
УДК 519.62; 629.7.01

Исследование флаттера композитного крыла

Благодырёва О.В.

*Корпорация «Тактическое ракетное вооружение»,
ул. Ильича, 7, Королёв, Московская область, 141080, Россия*

e-mail: OksanaBlag@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается методика расчёта механических характеристик композитных материалов, используемая при расчёте безопасности от флаттера композитных несущих поверхностей с помощью полиномиального метода Ритца. Приведённая в статье методика реализована в виде отдельного программного обеспечения, разработанного в программной среде «Wolfram Mathematica 8».

Ключевые слова: флаттер, полиномиальный метод Ритца, композитный материал, моделирование колебаний летательного аппарата.

Введение

Композитный материал, также называемый композиционным материалом или композитом, представляет собой неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов, среди которых можно выделить армирующие элементы, обеспечивающие необходимые механические характеристики материала, и матрицу (или связующие), обеспечивающую совместную работу армирующих элементов. Композит обладает комплексом свойств, отражающим не только

исходные характеристики его компонентов, но и включающим свойства, которыми изолированные компоненты не обладают. [1]

Композиты, особенно с высокими эксплуатационными характеристиками, являются единственными существующими в настоящее время материалами, которые могут обеспечить одновременно малую массу, высокие прочность и жёсткость и хорошую стойкость к усталостным напряжениям. Удельная прочность при растяжении для углепластиков составляет около $9,2 \times 10^5$ м по сравнению с 2×10^5 м у алюминия. Предел выносливости углеродных волокон составляет 80% от статической прочности по сравнению с 35% для алюминия. [2]

На сегодняшний день композиты стали реальностью в промышленности в качестве заменителей металлов. Области их применения расширяются достаточно быстро. Использование композитов нашло своё применение и в авиационной технике, особенно в области военной авиации, где отдача от затрат наибольшая.

Расчёт безопасности от флаттера композитного крыла представляет особый интерес для исследования, поскольку механические характеристики композита значительно зависят от выбора ориентации при их измерении. Например, модуль упругости однонаправленного углепластика вдоль волокон в 10-15 раз превышает соответствующий модуль упругости в поперечном направлении, что, в свою очередь, влияет на жесткостные и прочностные свойства материала, а, следовательно, на аэроупругую устойчивость изготовленного из него крыла и всего летательного аппарата (ЛА) в целом.

Механика композитных материалов

Композитные материалы (КМ) – это материалы, состоящие из двух или более компонентов (армирующих составляющих и связующей их матрицы) и обладающие специфическими свойствами, отличными от суммарных свойств составляющих их компонентов. При разработке и изготовлении новых КМ с требуемыми свойствами и характеристиками, а также при создании конструкций из КМ, приходится учитывать влияние внешних условий (температура, высокая влажность) на эти материалы и ряд специфических свойств самих КМ (плотность, удельная прочность, рабочая температура, сопротивление усталостному разрушению и воздействию агрессивных сред). [2]

Достоинства и высокие механические характеристики КМ наиболее полно реализуются в ориентированных материалах, армированных параллельными волокнами, то есть в так называемых однонаправленных слоях или монослоях (рис. 1(а)), из которых путём укладки в различных направлениях образуются слоистые композиты (рис. 1(б)). Несмотря на большое многообразие структур, которые определяются числом слоёв, их толщиной и взаимной ориентацией, свойства таких материалов определяются свойствами однонаправленного слоя. [1]

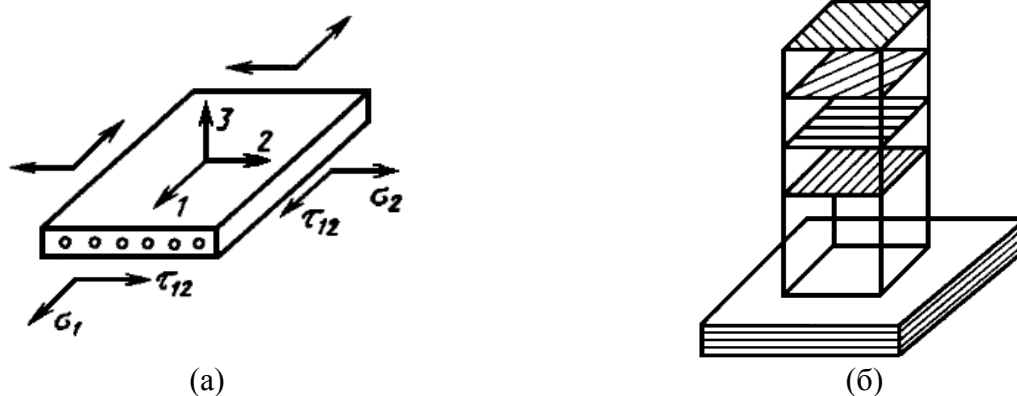


Рис. 1. Элемент однонаправленного слоя (а) и слоистого композита (б)

Механика ортотропной пластины (монослоя).

Пластиной называется тело, толщина которого существенно меньше его размеров в плане. Ортотропной пластиной называется пластина, содержащая ориентированные волокна и такая, что её механические свойства в направлении ориентации отличаются от механических свойств в перпендикулярном направлении.

Если пластина находится в одноосном напряжённом состоянии, то есть на неё действует нагрузка, приложенная либо параллельно, либо перпендикулярно волокнам, то пластина рассматривается как *специальная ортотропная*, и напряжённо-деформационная взаимосвязь для этой пластины выглядит как

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \text{ или } \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2, \quad (1)$$

где σ_k - нормальное напряжение в направлении k , E_k - модуль упругости, ε_k - соответствующая деформация, $k = 1, 2$.

При плоском напряжении, то есть напряжении, действующем более чем в одном направлении в пределах плоскости, важную роль играет коэффициент Пуассона:

$$\nu_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{или} \quad \nu_{21} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2)$$

Для нагрузки, действующей вдоль волокон Для нагрузки, действующей перпендикулярно волокнам

Соотношение между коэффициентами Пуассона и модулями упругости в каждом из двух направлений имеет вид:

$$\nu_{21} E_1 = \nu_{12} E_2. \quad (3)$$

Для плоского напряжения компонентами деформации являются растяжения, получаемые в результате действия приложенной силы, минус сжатия из-за эффекта

Пуассона, получаемые в результате действия другой силы, перпендикулярной этой приложенной силе. Таким образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21}\varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12}\varepsilon_1. \quad (4a)$$

Используя уравнение (1), получаем:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1}. \quad (4б)$$

Также при действии нагрузки на пластину может присутствовать поперечная сила. Касательное напряжение и деформация сдвига связываются друг с другом, подобно нормальным напряжениям и деформациям, с помощью постоянной, которая называется модулем сдвига (G):

$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}, \quad (5)$$

где τ_{12} - касательное напряжение (сдвиг в 1-2 плоскости), а γ_{12} - деформация сдвига.

На рисунке 2 даётся определение деформации сдвига.

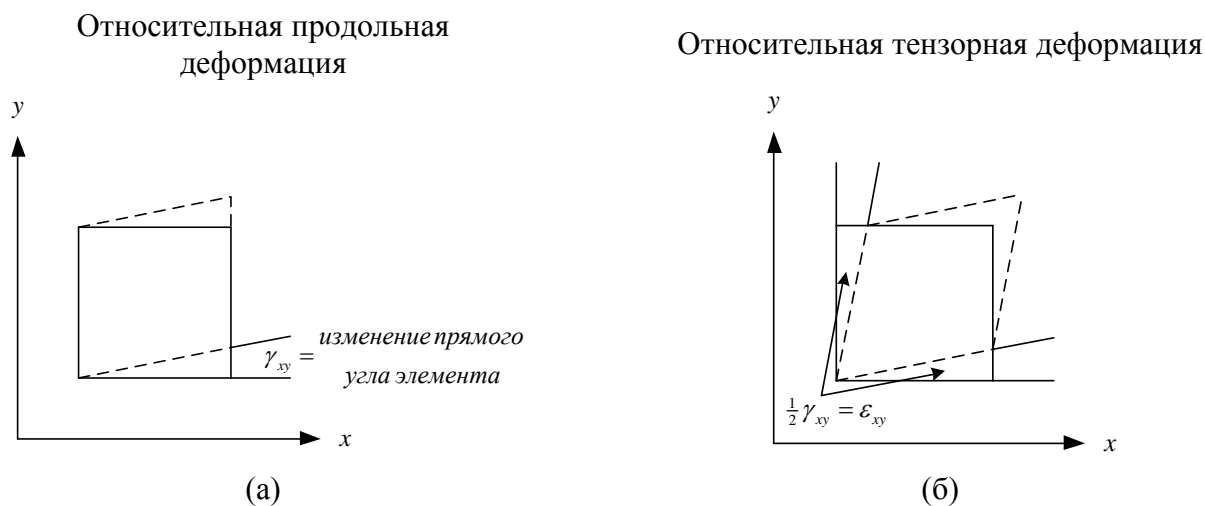


Рис. 2. Определение деформации второго рода (деформации сдвига).

Из уравнений (4б) и (5) находим, что напряжения и деформации связываются матричными уравнениями

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

где $[C]$ - матрица податливости, $[Q]$ - матрица приведённых жёсткостей

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для *обобщённой ортотропной пластины* направление действующей нагрузки не совпадает с главными направлениями материала (иначе говоря, отлично от 0° или 90°). Преобразуем напряжения и деформации в новые координаты, используя силовую схему свободного тела, изображённую на рисунке 3.

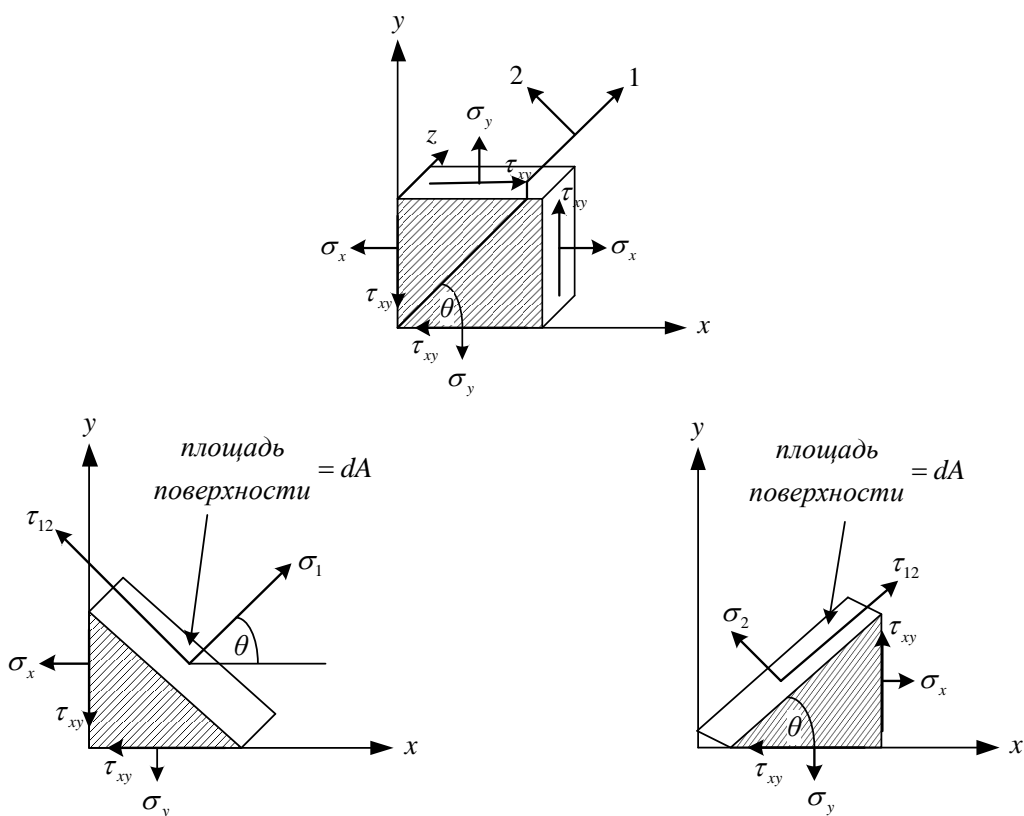


Рис. 3. Обобщённая ортотропная пластина.

Из силовой схемы свободного тела, изображённой на рисунке 3, находим, что

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{12} &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}\quad (8)$$

Таким образом, напряжения, описанные в системах координат 1,2 и x, y , могут быть преобразованы друг в друга с помощью матрицы преобразования $[T]$ или обратной к ней $[T]^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Эти же матрицы используются для преобразования деформаций:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Отметим, что при преобразовании деформаций должна быть использована тензорная деформация сдвига, а не относительная продольная деформация сдвига.

Это следует из геометрических построений, так как величина сдвига относительно осей x и y должна сохраняться при преобразовании этих осей в новые (рис. 2(б)).

Используя уравнения (9), (6) и (12), получаем:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где $[\bar{Q}]$ - матрица жёсткостей тонкой пластины (монослоя)

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [T]. \quad (14)$$

Отметим, что если θ - любой отличный от нуля угол между системами координат 1,2 и x,y , то деформация сдвига будет порождать нормальные напряжения, а относительные линейные деформации будут способствовать напряжению сдвига. Такое растягивающее сдвигающее взаимодействие будет иметь место в тонкой пластине, нагруженной под углом к волокнам отличным от 0° и 90° .

Механика многослойных композитных материалов.

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать только *симметричные* слоистые структуры (несимметричные слоистые структуры подробно описаны в [3]), то есть структуры, состоящие из слоёв, которые являются зеркальными отражениями друг друга относительно срединной плоскости. Также далее будем считать выполненными следующие условия:

1. Толщина слоистой структуры мала по сравнению с другими её размерами.
2. Тонкая пластина (монослой) слоистой структуры полностью связана.

3. Линии перпендикулярные поверхности слоистой структуры остаются прямыми и перпендикулярными поверхности после деформации.
4. Тонкая пластина и слоистая структура линейно упругие.
5. Внутренние напряжения и натяжения незначительны.

Для описания слоистой структуры вводят общую систему координат, относительно которой определяют угол отклонения волокон каждого из слоёв. Выбор такой системы координат, вообще говоря, произволен, но в большинстве случаев для упрощения расчётов в качестве координатных осей выбираются продольное (ось x - 0° -волокна) и поперечное (ось y - 90° -волокна) направления одного из слоёв.

В плоскости x, y определим углы, откладываемые от оси x по часовой стрелке, как положительные, а против часовой – как отрицательные. Далее запишем последовательность укладки слоёв в виде

$$[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]_S,$$

где S - индекс, означающий симметричную укладку слоёв. Первым в скобках стоит угол слоя, находящегося дальше всех от средней плоскости структуры. Далее слои располагаются по мере приближения к средней плоскости. Если число слоёв нечётно, то над значением последнего угла ставится черта:

$$[\theta_1, \theta_2, \dots, \bar{\theta}_n]_S.$$

Любые повторяющиеся элементы внутри слоистой структуры записываются в круглых скобках с нижним индексом, равным числу повторений, например,

$$[0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90]_S \text{ может быть записано как } [(0, 90)_4]_S.$$

Если смежные слои имеют одинаковые значения углов, но с разными знаками, то знак «плюс-минус» размещается перед значением угла этих слоёв, например,

$$[0, +45, -45, 90, -30, +30]_S \text{ может быть записано как } [0, \pm 45, 90, \mp 30]_S.$$

После определения последовательности укладки слоёв композита, необходимо вычислить её механические характеристики: модули упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Модули упругости и модуль сдвига определяются по формулам

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{N_x/h}{\varepsilon_x}, \quad E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{N_y/h}{\varepsilon_y}, \quad G_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{N_{xy}/h}{\gamma_{xy}}, \quad (15)$$

где h - толщина слоистой структуры, а N_x, N_y, N_{xy} - результирующие напряжения, которые для симметричной слоистой структуры задаются уравнением

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Здесь ε_x^0 , ε_y^0 и γ_{xy}^0 - деформации срединной плоскости слоистой структуры, а

A_{ij} - компоненты матрицы пространственной жёсткости $[A]$, которые имеют вид

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k t_k, \quad (17)$$

где t_k - это толщина k -ого слоя.

Для определения значения одного из результирующих напряжений полагаем два других равными нулю (например, если нужно найти N_x , то в (16) полагаем $N_y = 0, N_{xy} = 0$). Таким образом, из (16) находим:

$$\varepsilon_y^0 = \left(\frac{A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \right) \varepsilon_x^0 \quad \text{и} \quad \gamma_{xy}^0 = \left(\frac{A_{12}A_{26}A_{66} - A_{16}A_{26}^2 - A_{16}}{A_{22}A_{66}^2 - A_{26}^2A_{66} - A_{66}} \right) \varepsilon_x^0, \quad (18)$$

$$E_x = \frac{N_x/h}{\varepsilon_x^0} = \frac{1}{h} \left(A_{11} + \frac{2A_{12}A_{16}A_{26}A_{66} - A_{12}^2A_{66}^2 - A_{16}^2A_{26}^2 - A_{16}^2}{A_{22}A_{66}^2 - A_{26}^2A_{66}} \right), \quad (19)$$

аналогично,

$$\varepsilon_x^0 = \left(\frac{A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66}}{A_{11}A_{66} - A_{16}^2} \right) \varepsilon_y^0 \quad \text{и} \quad \gamma_{xy}^0 = \left(\frac{A_{12}A_{16}A_{66} - A_{16}^2A_{26} - A_{26}}{A_{11}A_{66}^2 - A_{16}^2A_{66} - A_{66}} \right) \varepsilon_y^0, \quad (20)$$

$$E_y = \frac{N_y/h}{\varepsilon_y^0} = \frac{1}{h} \left(A_{22} + \frac{2A_{12}A_{16}A_{26}A_{66} - A_{12}^2A_{66}^2 - A_{16}^2A_{26}^2 - A_{26}^2}{A_{11}A_{66}^2 - A_{16}^2A_{66}} \right), \quad (21)$$

и, наконец,

$$\varepsilon_x^0 = \left(\frac{A_{12}A_{26} - A_{16}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right) \gamma_{xy}^0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_y^0 = \left(\frac{A_{12}A_{16}A_{22} - A_{12}^2A_{26} - A_{26}}{A_{11}A_{22}^2 - A_{12}^2A_{22} - A_{22}} \right) \gamma_{xy}^0, \quad (22)$$

$$G_{xy} = \frac{N_{xy}/h}{\gamma_{xy}^0} = \frac{1}{h} \left(A_{66} + \frac{2A_{12}A_{16}A_{22}A_{26} - A_{16}^2A_{22}^2 - A_{12}^2A_{26}^2 - A_{26}^2}{A_{11}A_{22}^2 - A_{12}^2A_{22}} \right). \quad (23)$$

Из уравнений (18) и (20) находим коэффициенты Пуассона:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y^0}{\varepsilon_x^0} = \frac{(A_{12}A_{66} - A_{16}A_{26})}{(A_{22}A_{66} - A_{26}^2)} \quad \text{и} \quad \nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x^0}{\varepsilon_y^0} = \frac{(A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66})}{(A_{16}^2 - A_{11}A_{66})}. \quad (24)$$

Расчёт безопасности от флаттера с помощью полиномиального метода Ритца.

Методика расчёта безопасности от флаттера с помощью полиномиального метода Ритца ранее более подробно была описана в [4]. Напомним основные её положения.

Критерий безопасности от флаттера. Флаттером называют незатухающие упругие колебания ЛА, возникающие в полёте под действием набегающего аэродинамического потока, если скорость полёта достигает некоторой определённой величины, которая называется критической скоростью $V_{кр}$ полёта ЛА.

Основной критерий безопасности от флаттера состоит в том, что критическая скорость флаттера $V_{кр}$ должна превышать максимальную скорость V_{max} полёта ЛА не менее чем в k раз, где $k = 1.3$ – коэффициент запаса:

$$V_{кр} \geq k \cdot V_{max}.$$

Критическая скорость существенно зависит от плотности воздуха (высоты полёта) и его сжимаемости (числа Маха). Поэтому очень важной является задача определения критических скоростей для всех возможных режимов полёта или для всех возможных траекторий полёта.

ЛА может быть подвержен разнообразным формам флаттера, в зависимости от того, какие степени свободы ЛА являются «ведущими». Например, для рулевых форм флаттера ведущими степенями свободы будут угол отклонения руля и деформация поверхности, несущей руль; для безрулевых - деформация кручения и деформация изгиба несущей поверхности (например, крыла). Изменение связи

между этими ведущими степенями свободы приводит к заметному изменению значений критической скорости.

Выделение ведущих степеней свободы во многих случаях позволяет рассматривать колебания отдельных частей ЛА (чаще всего несущих поверхностей) изолированно, пренебрегая их взаимодействием с ЛА в целом, что значительно упрощает задачу.

Полиномиальный метод Ритца. При решении задачи о флаттере, как правило, ограничиваются определением границы устойчивости малых упругих колебаний конструкции в потоке воздуха в условиях установившегося полёта. При этом все аэродинамические характеристики считаются линейными функциями деформаций и скоростей деформаций, силами внутреннего трения в конструкции, как правило, пренебрегают.

Вводится следующая схематизация: предполагается, что деформацию ЛА можно описать деформацией его срединной поверхности, совпадающей с плоскостью xOz . Дополнительно вводится гипотеза прямых нормалей: при деформации системы все точки остаются на тех же нормалях к исходной поверхности и на тех же расстояниях от неё.

Полиномиальный метод Ритца, заключается в том, что функция деформации ЛА (или какой-либо из его частей) $w(x, z, t)$ представляется в виде полинома

$$w(x, z, t) = \sum_{k=0}^N u_k(t) x^{p_k} z^{q_k}, \quad (25)$$

где x – координата в направлении потока, а z – координата в направлении размаха, t – время, а неизвестные коэффициенты ряда $u_k(t)$ принимаются за обобщённые

координаты. Набор показателей степеней ряда задаётся таблицей в зависимости от характера граничных условий данной конкретной задачи и от того, сколько тонов собственных колебаний считается необходимым учитывать при расчёте на флаттер.

Дифференциальные уравнения задачи о малых колебаниях получаются из уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial u_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (26)$$

если за обобщённые координаты выбрать $u_k(t)$ коэффициенты ряда (25).

Кинетическую энергию T и потенциальную энергию Π колебаний представляют квадратичными формами от обобщённых скоростей и обобщённых координат.

Решениями системы N уравнений Лагранжа являются вектор собственных частот системы и матрица, соответствующая собственным формам в обобщённых координатах. С помощью матрицы перехода полученные собственные формы из обобщённых координат преобразуются в физические.

Моделирование ЛА. Конструкцию ЛА или какой-либо из его частей схематизируют девятью типами элементов, которым присвоены следующие условные названия: 1) «балки, работающие на изгиб»; 2) «балки, работающие на кручение»; 3) «панели»; 4) «ортотропные панели»; 5) «элероны»; 6) «линейные части»; 7) «сосредоточенные массы»; 8) «пружины»; 9) «трапеции». Минимальное количество элементов, с помощью которых можно описать ЛА, зависит от конструкционной схемы. Подробное описание этих элементов приведено в [4].

Расчёт на флаттер. Исходя из значений конструкционных параметров ЛА, для его модели вычисляются матрица инерции и матрица жёсткости, позволяющие

определить собственные частоты и собственные формы ЛА в отсутствие аэродинамического потока. После чего для исследования поведения ЛА под действием аэродинамического потока строятся матрицы аэродинамической жёсткости и аэродинамического демпфирования, используя один из следующих методов: метод сосредоточенных вихрей (при моделировании дозвукового потока) или метод поршня (при моделировании сверхзвукового потока).

Из полученных матриц инерции, жёсткости, аэродинамической жёсткости и аэродинамического демпфирования составляется общая матрица. Найденные собственные значения этой матрицы $\lambda = \delta + i\omega$ позволяют определить критическую частоту флаттера и, соответственно, найти критическую скорость флаттера. Флаттер возникает при тех значениях λ , для которых $\delta > 0$.

На основе описанной выше методики в программной среде «Wolfram Mathematica 8» на языке «Mathematica» разработана программа «Flutter Analysis Program». Программа обеспечивает возможность расчёта моделей несущих поверхностей ЛА, учитывая особенности материала, из которого сконструированы сами несущие поверхности. Расчётные значения выдаются в виде таблиц и графиков, что обеспечивает наглядность представления результатов.

Далее на основе вышеописанной методики приводится пример расчёта безопасности от флаттера композитного крыла с помощью полиномиального метода Ритца.

Пример

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Рассмотрим крыло, состоящее из двух материалов: титана и углепластика. Покажем, что структура композита непосредственно влияет на безопасность от флаттера. Для этого выполним расчёт для двух вариантов последовательности укладки слоёв углепластика.

Крыло моделируется семью ортотропными панелями и тремя пружинами (рис. 4). Крепление крыла к заделке предполагается упругим.

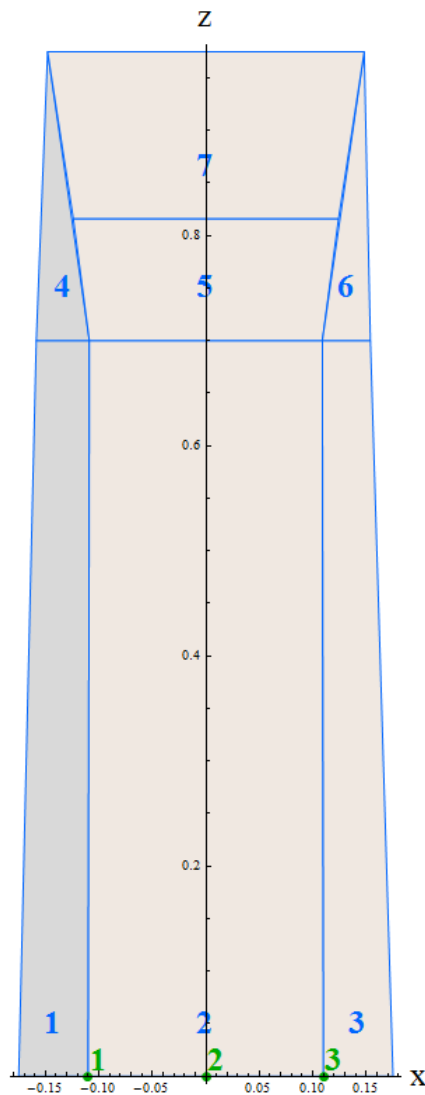


Рис. 4. Ортотропные панели и пружины

Механические и геометрические характеристики ортотропных панелей приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

Механические характеристики ортотропных панелей

ТИТАН $\rho = 4430[\text{кг} / \text{м}^3]$	УГЛЕПЛАСТИК $\rho = 1880[\text{кг} / \text{м}^3]$		
	<i>1 вариант</i>	<i>2 вариант</i>	
ОП №1,4	ОП №2,3,5,6,7	ОП №2,3,5,7	ОП №6
Механические характеристики материала			
$E = 1.21 \times 10^{11} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $G = 4,5149 \times 10^{10} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $\nu = 0,34$	$E_1 = 1.16 \times 10^{11} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $E_2 = 4.2 \times 10^9 [\text{Н} / \text{м}^2]$ $G = 2,55 \times 10^9 [\text{Н} / \text{м}^2]$ $\nu_{12} = 0,18$	$E_1 = 4.55 \times 10^{10} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $E_2 = 1.76 \times 10^{10} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $G = 2,07 \times 10^{10} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $\nu_{12} = 0,81$	$E_1 = 4.54 \times 10^{10} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $E_2 = 1.66 \times 10^{10} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $G = 1,9 \times 10^{10} [\text{Н} / \text{м}^2]$ $\nu_{12} = 0,79$
	Структура композита		
	$[(0)_n]_S, n = H/t$	$[(0, \pm 45)_n]_S, n = H/3t$	$[0, \pm 45, 45, \bar{0}]_S$

Здесь $t = 0.00125 [\text{м}]$ - толщина монослоя; H - высота ортотропной пластины (ОП).

Таблица 2

Ортотропные панели

№	x_0	z_0	x_1	z_1	x_2	x_3	H_0	H_1	H_2
1	-0,175	0	-0,1586	0,7	-0,11	-0,1089	0,0025	0,0025	0,015
2	-0,11	0	-0,1089	0,7	0,11	0,1089	0,015	0,01172	0,01456
3	0,11	0	0,1089	0,7	0,175	0,1538	0,015	0,011	0,002
4	-0,1586	0,7	-0,148	0,975	-0,1089	-0,148	0,0025	0,0025	0,01172
5	-0,1089	0,7	-0,124	0,816	0,1089	0,124	0,01172	0,00798	0,011
6	0,1089	0,7	0,148	0,975	0,1538	0,148	0,011	0,002	0,002
7	-0,124	0,816	-0,148	0,975	0,124	0,148	0,00798	0,0025	0,00754

Здесь x_0, z_0 - координаты переднего угла панели, имеющего меньшее значение z [м]; x_1, z_1 - координаты следующего по размаху угла панели [м]; x_2, x_3 - абсциссы остальных двух углов, при этом $z_0 = z_2 < z_1 = z_3, x_0 < x_2, x_1 \leq x_3$ [м]; H_0, H_1, H_2 - толщины в трёх углах панели [м].

Характеристики пружин приведены в таблице 3.

Таблица 3

Пружины

№	c	k	x	z	L	$\sin \theta$
1	10^{12}	148505	-0,11	0	0	0
2	10^{12}	148505	0	0	0	0
3	10^{12}	148505	0,11	0	0	0

Здесь c – коэффициент упругости на вертикальное смещение [Н/м]; k – коэффициент упругости на поворот [Н м]; x, z – координаты точки, к которой жёстко присоединён горизонтальный стержень с пружиной на конце [м]; L – длина стержня – вынос пружины [м]; $\sin \theta$ – синус угла между осью z и стержнем, пружина действует в плоскости стержня ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$).

Предполагается, что крыло прикреплено к заделке упруго. Степени полинома, соответствующего такой свободной схеме, приведены в таблице 4.

Таблица 4

Степени полинома

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_k	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4
q_k	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	0	1

Дозвуковой аэродинамический поток рассчитывается при числе Маха равном $M = 0.9$ и описывается трапецией, сведения о которой приведены в таблице 5.

Таблица 5

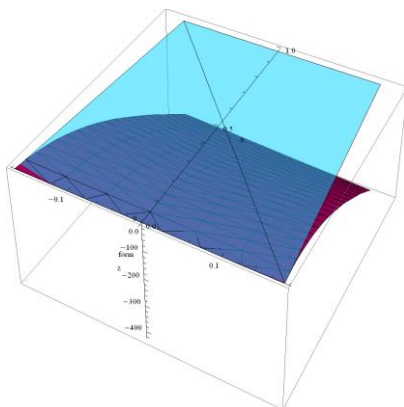
Трапеция

№	x_0	z_0	x_1	z_1	x_2	x_3	r	s
1	-0,175	0	-0,148	0,975	0,175	0,148	10	5

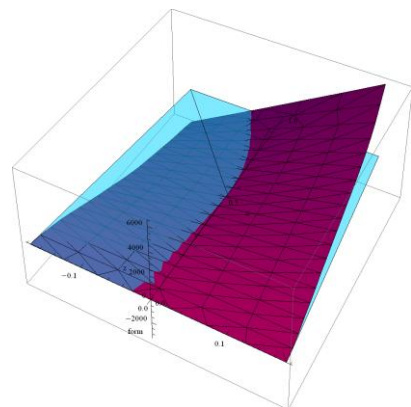
Здесь $x_i, z_i, i = 0, 1, 2, 3$ – координаты углов трапеции [м], при этом $z_0 = z_2 < z_1 = z_3, x_0 < x_2, x_1 \leq x_3$. Трапеция разбивается на r полос, в каждой из которых равномерно распределены s вихрей.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

В результате расчёта определяются первые восемь тонов собственных колебаний консервативной системы и соответствующие им формы. В инженерной практике известно, что наиболее важными являются первый тон изгиба и первый тон кручения. Их собственные формы и собственные частоты приведены на рисунках 5 и 6 для первого и второго вариантов укладки слоёв соответственно. На рисунках отчётливо видны узловые линии, по облику которых можно определить, что для первого тона колебаний форма близка к изгибу относительно бортовой хорды, а для второго - к вращению относительно оси близкой к оси вращения крыла.

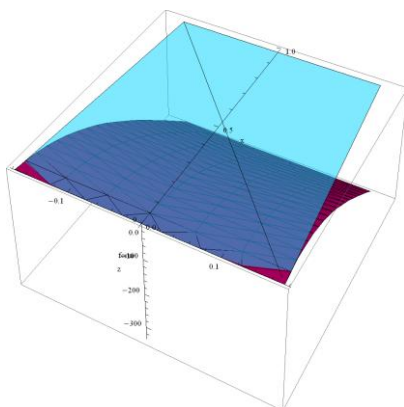


$$\omega_1 = 7,59 \text{ Гц (изгиб)}$$

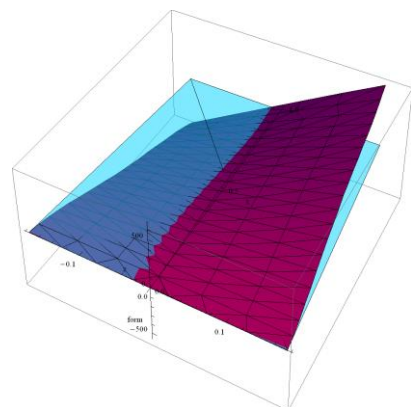


$$\omega_2 = 35,7 \text{ Гц (кручение)}$$

Рис. 5. Собственные частоты и формы для 1 варианта



$$\omega_1 = 10,85 \text{ Гц (изгиб)}$$



$$\omega_2 = 53,56 \text{ Гц (кручение)}$$

Рис. 6. Собственные частоты и формы для 2 варианта

Изменение комплексных частот крыла в дозвуковом потоке в зависимости от относительной плотности потока представлено в таблицах 6 и 7. Расчёт выполнен для скорости звука у земли $v_0 = 340$ [м/с]; плотности воздуха у земли $\rho_0 = 1.225$ [кг/м³].

Таблица 6

Комплексные частоты крыла в дозвуковом потоке (1 вариант)

ρ/ρ_0	H [м]	a [м/с]	V [м/с]	q/q_0	δ_1	ω_1	δ_2	ω_2
0.01	32641.8	304.012	273.61	0.00799508	-0.247214	7.66815	-0.139455	35.7411
0.04	23728.4	297.538	267.784	0.0306328	-1.04388	7.91622	-0.524266	35.8526
0.07	20226.2	295.18	265.662	0.0527611	-1.93434	8.19354	-0.866125	35.9445
0.1	17955.4	295.069	265.563	0.0753166	-2.93614	8.50746	-1.30443	35.9968
0.13	16282.6	295.069	265.563	0.0979116	-4.07126	8.8684	-2.18911	36.0304
0.16	14959.4	295.069	265.563	0.120507	-5.36705	9.29197	-32.5103	35.5826
0.19	13864.6	295.069	265.563	0.143102	-6.85566	9.80299	-37.8172	33.3714
0.22	12931.	295.069	265.563	0.165697	-8.56625	10.4442	-43.2033	30.9019
0.25	12117.1	295.069	265.563	0.188292	-10.4792	11.2985	-48.5042	28.077
0.28	11395.8	295.069	265.563	0.210887	-12.2296	12.5532	-54.0094	24.6636
0.31	10682.7	296.549	266.895	0.23583	-10.5454	14.5657	-62.9678	20.2348
0.34	9941.63	299.785	269.807	0.264327	0.739559	16.0816	-81.538	15.9277
0.37	9249.14	302.778	272.5	0.293422	11.2709	16.4274	-99.3638	12.1706
0.4	8598.51	305.564	275.008	0.323078	19.3928	16.4212	-114.788	7.36704
0.43	7984.32	308.172	277.354	0.353261	25.9634	16.287	-90.4017	0
0.46	7402.19	310.623	279.561	0.383943	31.4851	16.0944	-70.2114	0
0.49	6848.53	312.937	281.643	0.4151	36.2471	15.8719	-60.0064	0
0.52	6320.31	315.13	283.617	0.446708	40.4301	15.6335	-53.2485	0
0.55	5815.	317.213	285.492	0.478748	44.1549	15.3869	-48.2769	0
0.58	5330.43	319.198	287.279	0.511201	47.5063	15.1366	-44.3947	0
0.61	4864.73	321.095	288.986	0.544051	50.5467	14.8855	-41.2418	0
0.64	4416.31	322.911	290.62	0.577283	53.3234	14.6354	-38.6086	0
0.67	3983.76	324.654	292.189	0.610884	55.8732	14.3874	-36.3625	0
0.7	3565.83	326.329	293.696	0.644839	58.2254	14.1425	-34.4147	0
0.73	3161.44	327.942	295.148	0.679139	60.4036	13.9011	-32.7028	0
0.76	2769.62	329.497	296.547	0.713772	62.4274	13.6637	-31.1818	0
0.79	2389.51	330.999	297.899	0.748727	64.3131	13.4305	-29.8179	0
0.82	2020.32	332.452	299.207	0.783995	66.0743	13.2018	-28.5852	0
0.85	1661.37	333.858	300.472	0.819569	67.7228	12.9776	-27.4635	0
0.88	1312.03	335.221	301.699	0.855438	69.2687	12.7581	-26.4369	0
0.91	971.718	336.544	302.89	0.891596	70.7206	12.5432	-25.4925	0
0.94	639.918	337.829	304.046	0.928035	72.0863	12.3332	-24.6196	0
0.97	316.157	339.078	305.171	0.964749	73.3724	12.1279	-23.8095	0
1.	0.000154114	340.294	306.265	1.00173	74.5848	11.9274	-23.055	0
1.03	-308.929	341.478	307.33	1.03897	75.7287	11.7316	-22.3499	0
1.06	-611.043	342.631	308.368	1.07647	76.809	11.5406	-21.689	0
1.09	-906.656	343.757	309.381	1.11422	77.8298	11.3545	-21.0679	0
1.12	-1196.08	344.855	310.37	1.15221	78.7949	11.173	-20.4826	0
1.15	-1479.61	345.928	311.335	1.19045	79.7077	10.9964	-19.9298	0
1.18	-1757.51	346.976	312.278	1.22892	80.5714	10.8244	-19.4066	0
1.21	-1999.37	347.886	313.097	1.26678	81.3889	10.6572	-18.9105	0

Здесь ρ/ρ_0 - относительная плотность потока воздуха, H – высота полёта [м], a – скорость распространения звука в воздушной среде, V – скорость ЛА [м/с²], q/q_0 - относительный скоростной напор, $\delta_j + i\omega_j$, $j=1,2$ - собственные частоты 1 и 2 тона колебаний системы.

Из таблицы 6 видно, что для первого варианта укладки композита флаттер возникает на первом тоне колебаний при относительных плотностях потока $\rho/\rho_0 > 0,31$.

Комплексные частоты крыла в дозвуковом потоке (2 вариант)

ρ/ρ_0	H [м]	a [м/с]	V [м/с]	q/q_0	δ_1	ω_1	δ_2	ω_2
0.01	32 641.8	304.012	273.61	0.00799508	-0.281473	10.8424	-0.105563	53.5671
0.04	23 728.4	297.538	267.784	0.0306328	-1.14411	10.8143	-0.425103	53.5935
0.07	20 226.2	295.18	265.662	0.0527611	-2.03526	10.7867	-0.749654	53.6182
0.1	17 955.4	295.069	265.563	0.0753166	-2.95655	10.7593	-1.08028	53.641
0.13	16 282.6	295.069	265.563	0.0979116	-3.90976	10.7322	-1.41822	53.6619
0.16	14 959.4	295.069	265.563	0.120507	-4.89684	10.7052	-1.7649	53.6808
0.19	13 864.6	295.069	265.563	0.143102	-5.91995	10.6784	-2.12193	53.6977
0.22	12 931.	295.069	265.563	0.165697	-6.98148	10.6517	-2.49113	53.7125
0.25	12 117.1	295.069	265.563	0.188292	-8.08406	10.6249	-2.87455	53.7252
0.28	11 395.8	295.069	265.563	0.210887	-9.23064	10.5979	-3.27444	53.736
0.31	10 682.7	296.549	266.895	0.23583	-10.4245	10.5706	-3.69327	53.7448
0.34	9941.63	299.785	269.807	0.264327	-11.6693	10.5428	-4.13367	53.7518
0.37	9249.14	302.778	272.5	0.293422	-12.9693	10.5144	-4.59842	53.7573
0.4	8598.51	305.564	275.008	0.323078	-14.329	10.485	-5.09039	53.7616
0.43	7984.32	308.172	277.354	0.353261	-15.7541	10.4544	-5.61243	53.7651
0.46	7402.19	310.623	279.561	0.383943	-17.2504	10.4223	-6.16729	53.7683
0.49	6848.53	312.937	281.643	0.4151	-18.8253	10.3882	-6.75749	53.7719
0.52	6320.31	315.13	283.617	0.446708	-20.4869	10.3516	-7.3851	53.7766
0.55	5815.	317.213	285.492	0.478748	-22.245	10.3118	-8.05158	53.7833
0.58	5330.43	319.198	287.279	0.511201	-24.1109	10.2682	-8.75749	53.7932
0.61	4864.73	321.095	288.986	0.544051	-26.0983	10.2195	-9.50222	53.8073
0.64	4416.31	322.911	290.62	0.577283	-28.2237	10.1647	-10.2837	53.8269
0.67	3983.76	324.654	292.189	0.610884	-30.5071	10.1018	-11.0978	53.8532
0.7	3565.83	326.329	293.696	0.644839	-32.9734	10.0286	-11.9387	53.8876
0.73	3161.44	327.942	295.148	0.679139	-35.6536	9.9422	-12.7978	53.9311
0.76	2769.62	329.497	296.547	0.713772	-38.5879	9.83815	-13.6645	53.9845
0.79	2389.51	330.999	297.899	0.748727	-41.8281	9.71041	-14.5261	54.0482
0.82	2020.32	332.452	299.207	0.783995	-45.4441	9.54994	-15.3689	54.1222
0.85	1661.37	333.858	300.472	0.819569	-49.5317	9.34281	-16.1795	54.2057
0.88	1312.03	335.221	301.699	0.855438	-54.2275	9.06623	-16.9461	54.2972
0.91	971.718	336.544	302.89	0.891596	-59.7343	8.68022	-156.515	48.0759
0.94	639.918	337.829	304.046	0.928035	-66.3673	8.10722	-156.864	45.5044
0.97	316.157	339.078	305.171	0.964749	-74.6431	7.17207	-155.614	42.7328
1.	0.000154114	340.294	306.265	1.00173	-85.4442	5.34604	-151.88	39.7632
1.03	-308.929	341.478	307.33	1.03897	-79.0756	0	-144.214	36.6961
1.06	-611.043	342.631	308.368	1.07647	-62.7578	0	-131.237	33.9266
1.09	-906.656	343.757	309.381	1.11422	-55.1565	0	-114.817	32.07
1.12	-1196.08	344.855	310.37	1.15221	-50.0581	0	-99.4597	31.1259
1.15	-1479.61	345.928	311.335	1.19045	-46.232	0	-86.7802	30.6597
1.18	-1757.51	346.976	312.278	1.22892	-43.1906	0	-76.3965	30.3996
1.21	-1999.37	347.886	313.097	1.26678	-40.6867	0	-67.7165	30.2304

Из таблицы 7 видно, что для второго варианта укладки композита при рассматриваемых относительных плотностях воздуха флаттера не возникает.

Частотный годограф первых двух тонов колебаний представлен на рисунках 7 и 8, визуализирующих значения, полученные в таблицах 6 и 7. На рисунке 7 виден переход значений декремента δ первого тона колебаний в правую полуплоскость, что говорит о неустойчивости полученного для этого тона корня. Соответственно, на частоте около 16 Гц у крыла рассматриваемой конструкции (для 1 варианта укладки слоёв) возникает флаттер. Из рисунка 8 видно, что частоты первых двух

тонов колебаний находятся достаточно далеко друг от друга, то есть опасности флаттера не возникает. Таким образом, в обоих случаях – для вариантов 1 и 2 – проведён анализ возможности возникновения флаттера.

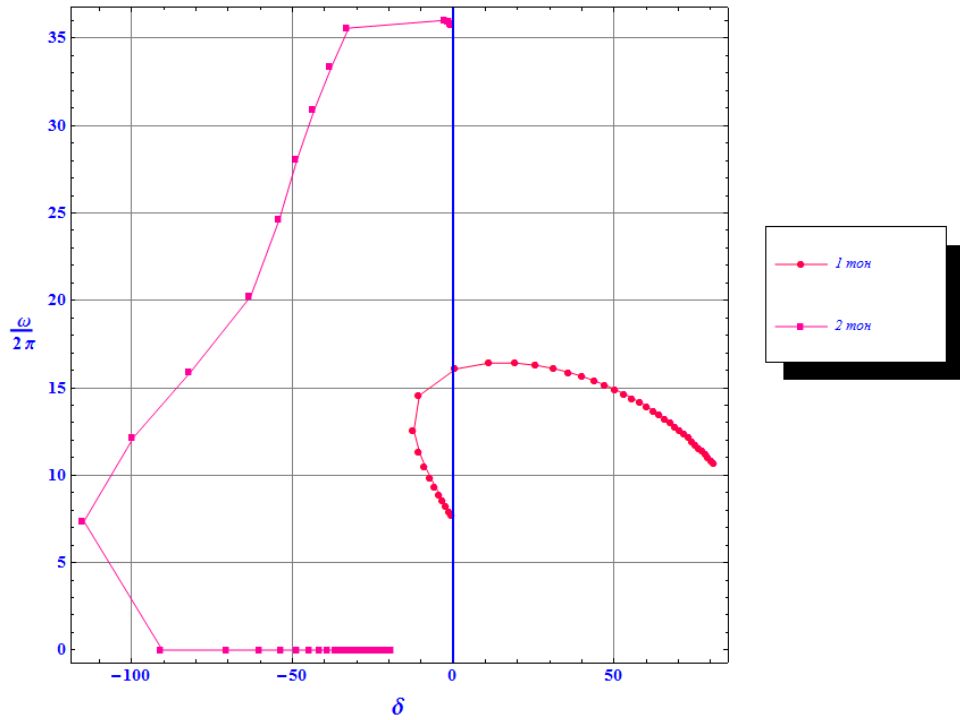


Рис. 7. Годограф колебаний в дозвуковом потоке (1 вариант)

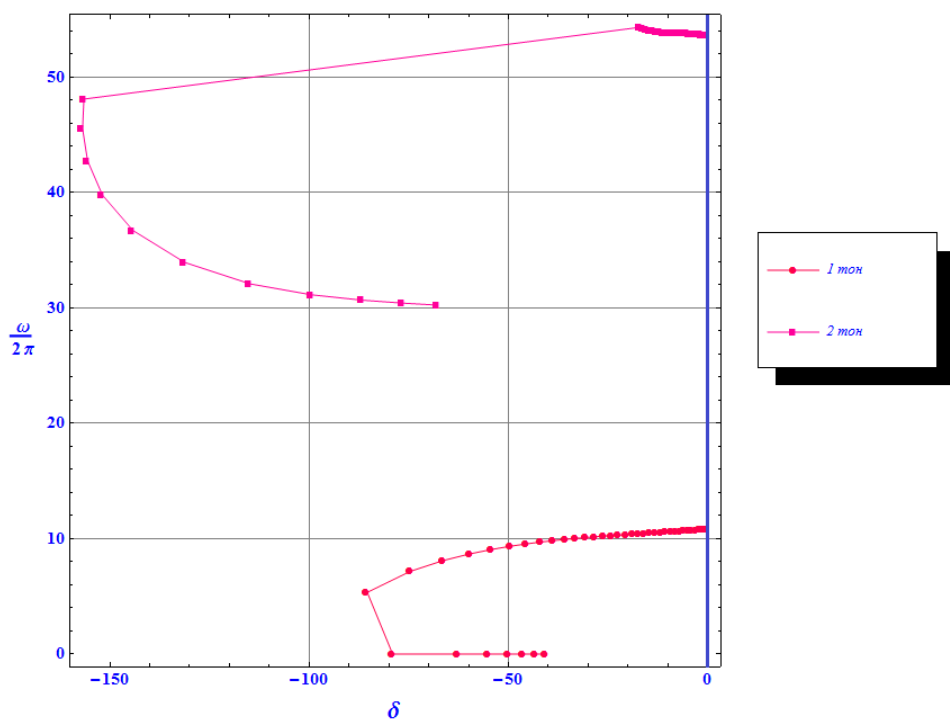


Рис. 8. Годограф колебаний в дозвуковом потоке (2 вариант)

Заключение

Применение КМ при их правильном использовании даёт возможность значительно повысить лётные характеристики ЛА в результате облегчения конструкции. При этом не происходит потери устойчивости ЛА, так как КМ позволяют изменять упругие характеристики формируемого изделия в зависимости от выбора заданной структуры материала.

Полиномиальный метод Ритца вместе с предложенной в работе методикой расчёта механических характеристик КМ позволяет произвести расчёт безопасности от флаттера с достаточной точностью. Эффективность в решении этой задачи объясняется простотой математической модели, быстротой подготовки расчётных данных и скоростью расчёта. Это является очень важным фактором, поскольку производство КМ и изделий из них довольно сложно технологически и требует больших финансовых затрат. Предварительный расчёт формируемого изделия при различных исходных данных позволяет получить экономическую выгоду, так как модель изделия формируется на компьютере, и инженер-конструктор может уже на начальном этапе определить наиболее подходящий вариант для укладки слоёв композита.

Библиографический список

[1] Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

[2] Справочник по композиционным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина; Пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; Под ред. Б.Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

[3] Nettles A.T. Basic Mechanics of Laminated Composite Plates, NASA, Marshall Space Flight Center, October 1994, 103 pp.

[4] Благодарёва О.В. Расчёт на безопасность от флаттера крыла малого удлинения методом полиномов, Электронный журнал «Труды МАИ», Выпуск №68, www.mai.ru/science/trudy/