p_2(x); t]$$

выполняются равенства

$$\sup F_1(\mathbf{R}^2) = \frac{1}{2}\sup F(\mathbf{R}^2) = \frac{1}{2},\ \ \sup F_2(\mathbf{R}^2) = 2\sup F(\mathbf{R}^2) = 2.$$

При этом, как и для $F(t)$, в обоих случаях sup не достигается, но, в отличие от приведенного в примере первоначального полинома $p(x)$, из приведенных равенств получаем

$$\alpha_*[2p_1(x)-p_2(x)]=\sup F_1(\mathbf{R}^2)=\frac{1}{2},\ \ \alpha_*[p_1(x)-2p_2(x)]=\sup F_2(\mathbf{R}^2)=2.$$

Таким образом, приведены три полинома, для которых $\sup F(\mathbf{R}^2)$ не достигается, выполняются условия вида $K_p\subset \mathrm{Co}\,L_p$, $\mathrm{Co}\,K_p\cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p\neq\varnothing$, и имеет место один из следующих случаев: $\alpha_*=1,\ \alpha_*<1,\ \alpha_*>1$.

Пример 3.2. Приведем теперь пример, показывающий, что в случае достижимости величины $\alpha_*[p(x)]$ и выполнения условий: $K_p\subset \mathrm{Co}\,L_p$, $\mathrm{Co}\,K_p\cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p\neq\varnothing$ может выполняться равенство $\alpha_*=\hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}$. Действительно, пусть

$$p(x)=(x_1+x_2-1)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+1-2x_1-2x_2.$$

Тогда

$$f_1(t)=e^{t_1}+e^{2t_2-t_1}+2e^{t_2}+e^{-t_1},\ f_2(t)=e^{2t_1-t_2}+e^{t_2}+2e^{t_1}+e^{-t_2},$$

$$\omega_1=\inf f_1(\mathbf{R}^2)=f_1(0,-\infty)=2,\ \alpha_1^*=\frac{2}{\omega_1}=1,$$

$$\omega_2=\inf f_2(\mathbf{R}^2)=f_2(-\infty,0)=2,\ \alpha_2^*=\frac{2}{\omega_2}=1,$$

$$\hat{\alpha}_{1,2}=\max\{\alpha_1^*,\alpha_2^*\}=1,\ F(t_1,t_2)=\frac{2}{f_1(t)}+\frac{2}{f_2(t)}.$$

Поскольку $\forall x\in\mathbf{R}_+^2$ $p(x)\geq 0$, то, в силу теоремы 1.2, $\alpha_*\leq 1$, а при $t_1=-\ln 2$, $t_2=-\ln 2$ имеем

$$f_1(-\ln 2,-\ln 2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+2=4,\ \ f_2(-\ln 2,-\ln 2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+2=4,$$

$$F(-\ln 2,-\ln 2)=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1,$$

т.е. $\alpha_*=1=\hat{\alpha}_{1,2}$, и значение α_* достижимо.

Пользуясь далее приемом, примененным при описании примера 3.1, мы можем, исходя из приведенного в настоящем примере полинома $p(x)$, построить также два других полинома, для которых выполняются все те же условия, что и для полинома $p(x)$ (т.е. условия вида $K_p\subset \mathrm{Co}\,L_p$, $\mathrm{Co}\,K_p\cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\,L_p\neq\varnothing$, а также достижимость α_* и равенство $\alpha_*=\hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2}$), однако, в отличие от полинома $p(x)$, имеет место один из следующих случаев: $\alpha_*<1,\ \alpha_*>1$.

Для практических целей представляет интерес алгоритм нахождения вектора C, а также векторов $v^0,v^1,\dots,v^m$ из утверждения 3.2.

Опишем сначала алгоритм определения вектора C. Пусть выполняются условия утверждения 3.2, т.е. $K_p\subset \mathrm{Co}\,L_p$, $\mathrm{Co}\,K_p\cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\,L_p=\varnothing$. Выберем $k^0\in K_p$ (произвольным образом) , затем положим $l^0 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{n_1} l^i$. Далее рассмотрим задачу линейного программирования

(ЗЛП) с переменными $C = (C_1,...,C_m) \in \mathbf{R}^m$:

$$\langle C, l^0 - k^0 \rangle \to \min; \ -1 \le C_i \le 1, \ i = 1,2,...,m; \ \langle C, k - k^0 \rangle = 0, k \in K_p \setminus \{k^0\}; \qquad (3.20)$$

$$\langle C, l - k^0 \rangle \le 0, l \in L_p .$$

Из утверждения 3.2 следует, что решением ЗЛП (3.20) будет вектор C такой, что $\langle C, l^0 - k^0 \rangle < 0$, и для этого вектора будут, очевидно, выполняться утверждения 1-5 из утверждения 3.2 при $\gamma = \langle C, k^0 \rangle$ (выполнение утверждений 1-3 очевидно, а утверждения 4,5 являются следствиями утверждений 1-3; см. доказательство этих утверждений в утверждении 3.2).

Замечание 3.5. Заметим, что в случае $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$ условие $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\, \mathrm{Co}\, L_p = \varnothing$ является необходимым и достаточным для того, чтобы вектор C, являющийся решением задачи (3.20), удовлетворял неравенству $\langle C, l^0 - k^0 \rangle < 0$. Достаточность уже установлена, а необходимость следует из того, что в случае выполнения неравенства $\langle C, l^0 - k^0 \rangle < 0$, где C - решение задачи (3.20), очевидно, выполняются утверждения 1-5 из утверждения 3.2, из которых следует, что $\mathrm{Co}\, K_p \subset L'_p \subset \mathrm{rb}\, L_p$ (последнее включение легко доказывается от противного). Соответственно, $\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing \Leftrightarrow \langle C, l^0 - k^0 \rangle = 0$, где C - любое решение задачи (3.20).

Замечание 3.6. Во многих практических задачах выполняется следующее дополнительное условие:

$$k \in \mathbf{Q}^m, \ \forall k \in K_p; \ l \in \mathbf{Q}^m, \ \forall l \in L_p .$$

(3.21)

В этом случае при решении ЗЛП (3.20) симплекс-методом (см., например, [11, гл.3]) решением этой ЗЛП будет некоторая угловая точка многогранника, являющегося допустимым множеством решений в ЗЛП (3.20), и, поскольку коэффициенты в ограничениях этого многогранника (типа равенств и типа неравенств) являются рациональными числами, то, как нетрудно показать, и любая угловая точка этого многогранника будет иметь рациональные координаты. Таким образом, в случае (3.21) можно наложить дополнительное требование на C вида

$$C \in \mathbf{Q}^m.$$

(3.22)

Опишем также практически реализуемый алгоритм нахождения векторов $\nu^0, \nu^1, ..., \nu^m$ из утверждения 6 утверждения 3.2. Эти векторы легко получаются из векторов $u^1,...,u^m \in \mathbf{R}^m$, удовлетворяющих (3.7) (см. доказательство утверждения 3.2). Таким образом, осталось описать метод нахождения системы линейно независимых векторов $u^1,\dots,u^m$, таких, что $u^m=-C$, а векторы $u^1,\dots,u^{m-1}$ удовлетворяют равенству

$$\langle C,u\rangle=0. \tag{3.23}$$

В предлагаемом методе получаемый в результате базис $u^1,\dots,u^m$ линейного пространства $\mathbf{R}^m$ будет ортогональным, т.е. удовлетворяющим условию:

$$\langle u^i,u^j\rangle=0 \text{ при } i\neq j.$$

Если в векторе C имеются нулевые координаты, то соответствующие этим координатам векторы u^i находятся наиболее просто. Например, если $C_m=0,$ то полагаем

$$u^1=(0,\dots,0,1)\in\mathbf{R}^m.$$

Если в векторе C имеются $k\geq 2$ нулевых координат, то аналогичным образом определяем векторы $u^2,\dots,u^k$. Если $k=m-1,$ то задача решена (поскольку $u^m=-C$). Пусть теперь $k\leq m-2,$ т.е. в векторе C имеются по крайней мере две ненулевые координаты. Для простоты обозначений считаем, что $C_1\neq 0, C_2\neq 0.$ В этом случае полагаем

$u^{k+1}=(C_2,-C_1,0,\dots,0)\in\mathbf{R}^m$ (или $u^{k+1}=\rho(C_2,-C_1,0,\dots,0)$, где $\rho\neq 0$, и в случае (3.21) $\rho\in\mathbf{Q}$).

Очевидно, что

$$\langle u^{k+1},u^i\rangle=0,\ i=1,2,\dots,k;\ \langle u^{k+1},u^m\rangle=0.$$

Далее при определении векторов $u^{k+i},\ i=2,\dots,m-k-1,$ будем использовать уравнения

$$\langle u^{k+i},u^{k+1}\rangle=0,\ i=2,\dots,m-k-1,$$

откуда

$$C_2u_1^{k+i}-C_1u_2^{k+i}=0,\ i=2,\dots,m-k-1,$$

а следовательно, компоненту u_2 можно исключить из дальнейшего рассмотрения, положив

$$u_2=\frac{C_2}{C_1}u_1. \tag{3.24}$$

При этом первая координата в векторе C заменяется на $C_1+\frac{C_2}{C_1}=\frac{C_1^2+C_2}{C_1}$, а вторая временно исключается из дальнейшего рассмотрения. Для оставшихся координат уравнение вида (3.23) будет иметь вид

$$\frac{C_1^2+C_2}{C_1}u_1+C_3u_3+\dots+C_mu_m=0.$$

Действуем так до тех пор, пока в векторе C имеется более одной ненулевой координаты. В противном случае останавливаемся и восстанавливаем в найденных векторах исключенные координаты по формулам вида (3.24).

Замечание 3.7. Если выполняется условие (3.21), то, как следует из замечания 3.6, в этом случае можно считать, что выполняется (3.22). Но тогда из описания предложенного метода нахождения векторов $u^1,...,u^m \in \mathbf{R}^m$, удовлетворяющих (3.7), следует, что $u^i \in \mathbf{Q}^m$, $i = 1,2,\ldots,m$,

а следовательно, $v^i \in \mathbf{Q}^m$, $i = 0,1,\ldots,m$.

Пример 3.3. Пусть $C = (-1,2,-3,1,0)$. В соответствии с описанным методом найдем ортогональную систему векторов $u^1,...,u^5 \in \mathbf{R}^5$, удовлетворяющих (3.7) при $m = 5$. Полагаем $u^1 = (0,0,0,0,1)$. Далее, используя первые две ненулевые координаты вектора C, полагаем $u^2 = (2,1,0,0,0)$. Соответственно, используя третью и четвертую ненулевые координаты, полагаем $u^3 = (0,0,1,3,0)$. Далее исключаем переменные u_2, u_3, используя равенства (вида (3.24))

$$u_2 = -2u_1,\ u_3 = -3u_4. \tag{3.25}$$

После исключения переменных u_2, u_3, вектор C перейдет в вектор $C' = (5,-10,0)$ (действительно, подстановка (3.25) преобразует выражение $\langle C, u\rangle = -u_1 + 2u_2 - 3u_3 + u_4$ в выражение $-5u_1 + 10u_4$). Из уравнения $-5u_1 + 10u_4 = 0$ находим первую и четвертую координаты в векторе u^4: $u_1^4 = 2,\ u_4^4 = 1$. Вторая и третья координаты находятся теперь из равенств (3.25): $u_2^4 = -4,\ u_3^4 = -3$, откуда $u^4 = (2,-4,-3,1,0)$, а в соответствии с (3.7) полагаем $u^5 = -C = (1,-2,3,-1,0)$.

Замечание 3.8. Нетрудно также описать простой практически реализуемый алгоритм нахождения системы векторов из $\mathbf{R}^m$:

$$u^1,\ldots,u^r;\ u^{r+1},\ldots,u^m,$$

удовлетворяющей условию (3.15), необходимый для перехода от полинома $p(x)$, удовлетворяющего условию (3.12), к полиному $\hat{p}(z)$, $z \in \mathbf{R}_+^r$, удовлетворяющему условиям (3.13),(3.14) (см. замечание 3.4). При этом векторы $u^1,\ldots,u^m$ можно искать в виде системы взаимно ортогональных векторов, а в случае (3.21) можно дополнительно потребовать, чтобы $u^i \in \mathbf{Q}^m$, $i = 1,2,..,m$.

Рассмотрим теперь вопрос о достаточном условии выполнения условий: $\omega_j > 0$,

$j = 1,2,\ldots,n_2$. На этот вопрос отвечает следующее

Утверждение 3.7. Пусть $j \in \{1,2,\ldots,n_2\}$, $k^j \in \mathrm{Co}\, L_p$. Тогда $\omega_j > 0$.

Доказательство. Возможны два случая. Если

$$k^j \in \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p , \tag{3.26}$$

то, в силу утверждения 2.4,

$$f_j(t) \to +\infty \text{ при } |t| \to +\infty ,$$

откуда $\omega_j = \inf f_j(\mathbf{R}^m)$ достигается и поскольку $\forall t \in \mathbf{R}^m \; f_j(t) > 0$, то $\omega_j > 0$.

Пусть теперь $k^j \notin \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p$. В этом случае введем в рассмотрение полином $p_0(x) = p_1(x) - b_j x^{k^j}$. Тогда

$$L_{p_0} = L_p ,\; K_{p_0} = \{k^j\} \subset \mathrm{Co}\, L_p = \mathrm{Co}\, L_{p_0} ,\; \omega_j[p(x)] = \inf f_j(\mathbf{R}^m) = \omega_1[p_0(x)].$$

В силу следствия 3.1, от полинома $p_0(x)$ можно перейти к новому полиному меньшей размерности, с меньшим числом переменных, с единственным членом с отрицательным коэффициентом (как и в полиноме $p_0(x)$); для этого полинома условие вида (3.26) выполняется, и при этом сохраняется значение величины, аналогичной $\omega_1[p_0(x)]$. Но тогда, повторяя для нового полинома рассуждения, приведенные ранее для случая выполнения условия (3.26), получаем, что $\omega_j = \omega_1[p_0(x)] > 0.$

Замечание 3.9. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3.7. Тогда, используя доказательство этого утверждения, можно описать следующий метод нахождения любой величины ω_j, где $j \in \{1,2,\ldots,n_2\}$. Сначала определяем полином, для которого условие вида (3.26) выполняется, а затем вычисляем величину ω_j, используя известные градиентные методы (например, метод сопряженных градиентов или метод Ньютона; см., например, [11, гл.5]), поскольку задача нахождения величины ω_j в случае выполнения условия вида (3.26) будет являться задачей минимизации всюду выпуклой на $\mathbf{R}^m$ аналитической функции с единственной точкой минимума, в любой ограниченной окрестности которой целевая функция является сильно выпуклой (см. утверждения 2.3,2.4).

Замечание 3.10. Рассмотрим вопрос о практической проверке выполнения условия (3.1). Заметим, что

$$\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing ,\; \mathrm{int}\,\mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing ,$$

т.е. задача проверки выполнения условия (3.1) распадается на задачу проверки выполнения условия

$$\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing , \tag{3.27}$$

а также задачу проверки выполнения условия

$$\operatorname{int} \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing . \tag{3.28}$$

Практический метод проверки выполнения условия (3.27) описан в замечании 3.5. Проверка выполнения условия (3.28) сводится к задаче, заключающейся в выяснении размерности

линейного подпространства $H_0 = \operatorname{span}\{l^2 - l^1, \ldots, l^{n_1} - l^1\}$, для решения которой существует немало

алгебраических методов. При этом $\operatorname{int} \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing \Leftrightarrow \dim H_0 = m.$

Продолжение в разделе 4

Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте

В.Н. Нефедов

4. Описание метода

В настоящем разделе описывается метод проверки для произвольного полинома $p(x)$ вида (1.1) выполнения условия (1.2) (или (1.3)). Для осуществления этой проверки в соответствии с разделом 1 вычисляется величина α_* и определяется, какой из случаев (1.9-12) имеет место.

Суть предлагаемого метода заключается в сведении задачи определения величины α_* относительно исходного полинома $p(x)$ к совокупности аналогичных задач, но с меньшим числом отрицательных членов в полиноме.

Будем предполагать, что выполнено условие $K_p \subset \mathrm{Co}\, L_p$. Это условие является необходимым для (1.1) и (1.2) (см. соответствующее рассуждение в разделе 1, приведенное после формулы (1.20)).

Предположим, что для полиномов с количеством отрицательных членов, меньшем чем n_2, где $n_2 \geq 2$ (случай $n_2 = 1$ рассматривается ниже), мы уже можем успешно решать задачу вычисления величины α_* относительно этих полиномов. Из этого предположения следует, что мы уже умеем определять величины $\alpha^*_{1,2,\ldots,n_2-1}, \alpha^*_{1,2,\ldots,n_2-2,n_2}, \ldots, \alpha^*_{2,\ldots,n_2}$, а тем самым и величину

$\hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} = \max\{\alpha^*_{1,2,\ldots,n_2-1}, \alpha^*_{1,2,\ldots,n_2-2,n_2}, \ldots, \alpha^*_{2,\ldots,n_2}\}$. Опираясь на сделанное предположение, опишем алгоритм

определения величины α_* для исходного полинома $p(x)$ с n_2 отрицательными членами.

Предварительно проверяем выполнение условия

$$\mathrm{Co}\, K_p \cap \operatorname{int} \mathrm{Co}\, L_p \neq \varnothing \tag{4.1}$$

(см. замечание 3.10 о возможности практической проверки этого условия). Если условие (4.1) не выполняется, то осуществляем преобразование полинома $p(x)$, описанное в разделе 3 (см. следствие 3.1), т.е. переходим к новому полиному с меньшим числом переменных и меньшей размерностью, для которого условие вида (4.1) выполняется. При этом в обоих полиномах содержится одинаковое количество членов с отрицательными коэффициентами, и для этих полиномов совпадают значения величины α_*, а также значения величины $\hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}$. Таким образом, можно далее предполагать, что условие (4.1) выполнено.

Далее выясняем, какой из следующих случаев имеет место:

1) $\hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} < \alpha_*$ (условие **У**; см. раздел 1);

2) $\hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} = \alpha_*$.

Для этого организуем следующий процесс (метод статистических испытаний). Генерируем последовательность случайных векторов $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_{n_2-1}) \in \mathbf{R}^{n_2-1}$, равномерно распределенных в кубе $(0,1)^{n_2-1}$. Для каждого такого вектора $\rho \in (0,1)^{n_2-1}$ полагаем $\gamma = \Psi(\rho)$ и решаем задачу

$$G_\gamma(t) \to \min;\ t \in \mathbf{R}^m. \qquad (4.2)$$

В результате решения задачи (4.2) определяем единственную точку $t^*(\gamma) \in \mathbf{R}^m$ такую, что

$$\{t^*(\gamma)\} = \operatorname{Arg\,min} G_\gamma(\mathbf{R}^m)$$

(см. утверждение 2.7). В процессе таких испытаний накапливаем «рекорд»

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(N) = \max_\rho F(t^*(\Psi(\rho))) = \max_\rho g(f(t^*(\Psi(\rho)))) = \max_\rho s_{n_2}(\rho),$$

где N - число испытаний.

В случае 1, в силу следствия 2.2, выполняется

$$\exists \gamma^* \in \Gamma^+_{n_2} : r_{n_2}(\gamma^*) = g(f(t^*(\gamma^*))) = \alpha_*,$$

откуда, в силу утверждения 2.20, для $\rho^* = \Phi(\gamma^*)$ имеем

$$\exists \mu_0 > 0: \ \left\{\rho \in (0,1)^{n_2-1} \,\middle|\, s_{n_2}(\rho) > \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}\right\} \supseteq \left\{\rho \in (0,1)^{n_2-1} \,\middle|\, \left|\rho - \rho^*\right| < \mu_0\right\}. \qquad (4.3)$$

В силу того, что случайная величина ρ равномерно распределена в кубе $(0,1)^{n_2-1}$, при больших N с вероятностью, близкой к единице, для одной из случайных величин ρ выполнится неравенство $|\rho - \rho^*| < \mu_0$, а следовательно, в силу (4.3), будет справедливо

$\tilde{\alpha} \ge s_{n_2}(\rho) > \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}$. В случае же 2 при любых N будет выполняться неравенство $\tilde{\alpha} \le \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2}$.

Таким образом, описанный процесс позволяет определить, какой из двух случаев имеет место (см., кроме того, замечание 4.2). В случае 2 задача решена, а в случае 1 (который в дальнейшем будем называть *регулярным*) можно далее для определения величины α_* (с любой наперед заданной точностью) воспользоваться, например, методом из [3] (см. замечание 1.2), так как в этом случае выполняются условия (1.20),(1.21), а следовательно, задача (1.18) имеет единственное решение $\forall h \in \mathbf{R}^m$ (см. следствие 2.1) и, кроме того, можно построить координатный параллелепипед $\prod \subset \mathbf{R}_+^{n_2}$, необходимый для применения метода из [3]. В работе [3] требовалось, чтобы для параллелепипеда Π выполнялось условие $P(Y) \subseteq \Pi$, однако, как отмечалось в разделе 1, метод из [3] «работает» и при выполнении более слабого условия (1.19), вместо которого можно использовать условие

$$\forall \gamma^* \in \Gamma_{n_2}^+ \quad [F(t^*(\gamma^*)) = \alpha_* \Rightarrow f(t^*(\gamma^*)) \in \Pi\,] \tag{4.4}$$

(очевидно, что из (4.4) следует (1.19)). Покажем, что условие (4.4) выполняется для параллелепипеда

$$\prod = \left\{ y \in \mathbf{R}^{n_2} \mid \omega_j \le y_j \le \frac{b_j}{d},\, j = 1,2,\ldots,n_2 \right\},$$

где $d = \widetilde{\alpha} - \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} > 0$, и, в силу утверждения 3.7, $\omega_j > 0$, $j = 1,2,\ldots,n_2$. Для доказательства (4.4) заметим, что $\forall \gamma^* \in \Gamma_{n_2}^+$, если $F(t^*(\gamma^*)) = \alpha_*$, то $F(t^*(\gamma^*)) = \alpha_* \ge \widetilde{\alpha} = \hat{\alpha}_{1,2,\ldots,n_2} + d$, откуда, в силу утверждения 2.1, и следует выполнение $f(t^*(\gamma^*)) \in \Pi$.

Для завершения описания метода осталось описать метод вычисления величин α_j^* , $j = 1,2,\ldots,n_2$ (так как в соответствии с основной идеей метода, по величинам α_j^* затем находятся величины α_{ij}^* , далее величины α_{ijk}^* и т.д. до нахождения $\alpha_* = \alpha_{1,2,\ldots,n_2}^*$). Заметим, что $\alpha_j^* = b_j / \omega_j$, а величины $\omega_j = \inf f_j(\mathbf{R}^m)$, $j = 1,2,\ldots,n_2$, легко вычисляются в результате решения хорошо исследованных одноэкстремальных задач безусловной минимизации выпуклых бесконечно гладких функций, каждая из которых является сильно выпуклой в любой выпуклой ограниченной окрестности своей единственной точки минимума (см. замечание 3.9).

Замечание 4.1. Помимо нахождения величины α_* с любой желаемой точностью, мы можем также во многих случаях решить вопрос о достижимости величины α_* .

Если условие

$$\mathrm{Co}\, K_p \cap \mathrm{ri}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing \tag{4.5}$$

не выполняется для исходного полинома $p(x)$, то величина α_* не достижима (см. замечание 3.2). Если же условие (4.5) выполняется для исходного полинома $p(x)$, то в регулярном случае 1 величина α_* достижима (см. следствие 2.2 для случая $\mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$; в случае же $\mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p = \varnothing$ в замечании 3.4 приводится преобразование полинома $p(x)$, приводящее к выполнению условия вида $\mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$, а также условия вида (4.1), и, как показано в этом замечании, достижимость величины α_* для преобразованного полинома равносильна достижимости α_* [$p(x)$]). Таким образом, осталось рассмотреть случай 2 при выполнении условия (4.5) для исходного полинома $p(x)$. В примерах 3.1,3.2 показано, что в этом случае величина α_* может оказаться как достижимой, так и не достижимой. В связи с этим указанные два возможных случая (достижимости и недостижимости α_*) требуют более подробного рассмотрения. Прежде всего, будем при рассмотрении этих случаев для простоты считать, что для исходного полинома $p(x)$ выполняется условие $\mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$, откуда в силу (4.5) следует выполнение (4.1) (как уже отмечалось, преобразование полинома $p(x)$, описанное в замечании 3.4 и приводящее к выполнению условия вида $\mathrm{int}\, \mathrm{Co}\, L_p \ne \varnothing$, а также условия вида (4.1), сохраняет достижимость или недостижимость величины α_*). Если величина α_* достижима, то $\exists t^* \in \mathbf{R}^m$: $F(t^*) = \alpha_*$, а следовательно, для $y^* = f(t^*) \in Y$ выполняется $g(y^*) = \alpha_*$, откуда, в силу утверждения 2.9, $\exists \gamma^* \in \Gamma_{n_2}^+ : f(t^*(\gamma^*)) = y^*$ (где $\{t^*(\gamma^*)\} = \operatorname{Arg\,min} G_{\gamma^*}(\mathbf{R}^m)$, и, в силу строгой выпуклости функции $G_{\gamma^*}(t)$, имеем $t^*(\gamma^*) = t^*$). Но тогда для $\rho^* = \Phi(\gamma^*) \in (0,1)^{n_2-1}$ выполняется (см. (2.26))

$$s_{n_2}(\rho^*) = r_{n_2}(\Psi(\rho^*)) = r_{n_2}(\Psi(\Phi(\gamma^*))) = r_{n_2}(\gamma^*) = g(f(t^*(\gamma^*))) = \alpha_*.$$

При этом, в силу непрерывности функции $s_{n_2}(\rho)$ на $(0,1)^{n_2-1}$ (см. утверждение 2.21),

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall \rho \in B^{(n_2-1)}[\rho^*, \delta] \cap (0,1)^{n_2-1} \ \ s_{n_2}(\rho) \geq \alpha_* - \varepsilon. \tag{4.6}$$

Если же величина α_* не достигается, то $\forall \rho \in (0,1)^{n_2-1}$ $s_{n_2}(\rho) < \alpha_*$, и, в силу непрерывности $s_{n_2}(\rho)$ на $(0,1)^{n_2-1}$,

$$\forall \sigma \in (0, 1/2) \quad \max\{s_{n_2}(\rho) \mid \rho \in Q_\sigma = [\sigma, 1-\sigma]^{n_2-1}\} < \alpha_*. \tag{4.7}$$

Тогда для разделения рассматриваемых случаев (достижимости и недостижимости α_*) при использовании описанного метода статистических испытаний одновременно с накоплением общего «рекорда» $\widetilde{\alpha}$ накапливаем несколько частичных «рекордов» $\widetilde{\alpha}_i$, $i = 1,2,\ldots,\nu$ (в случае $\operatorname{int} \operatorname{Co} L_p = \varnothing$ метод статистических испытаний применяется не к исходному полиному $p(x)$, а к преобразованному в соответствии с замечанием 3.3). Для каждого $i \in \{1,2,\ldots,\nu\}$ $\widetilde{\alpha}_i$ - рекордное значение функции $s_{n_2}(\rho)$ на множестве Q_{σ_i}, где $1 > \sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_\nu > 0$, $\sigma_i = 2^{-i-1}$, $i = 1,2,\ldots,\nu$. Тогда в случае достижимости α_*, начиная с некоторого номера i_0, значительное увеличение числа испытаний N не будет приводить к существенному отличию величины $\widetilde{\alpha}$ от величин $\widetilde{\alpha}_i$, $i = i_0, i_0+1,\ldots,\nu$ (i_0 - первый номер, для которого $\exists \rho^* \in Q_{\sigma_{i_0}} : s_{n_2}(\rho^*) = \alpha_*$), поскольку, в силу (4.6), для любого $\varepsilon > 0$ при больших N величины $\widetilde{\alpha}_i$, $i = i_0, i_0+1,\ldots,\nu$, будут с вероятностью, близкой к 1, удовлетворять неравенствам $\alpha_* \geq \widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\alpha}_i \geq \alpha_* - \varepsilon$, $i = i_0, i_0+1,\ldots,\nu$, откуда $0 \leq \widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha}_i \leq \varepsilon$, $i = i_0, i_0+1,\ldots,\nu$.

Наоборот, в случае недостижимости α_*, в силу (4.7), а также, в силу утверждения 2.23, $\forall i \in \{1,2,\ldots,\nu\}$ при достаточно большом числе испытаний N будет почти наверное выполняться неравенство $\widetilde{\alpha} > \alpha_* - a_i/2$, где $a_i = \alpha_* - \max s_{n_2}(Q_{\sigma_i}) > 0$, откуда $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha}_i \geq \widetilde{\alpha} - (\alpha_* - a_i) = = \widetilde{\alpha} - \alpha_* + a_i > a_i/2$, т.е. при больших N величина $\widetilde{\alpha}$ будет с вероятностью, близкой к 1, превосходить $\widetilde{\alpha}_i$ на положительное число $a_i/2$.

Понятно, что чем больше номер ν и число испытаний N, тем более вероятным будет правильное разделение рассматриваемых двух случаев.

Замечание 4.2. Используя утверждение 2.2, мы можем в некоторых случаях выявить справедливость регулярного случая 1 без использования предложенного метода статистических испытаний. Действительно, в силу утверждения 2.2, выполнение условий этого утверждения является достаточным для справедливости случая 1. При этом справедливо неравенство (необходимое для построения параллелепипеда Π , удовлетворяющего (4.4)):

$\alpha_* - \hat{\alpha}_{1,2,\dots,n_2} \geq d$, где $d = \dfrac{b_j}{f_j(t^*)}$, точка t^* задается условиями утверждения 2.2.

Замечание 4.3. На практике хорошего приближения к α_* можно добиться путем увеличения числа испытаний N , поскольку, в силу утверждения 2.23, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ вероятность выполнения неравенства $\widetilde{\alpha}(N) \geq \alpha_* - \varepsilon$ стремится к 1 при $N \to \infty$. При этом сигналом для прекращения вычислений является незначительное увеличение «рекорда» $\widetilde{\alpha}$ при значительном увеличении N (стабилизация «рекорда»).

Замечание 4.4. Из замечания 4.3 следует, что при большом числе испытаний N мы будем располагать «хорошим» приближением $\widetilde{\alpha}(N)$ к числу α_* , а поэтому в регулярном случае при вычислении α_* с заданной точностью $\varepsilon > 0$ имеет смысл воспользоваться модификацией метода из [3], использующей идеи ветвления (методом «ветвей и границ»).

Замечание 4.5. Заметим, что в ходе выполнения описанного алгоритма величина α_* будет вычислена на некотором этапе работы алгоритма при решении основной или вспомогательной задачи (т.е. с меньшим числом членов с отрицательными коэффициентами) либо в простейшем случае, когда окажется справедливым равенство

$$\alpha_* = \max\left\{\alpha_1^*, \dots, \alpha_{n_2}^*\right\}, \tag{4.8}$$

либо в регулярном случае (относительно основной или вспомогательной задачи).

Действительно, если на последнем этапе имеет место нерегулярный случай 2, то для некоторого номера $k \in \{1,2,\dots,n_2-1\}$ и чисел $j_1,\dots,j_k$, где $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n_2$, выполняется равенство

$$\alpha_* = \alpha^*_{j_1,\dots,j_k}. \tag{4.9}$$

Пусть k - минимальное число, при котором достигается равенство (4.9). Тогда либо $k = 1$, что соответствует простейшему случаю (4.8), либо $k \geq 2$, и тогда, в силу минимальности k , величина $\alpha_* = \alpha^*_{j_1,\dots,j_k}$ определяется в соответствующей вспомогательной задаче в регулярном случае.

Список литературы:

1. Кановей Г.В., Нефедов В.Н. О некоторых необходимых условиях и достаточных условиях положительности действительного полинома от нескольких переменных в положительном ортанте. / МГУ. - Деп. в ВИНИТИ. - 07.02.01, №281-В00.- 42с.
2. Кановей Г.В., Нефедов В.Н. О необходимом условии положительности действительного полинома от нескольких переменных в положительном ортанте. // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. - 2000, №2. - с.24-29.
3. Нефедов В.Н. Необходимые и достаточные условия положительности и неотрицательности полинома в положительном ортанте. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 27.12.02, №2281-В2002.- 34с.
4. Arrow K.J., McManus M. A note of dynamic stability. // Econometrica. – 1958, v.26. - p.448-454.
5. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
6. Johnson C.R., Olesky D.D., Van den Driessche P. Stability of M-matrix products. // Linear and Multilinear Algebra. - 1985, v.18. - p.67-76.
7. Завалишин Н.Н., Логофет Д.О. Моделирование экологических систем по заданной диаграмме «запасы-потоки». // Математическое моделирование. - 1977, т.9, №9.
8. Логофет Д.О. Свикобианы компартабельных моделей и DaD-устойчивость свикобианов. // Доклады Академии Наук. – 1998, т.360, №2. - с.167-170.
9. Quirk J., Ruppert R. Qualitative economics and the stability of equilibrium. // Review of Economic Studies. – 1965, v.32. - p.311-325.
10. Segel L.A., Jacson J.L. Dissipative Structure: an explanation and ecological example. // J. Theor Biol. - 1972, v.37, №3. - p.545-559.
11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. – 520 с.
12. Нефедов В.Н. О получении верхней оценки для расстояния по Хаусдорфу между точным и возмущенным множествами, заданными выпуклыми полиномиальными ограничениями типа неравенств. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. – 03.01.89, №293-В89. - 102 с.
13. Нефедов В.Н. Об оценивании погрешности в выпуклых полиномиальных задачах оптимизации. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990, т.30, № 2. - с.200-216.
14. Нефедов В.Н. Об одном достаточном условии экстремума для полиномов и степенных рядов. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 16.05.90, №2666-В90. - 109 с.
15. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. - М.: Мир, 1972.- 312 с.
16. Нефедов В.Н. Об аппроксимации множества оптимальных решений в задачах векторной оптимизации. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 1987, №994-В87.
17. Нефедов В.Н. Аппроксимация множества оптимальных альтернативных решений. // Новые задачи оптимизации авиационных систем. Тем. сб. науч. тр. МАИ. - М., 1989. - с.92-100.
18. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. - 256 с.
19. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
20. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
21. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Сведения об авторе

Нефёдов Виктор Николаевич, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.;
контактный телефон: 756-21-74
E-mail:dep805@mai.ru