

Научная статья

УДК 531

DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)

ТРОСОВАЯ СИСТЕМА В КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧКАХ ЛИБРАЦИИ L_1 , L_2 СИСТЕМЫ МАРС-ФОБОС

Владимир Степанович Асланов^{1✉}, Дарья Владимировна Нерядовская²

^{1,2}Самарский национальный исследовательский университет

имени академика С.П. Королева,

Самара, Россия

¹aslanov_vs@mail.ru✉

²nerядovskayadv@yandex.ru

Аннотация. Изучается возможность использования одной из коллинеарных точек либрации L_1 или L_2 для развертывания тросовой системы в направлении Фобоса в плоской круговой ограниченной задаче трех тел в системе Марс-Фобос. Орбитальный космический аппарат, с помощью которого «закрепляется» один конец троса, расположен в коллинеарной точке либрации L_1 или L_2 , и удерживается в одной из этих неустойчивых точек с помощью низкой тяги своих двигателей. Получено уравнение движения тросовой системы в полярной системе координат для троса постоянной длины, найдены положения равновесия и определена зависимость периода колебаний от длины троса. Проведено сравнение приближенного решения

для малых углов отклонения троса от местной вертикали с численным. Результаты этого исследования могут быть использованы для обеспечения будущих космических миссий. Так, например, в системе Марс-Фобос можно построить космический лифт, трос которого будет проходить через точку либрации L_1 или L_2 . Кроме того, такой лифт может служить промежуточной станцией для проведения исследований, связанных с изучением пространства вокруг нее, а также как площадку для межпланетных перелетов. «Закрепив» тросовую систему в коллинеарной точке либрации L_1 или L_2 системы Марс-Фобос, можно проводить дистанционные исследования Фобоса с помощью аппарата с датчиками, который зависнет над его поверхностью.

Ключевые слова: тросовая система, точка либрации, положение равновесия, фазовая плоскость, аналитическое решение, эллиптическая функция

Финансирование: работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Проект № 19-19-00085)

Для цитирования: Асланов В.С., Нерядовская Д.В. Тросовая система в коллинеарных точках либрации L_1 , L_2 системы Марс-Фобос // Труды МАИ. 2022. № 122. DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)

A TETHER SYSTEM AT THE L_1 , L_2 COLLINEAR LIBRATION POINTS OF THE MARS-PHOBOS SYSTEM

Vladimir S. Aslanov^{1✉}, Daria V. Neryadovskaya²

^{1,2}Samara National Research University (Samara University),

Samara, Russia

¹aslanov_vs@mail.ru✉

²neryadovskayadv@yandex.ru

Abstract. The article considers one of the L_1 or L_2 collinear libration points application for a tether system deployment in the direction of Phobos in a plane circular restricted three-body problem in the Mars-Phobos system. An orbital spacecraft by which one of the tether ends is being fixed is located in L_1 or L_2 collinear libration points and is being held in one of these unstable points by the low thrust of its engines. The equation of the tether system motion in the polar coordinates system was obtained for the tether of constant length, the equilibrium positions were found, and the dependence of the vibrations period on the tether length was determined. Comparison of approximate solution for the small angles of the tether deviation from the local vertical with the numerical one was performed. The article demonstrates that the system “fixed” either in both the L_1 point and L_2 has potential wells in cases when the tether is being directed towards the Phobos side. It was revealed that the dependencies of the vibrations period on the tether length for the L_1 and L_2 points were fundamentally different. Comparison for both L_1 and L_2 of approximate and numerical solutions revealed herewith that the vibrations amplitude remained constant in contrast to the frequency. The results of this study may be employed for the future space missions provision. Thus, for example, a space lift may be arranged in the Mars-Phobos system, which tether will pass through the L_1 or L_2 libration point. Besides, such lift may serve as an intermediate station for conducting studies associated with the space exploration around it,

as well as a platform for the interplanetary flights. “Fixing” the tether system in the L_1 or L_2 collinear libration point of the Mars-Phobos system will allow conducting remote studies of Phobos employing a vehicle with sensors, which will hover above its surface.

Keywords: tether system, libration point, state of equilibrium, phase plane, analytic solution, elliptic function

Funding: this study was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 19-19-00085)

For citation: Aslanov V.S., Neryadovskaya D.V. A tether system at the L_1 , L_2 collinear libration points of the Mars-Phobos system. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)

Введение

Запуски автоматических межпланетных станций (АМС) для изучения Марса начались с 1960 года, с этого времени стали активно разрабатываться программы по его изучению. На основании экспериментальных данных, полученных в процессе работ АМС по исследованию Марса, ученые в статье [1] выявили достаточно сильные ветровые воздействия в нижнем слое атмосферы планеты. Осуществление межпланетных экспедиций в отличие от орбитального полета порождает ряд новых вопросов связанных, в частности, с гарантированием надежности функционирования бортовых систем при длительном автономном полете и безопасности для человека таких перелетов. Исследование этих задач на основе данных, полученных в ходе экспериментов проекта «Марс-500» проведено в работе [2]. Среди других проблем,

требующих решения, находится моделирование траектории полета, в работе [3] проведен расчет для межпланетного перелета Земля-Марс с малой тягой без использования метода грависфер. Двигатели малой тяги используются не только для полета между двумя планетами, но и для других задач, описанных в работе [4]. В статье [5] рассматривается одна из возможных схем реализации пилотируемой миссии на Марс. Научный интерес направлен не только на изучение Марса, но и его спутника Фобоса, происхождение которого в настоящее время точно не установлено. Доставка на Землю образцов с Фобоса даст возможность получить новое представление о структуре его поверхности [6, 7]. В 1988 году в рамках Международного космического проекта «Фобос» были запущены первые советские АМС «Фобос-1» и «Фобос-2», которые предназначались для исследования Марса и Фобоса. Станция «Фобос-1» не выполнила основные задачи полета, но в ходе полета АМС «Фобос-2» был проведен эксперимент под названием «Небесная механика», в результате которого была построена теория движения Фобоса и было сделано уточнение его гравитационной постоянной. Российское космическое агентство в 2011 году запустило АМС «Фобос-Грунт», в задачи аппарата входило: сбор образцов грунта с поверхности Фобоса и доставка его на Землю для дальнейшего изучения физико-химических характеристик, подробное описание этапов миссии и ее анализ представлен в работах [8-10]. Программа «Фобос-Грунт» не была реализована из-за нештатной ситуации, межпланетная станция не смогла покинуть окрестности Земли, оставшись на низкой околоземной орбите. Несмотря на ряд неудачных запусков ученые аэрокосмической отрасли по всему миру продолжают активно заниматься

проектированием траекторий для посадки на поверхность Фобоса и созданием миссий для его изучения, описанных в работах [11-13]. Японское агентство аэрокосмических исследований (JAXA) разрабатывает автоматический аппарат Martian Moons Exploration (MMX) для исследования Фобоса, запуск которого запланирован на 2024 год [14]. Основной научной целью этой миссии является выяснение происхождения спутников Марса и процесса их эволюции. В работе Национального центра космических исследований (CNES) [15] для миссии, подобной MMX, проведен анализ траектории для этапа сближения с Фобосом. В работе Бристольского университета (University of Bristol) и компании Airbus Defence and Space [16] проведено проектирование траектории и управления для автономной посадки на поверхность Фобоса. В 2017 году NASA предложило инновационную структуру миссии Phobos L1 Operational Tether Experiment (PHLOTE) для исследования поверхности Фобоса с использованием тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_1 с помощью орбитального космического находящегося за счет низкой тяги двигателей в непосредственной близости от этой коллинеарной точки [17]. После развертывания троса предполагается производить дистанционное исследование Фобоса с помощью небольшого аппарата с датчиками, который будет прикреплен к этому тросу. В работе [18] рассматривается миссия, аналогичная миссии PHLOTE, в ней проводится подробное исследование поведения тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_1 , с использованием классических уравнений Нехвила. Развитием этой работы является настоящая статья, в которой изучаются особенности движения и аналитически определяется период

колебаний тросовой системы неизменной длины, «закрепленной» как в точке либрации L_1 , так и в L_2 . Кроме того предполагается, что Фобос движется по круговой орбите вокруг Марса, масса аппарата, прикрепленного к тросу, является малой по сравнению с массой Марса и Фобоса.

Система Марс-Фобос имеет важную особенность: Фобос всегда повернут к Марсу одной и той же стороной, так как период вращения Фобоса вокруг своей оси совпадает с периодом его обращения вокруг Марса. Благодаря такому свойству допускается дистанционное исследование поверхности Фобоса непосредственно под коллинеарными точками либрации L_1 и L_2 , которые располагаются на довольно близком расстоянии от него ($\sim 3,4$ км).

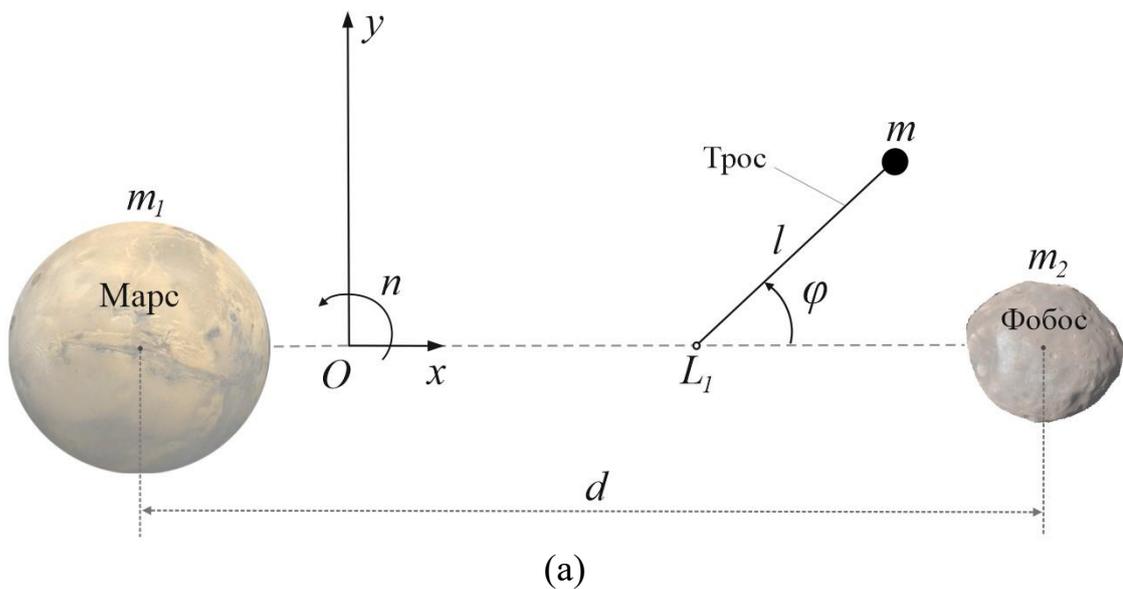
Целью работы является определение особенностей движения и нахождение положений равновесия тросовой системы, «закрепленной» в одной из коллинеарных точек либрации L_1 или L_2 системы Марс-Фобос. Для достижения цели построена математическая модель движения системы, состоящей из троса, «закрепленного» в одной из коллинеарных точек либрации L_1 или L_2 системы Марс-Фобос, и аппарата, прикрепленного к нему; определен первый интеграл и построен фазовый портрет; аналитически найден период колебаний системы.

Статья состоит из введения и четырех частей. В первой выводятся уравнения движения в полярной системе координат для троса постоянной длины. Вторая часть посвящена определению потенциальной энергии, уравнений фазовых кривых и нахождению положений равновесия системы. В третьей части получены упрощенные

уравнения для малых углов отклонения троса от местной вертикали в эллиптических функциях Якоби и найдена аналитическая формула для определения периода колебаний, и исследована его зависимость от длины троса. В четвертой части сравниваются полученные аналитические и численные решения.

Уравнения движения

В качестве математической модели используются дифференциальные уравнения классической круговой ограниченной задачи трех. Рассматривается механическая система, когда трос «закреплен» в точке либрации L_1 или L_2 , и к нему прикреплен аппарат массы m , как показано на рисунке 1.



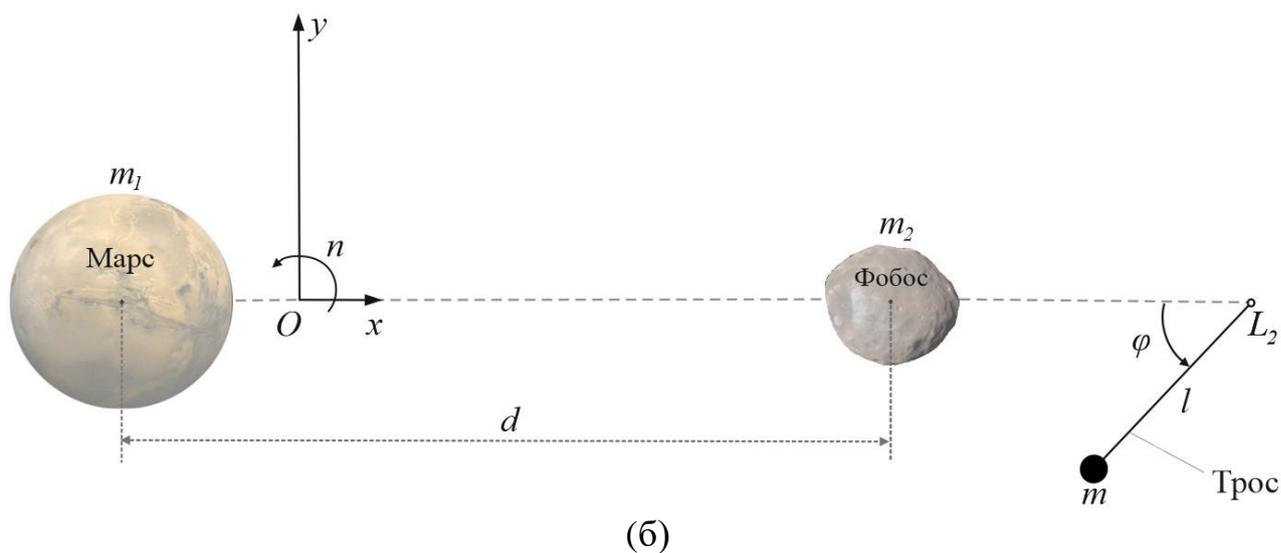


Рис. 1 – (а) Тросовая система, «закрепленная» в точке L_1 системы Марс-Фобос,

(б) Тросовая система, «закрепленная» в точке L_2 системы Марс-Фобос

Расстояния от аппарата до Марса и Фобоса в соответствии с рисунком 2 определяются по формулам

$$r_1 = \sqrt{(x + d\mu)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - d(1 - \mu))^2 + y^2},$$

где d - расстояние между Марсом и Фобосом, $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

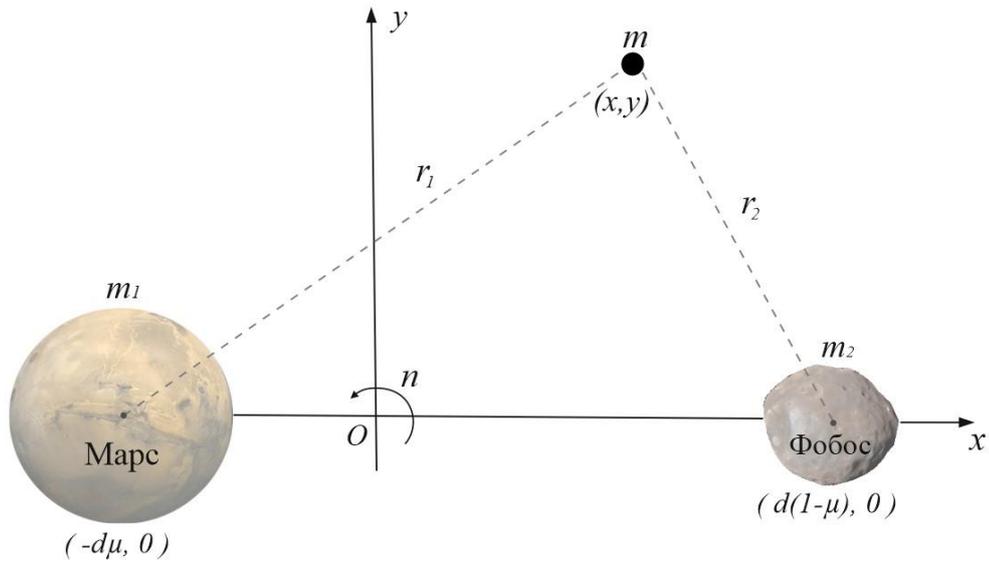


Рис. 2 – Расстояние от аппарата до Марса и Фобоса

Дифференциальные уравнения движения в круговой ограниченной задаче трех тел примут вид [19]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}}$ - угловая скорость вращения, G - гравитационная постоянная,

m_1 - масса Марса, m_2 - масса Фобоса, $U = G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$ - силовая функция.

Будем рассматривать полярные координаты (ρ, φ) с помощью замены:

$$\begin{cases} x = x_{L_i} + \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad i = 1, 2$$

где x_{L_i} - расстояние от начала координат до точки либрации L_i , индекс $i = 1, 2$ отвечает за точку либрации L_1 и L_2 соответственно, ρ - длина троса, φ - угол отклонения троса от оси абсцисс.

Расстояния от начала координат до точек либрации L_1 и L_2 определяются по формулам

$$x_{L_1} = d[1 - (\frac{\mu}{3})^{\frac{1}{3}}],$$

$$x_{L_2} = d[1 + (\frac{\mu}{3})^{\frac{1}{3}}].$$

Аналитическое решение системы (1) для троса постоянной длины $\rho = l = const$ будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{n^2 x_{L_i} \sin \varphi}{l} + \frac{Gm_1(d\mu + x_{L_i}) \sin \varphi}{l((d\mu + x_{L_i} + l \cos \varphi)^2 + l^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + \frac{Gm_2(d(\mu - 1) + x_{L_i}) \sin \varphi}{l(d(\mu - 1) + x_{L_i} + l \cos \varphi)^2 + l^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (2)$$

Устойчивые положения равновесия

Определим положения равновесия исследуемой механической системы, чтобы выявить особенности ее движения, для этого необходимо найти потенциальную

энергию и уравнения фазовых кривых. Уравнению (2) отвечает первый интеграл, который определяется выражением

$$E(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + P(\varphi) = h = const, \quad (3)$$

где потенциальная энергия имеет вид

$$P(\varphi) = -\frac{n^2 x_{L_i} \cos \varphi}{l} - \frac{Gm_1}{l^2 \sqrt{l^2 + d^2 \mu^2 + x_{L_i}^2 + 2dl\mu \cos \varphi + 2x_{L_i}(d\mu + l \cos \varphi)}} - \frac{Gm_2}{l^2 \sqrt{l^2 + d^2(\mu - 1)^2 + x_{L_i}^2 + 2dl(\mu - 1) \cos \varphi + 2x_{L_i}(d(\mu - 1) + l \cos \varphi)}}. \quad (4)$$

Тогда из (3) с учетом (4) следует, что уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2(h - P(\varphi))}.$$

На рисунках 3-4 представлены потенциальная энергия и фазовые траектории, соответствующие разным уровням потенциальной энергии P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) для длины троса $l = 3000$ м.

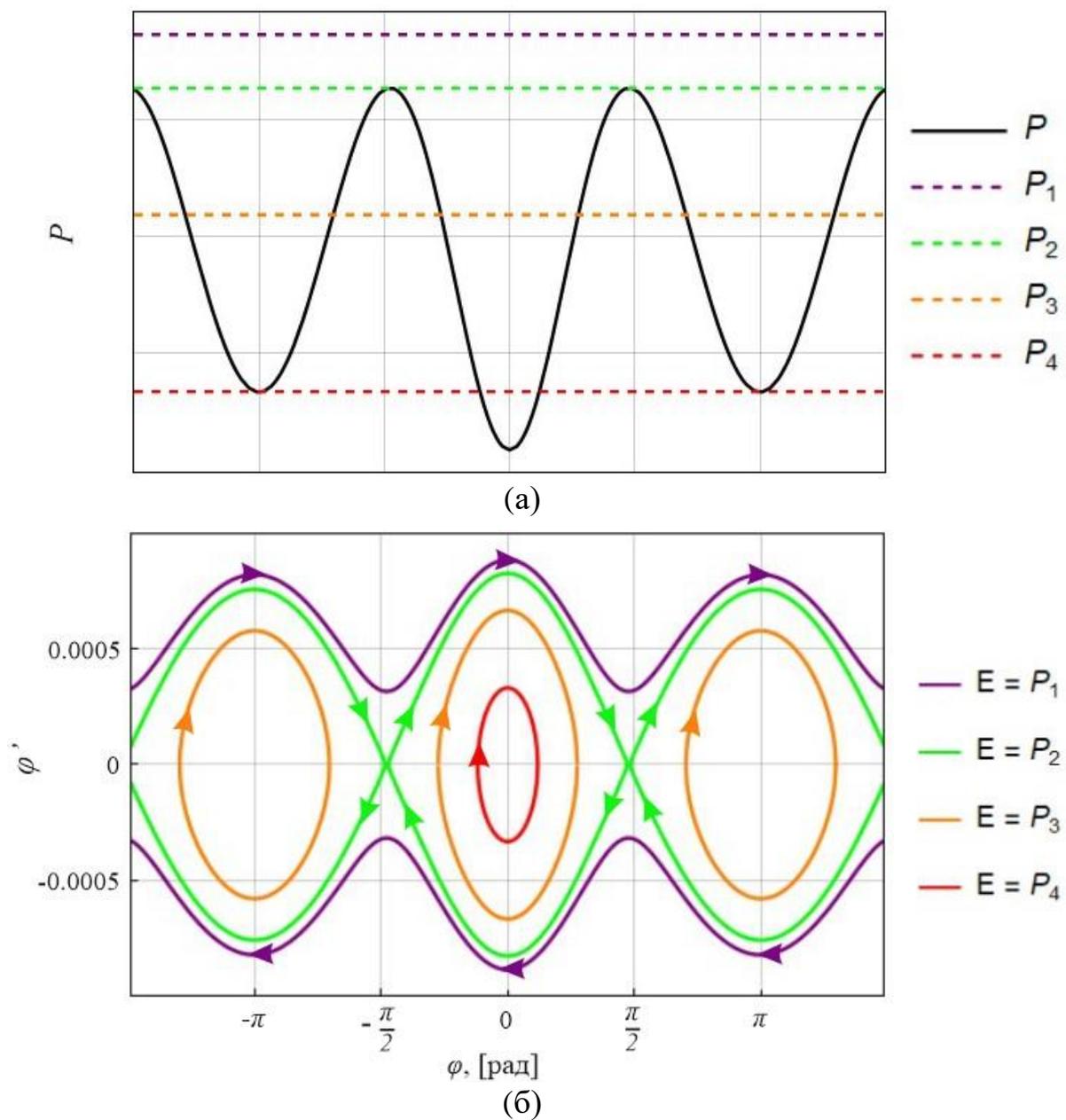


Рис. 3 – (а) Потенциальная энергия для тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_1 , (б) Фазовая плоскость для тросовой системы, «закрепленной» в точке

либрации L_1

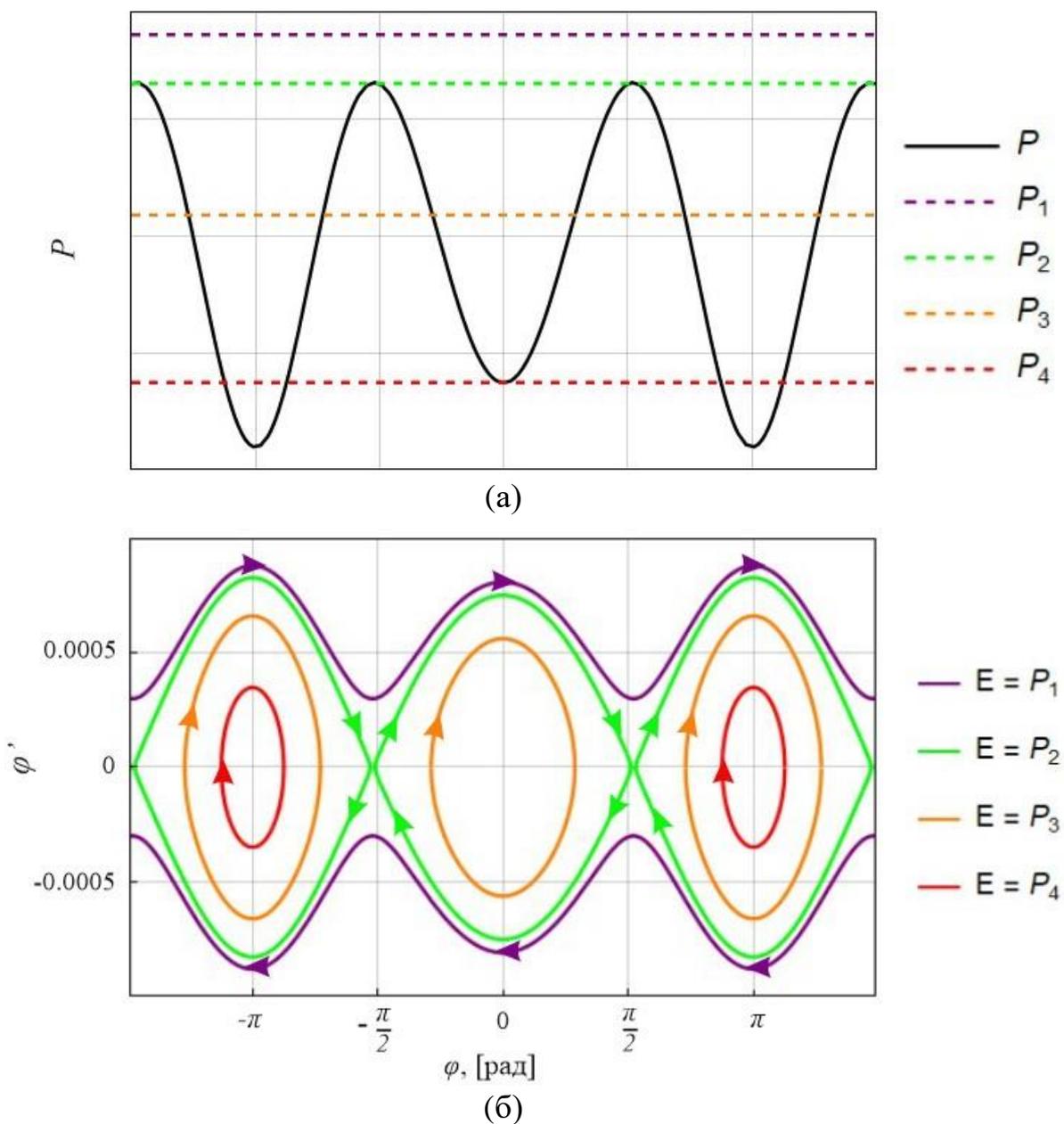


Рис. 4 – (а) Потенциальная энергия для тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_2 , (б) Фазовая плоскость для тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_2

Из рисунков 3-4 следует, что потенциальная энергия имеет потенциальные ямы, которые возникают как для системы, «закрепленной» в точке либрации L_1 , так и в точке L_2 при направлении троса в сторону Фобоса. Отсюда следует, что тросовая

система принимает устойчивое положение равновесия, когда угол отклонения троса от оси абсцисс $\varphi = -\pi, 0, \pi$, а неустойчивое при $\varphi = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Влияние длины троса на период колебаний маятника

Установим влияние длины троса на период колебаний, чтобы определить, в каком случае, тросовая система быстрее вернется в свое первоначальное положение, и выяснить различия между выбором точек L_1 и L_2 для ее «закрепления». Период колебаний может быть определен из общей формулы [18]

$$\tau = \int_0^{\tau} df = 2 \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{2[P(\alpha_m) - P(\alpha)]}}, \quad (5)$$

где f - истинная аномалия, α_m - амплитуда колебаний.

В случае, когда тросовая система колеблется относительно положения устойчивого равновесия $\alpha = \pi$, период колебаний записывается как

$$\tau = \int_0^{\tau} df = 2 \int_{\pi-\alpha_m}^{\pi+\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{2[P(\pi + \alpha_m) - P(\alpha)]}} \quad (6)$$

Результат численного моделирования периода колебаний, выполненного в статье [18], приведен на рисунке 5.

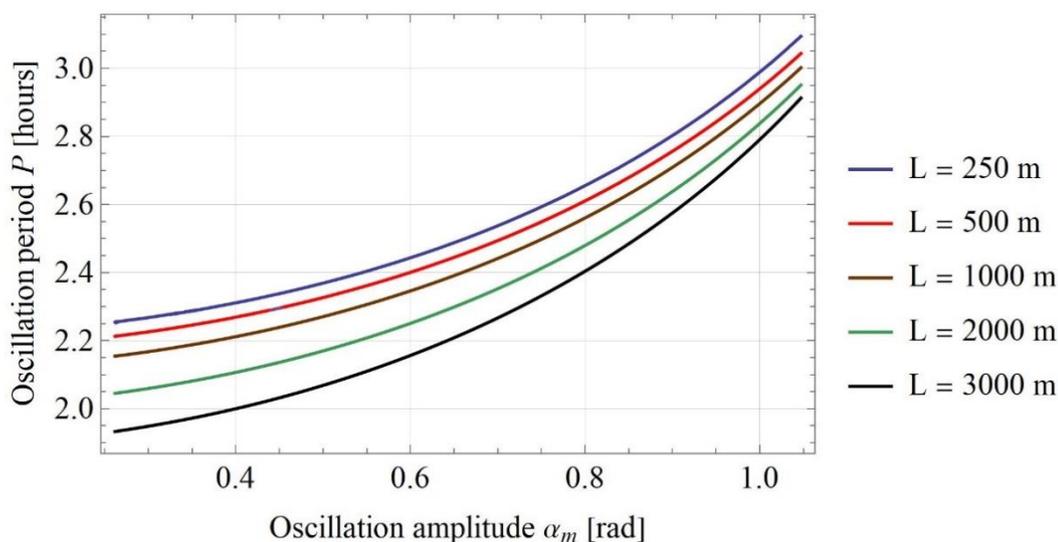


Рис. 5 – Период колебаний тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_1 , в зависимости от длины троса [18]

В работе [18] на основании полученных данных сделан вывод, что если используется относительно короткий трос ($l = 250$ м) и амплитуда его колебаний составляет 1.05 рад, то период колебаний равен 3.2 ч. Для длинного троса ($l = 3000$ м) и малой амплитуды (0.26 рад) период колебаний равен 2.1 ч.

Определение периода колебаний с помощью выражений (5), (6) затруднительно, поэтому воспользуемся другим способом решения. Найдем приближенное решение уравнения (2) для малых углов отклонения. Разложим правую часть этого уравнения, являющуюся нечетной периодической функцией, в степенной ряд по φ и ограничимся двумя слагаемыми. После преобразования, выполненного с помощью математического пакета Wolfram Mathematica, это уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} = A\varphi + B\varphi^3, \quad (7)$$

где A и B - коэффициенты, зависящие от параметров системы

$$A = -\frac{n^2 x_{L_i}}{l} + \frac{G}{l} \left(\frac{m_1(d\mu + x_{L_i})}{(l + d\mu + x_{L_i})^3} + \frac{m_2(d(\mu - 1) + x_{L_i})}{(l + d(\mu - 1) + x_{L_i})^3} \right),$$

$$B = \frac{n^2 x_{L_i}}{6l} + \frac{3G}{2l} \left(\frac{m_1 l (d\mu + x_{L_i})^2}{(l + d\mu + x_{L_i})^5} + \frac{m_2 l (d(\mu - 1) + x_{L_i})^2}{(l + d(\mu - 1) + x_{L_i})^5} - \frac{1}{9} \frac{m_1 (d\mu + x_{L_i})}{(l + d\mu + x_{L_i})^3} - \frac{1}{9} \frac{m_2 (d(\mu - 1) + x_{L_i})}{(l + d(\mu - 1) + x_{L_i})^3} \right).$$

Уравнение фазовых траекторий для соотношения (7) в этом случае примет вид

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2E + A\varphi^2 + B\frac{\varphi^4}{2}}, \quad (8)$$

где $E = -A\frac{\varphi_0^2}{2} - B\frac{\varphi_0^4}{4} = const$ и определяется из начальных условий

$t = 0, \dot{\varphi} = 0, \varphi = \varphi_0, \varphi_0$ - начальный угол отклонения троса от оси абсцисс.

Разделяя переменные в уравнении (8), получаем

$$\int dt = \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2E + A\varphi^2 + B\frac{\varphi^4}{2}}}. \quad (9)$$

Многочлен, стоящий под корнем в выражение (9) $[2E + A\varphi^2 + B\frac{\varphi^4}{2}]$, разлагается на

множители

$$\frac{B}{2}(\varphi - c_1)(\varphi - c_2)(\varphi - c_3)(\varphi - c_4). \quad (10)$$

Корни полинома (10) имеют вид

$$c_1 = -\sqrt{-\frac{A}{B} + \frac{\sqrt{A^2 - 4BE}}{B}}, c_2 = -\sqrt{-\frac{A}{B} - \frac{\sqrt{A^2 - 4BE}}{B}},$$

$$c_3 = \sqrt{-\frac{A}{B} - \frac{\sqrt{A^2 - 4BE}}{B}}, c_4 = \sqrt{-\frac{A}{B} + \frac{\sqrt{A^2 - 4BE}}{B}}.$$

Правая часть выражения (9) представляет собой эллиптический интеграл, для приведения его к каноническому виду необходимо вычислить модуль k , который согласно [20] определяется по формуле

$$k = \frac{z' - z''}{z' + z''}, \quad 0 < k^2 < 1,$$

где $z' = \sqrt{c_{13}c_{24}}$, $z'' = \sqrt{c_{12}c_{34}}$, $c_{ij} = c_j - c_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$).

Тогда выражение (9) может быть приведено к виду

$$\int dt = \pm \int \frac{1}{z} F(\varphi, k), \quad (11)$$

где $z = \frac{z' + z''}{2} \sqrt{\frac{B}{2}}$, $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - \varphi^2)(1 - k^2\varphi^2)}}$ - эллиптический интеграл

первого рода. Из соотношения (11) получаем

$$\pm zt = F(\varphi, k). \quad (12)$$

Обращая эллиптический интеграл из выражения (12) и используя эллиптический синус $sn(u, k)$, получаем выражение

$$\varphi(t) = \varphi_0 sn(u, k), \quad (13)$$

где $u = zt$. Период колебаний в этом случае определяется формулой

$$\tau = \frac{4\pi}{\sqrt{B} \left(\sqrt{-\frac{A}{B} + p_1 p_2} + \sqrt{-\frac{A}{B} - p_1 p_2} \right)},$$

$$\text{где } p_1 = \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 - 4BE}}{B}}, p_2 = \sqrt{\frac{-A - \sqrt{A^2 - 4BE}}{B}}.$$

На рисунке 6 представлена зависимость периода колебаний от длины троса, «закрепленного» в точке либрации L_1 или L_2 , для начального угла отклонения троса от оси абсцисс $\varphi_0 = 0.5$ рад.

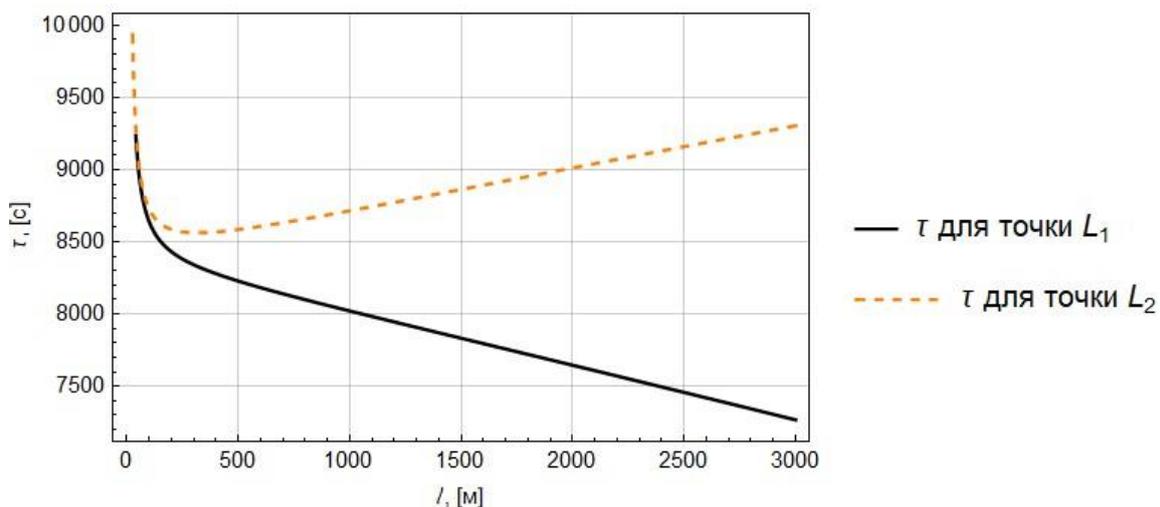


Рис. 6 – Период колебаний тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_1 или L_2 , в зависимости от длины троса

При увеличении длины троса для случая, когда тросовая система «закреплена» в точке либрации L_1 , период колебаний уменьшается в отличие от математического маятника, у которого при увеличении длины троса увеличивается период. В случае «закрепления» троса в точке либрации L_2 период колебаний троса уменьшается при $l < 200$ м, но при $l > 200$ м он начинает возрастать, область этого резкого изменения

зависимости периода колебаний от длины троса требует дальнейшего изучения. При длине троса $l = 3000$ м, «закрепленного» в точке либрации L_1 или L_2 , период колебаний равен соответственно $7267.4 \text{ с} \approx 2.02$ ч и $9304.2 \text{ с} \approx 2.58$ ч, в то время как период обращения Фобоса вокруг Марса составляет $27540 \text{ с} \approx 7.65$ ч. В работе [18] период колебаний для точки либрации L_1 равен 2.1 ч при длине троса $l = 3000$ м, следовательно, разница в значениях периодов колебаний, полученных разным способом, составляет $288 \text{ с} \approx 0.08$ ч.

Численное моделирование

Численное моделирование направлено на сравнение полученных аналитических решений с результатами численного интегрирования исходной системы уравнений при параметрах механической системы, представленных в таблице 1.

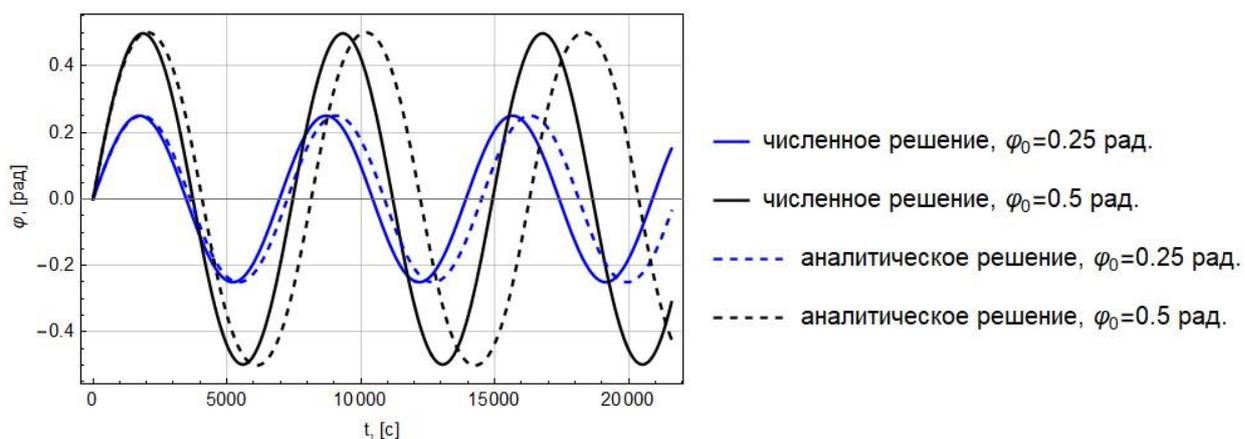
Таблица 1.

Параметры системы

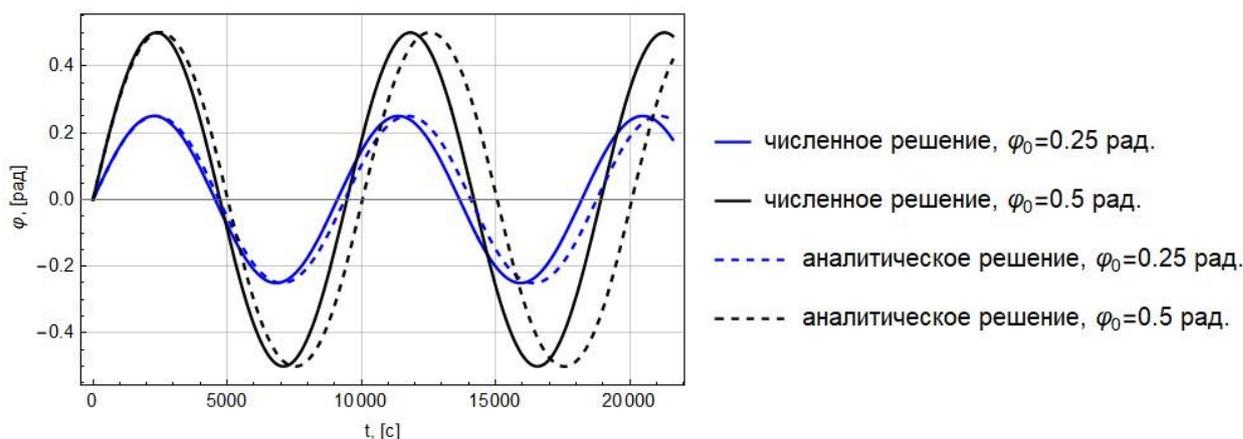
Параметр	Значение
Масса Марса m_1 , кг	$6.42 \cdot 10^{23}$
Масса Фобоса m_2 , кг	$1.072 \cdot 10^{16}$
Длина троса l , м	3000
Расстояние между Марсом и Фобосом d , м	$9400 \cdot 10^3$
Время t , с	21600

В качестве начальных условий приняты следующие значения для точки L_1 : $\varphi_0 = 0.25$ рад., $\dot{\varphi} = 0.00023$ рад/с и $\varphi_0 = 0.5$ рад., $\dot{\varphi} = 0.00043$ рад/с, для точки L_2 : $\varphi_0 = 0.25$ рад., $\dot{\varphi} = 0.00017$ рад/с и $\varphi_0 = 0.5$ рад., $\dot{\varphi} = 0.00034$ рад/с.

Результаты моделирования представлены на рисунке 7.



(а)



(б)

Рис. 7 – (а) Зависимость угла отклонения троса φ от времени для тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_1 , (б) Зависимость угла отклонения троса φ от времени для тросовой системы, «закрепленной» в точке либрации L_2

Сравнение результатов показывает, что амплитуда колебаний остается неизменной, в отличие от частоты, при увеличении значения начального угла отклонения φ_0

происходит значительное расхождение между численным и аналитическим решениями, поэтому полученные аналитические решения могут быть использованы только для малых начальных углов отклонения $\varphi_0 < 0.5$ рад.

Заключение

В статье получены уравнения движения и первый интеграл для тросовой системы, «закрепленной» в одной из коллинеарных точек либрации L_1 или L_2 системы Марс-Фобос посредством орбитального космического аппарата. Найдены устойчивые положения равновесия, получены упрощенные уравнения для малых углов отклонения троса в эллиптических функциях Якоби и аналитически определен период колебаний системы. Выявлено, что зависимость периода колебаний троса, «закрепленного» в точке либрации L_1 , от его длины принципиально отличается от случая, когда рассматривается точка L_2 . Показано, что полученные аналитические решения близки к численным при значении начального угла отклонения от оси абсцисс менее 0.5 рад. Проведенное исследование подтверждает возможность осуществления миссии, подобной PHLOTE, и дают некоторое ее теоретическое обоснование.

Список источников

1. Данченко О.М. Математическая модель ветровых воздействий в атмосфере Марса // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34404>

2. Кочетков А.А., Курмазенко Э.А., Хабаровский Н.Н., Камалетдинова Г.Р. Расширение возможностей АПКОЭС в процессе проведения 520-ти суточного эксперимента по программе «МАРС-500» // Труды МАИ. 2011. № 43. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24756>
3. Сеницын А.А. Расчет траектории межпланетного перелета Земля-Март с малой тягой без использования метода грависфер // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80987>
4. Рязанов В.В. Управление движением космического аппарата при бесконтактном уходе космического мусора // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=107837>
5. Константинов М.С., Лёб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Проектно-баллистический анализ пилотируемой марсианской миссии с ядерной электроракетной двигательной установкой // Труды МАИ. 2011. № 42. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24274>
6. Deutsch A.N., Head J.W., Ramsley K.R. et al. Science exploration architecture for Phobos and Deimos: The role of Phobos and Deimos in the future exploration of Mars // Advances in Space Research, 2018, vol. 62, pp. 2174-2186. DOI: [10.1016/J.ASR.2017.12.017](https://doi.org/10.1016/J.ASR.2017.12.017)
7. Murchie S.L., Britt D.T., Pieters C.M. The value of Phobos sample return // Planetary and Space Science, 2014, vol. 102, pp. 176-182. DOI: [10.1016/j.pss.2014.04.014](https://doi.org/10.1016/j.pss.2014.04.014)

8. Marov M.Ya., Avduevsky V.S., Akim E.L. et al. Phobos-Grunt: Russian sample return mission // *Advances in Space Research*, 2004, vol. 33, pp. 2276-2280. DOI:[10.1016/S0273-1177\(03\)00515-5](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(03)00515-5)
9. Martynov M.B., Alexashkin S.N., Khamidullina N.M. et al. Planetary Protection Principles Used for Phobos-Grunt Mission // *Solar System Research*, 2011, vol. 45, pp. 593-596. DOI:[10.1134/S0038094611070185](https://doi.org/10.1134/S0038094611070185)
10. Martynov M.B. The design philosophy of the Phobos-Grunt space vehicle // *Solar System Research*, 2012, vol. 46, pp. 493-497. DOI:[10.1134/S0038094612070179](https://doi.org/10.1134/S0038094612070179)
11. Celik O., Baresi N., Ballouz R.-L., Ogawa K., Wada K., Kawakatsu Y. Ballistic deployment from quasi-satellite orbits around Phobos under realistic dynamical and surface environment constraints // *Planetary and Space Science*, 2019, vol. 178. DOI:[10.1016/j.pss.2019.06.010](https://doi.org/10.1016/j.pss.2019.06.010)
12. Conte D., Spencer D.B. Mission analysis for Earth to Mars-Phobos distant Retrograde Orbits // *Acta Astronautica*, 2018, vol. 151, pp. 761-771. DOI:[10.1016/j.actaastro.2018.06.049](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.06.049)
13. Ferri A., Pelle S., Belluco M., Voirin T., Gelmi R. The exploration of PHOBOS: Design of a Sample Return mission // *Advances in Space Research*, 2018, vol. 62, pp. 2163-2173. DOI:[10.1016/j.asr.2018.06.014](https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.06.014)
14. Usui T., Bajo K., Fujiya W. et al. The Importance of Phobos Sample Return for Understanding the Mars-Moon System // *Space Science Reviews*, 2020, vol. 216. DOI:[10.1007/s11214-020-00668-9](https://doi.org/10.1007/s11214-020-00668-9)

15. Canalias E., Lorda L., Martin T., Laurent-Varin J., Marty J.C., Mimasu Y. Trajectory analysis for the Phobos proximity phase of the MMX mission // International Symposium on Space Flight Dynamics, 2017. URL: https://issfd.org/ISSFD_2017/paper/ISTS-2017-d-006_ISSFD-2017-006.pdf
16. Joffre E., Zamaro M., Silva N., Marcos A., Simplício P. Trajectory design and guidance for landing on Phobos // Acta Astronautica, 2018, vol. 151, pp. 389-400. DOI: [10.1016/j.actaastro.2018.06.024](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.06.024)
17. Kempton K., Pearson J., Levin E. et al. Phase 1 Study for the Phobos L1 Operational Tether Experiment (PHLOTE). End Report. NASA, 2018, 91 p. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20190000916/downloads/20190000916.pdf>
18. Aslanov V.S., Prospects of a tether system deployed at the L1 libration point // Nonlinear Dynamics, 2021, vol. 106. URL: <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06884-4>
19. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. - 312 с.
20. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. – М.-Л.: АН СССР, 1941. - 235 с.

References

1. Danchenko O.M. *Trudy MAI*. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34404>
2. Kochetkov A.A., Kurmazenko E.A., Khabarovskii N.N., Kamaletdinova G.R. *Trudy MAI*, 2011, no. 43. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24756>

3. Sinitsyn A.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80987>
4. Ryazanov V.V. *Trudy MAI*, 2019, no. 107. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107837>
5. Konstantinov M.S., Leb Kh.V., Petukhov V.G., Popov G.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 42. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24274>
6. Deutsch A.N., Head J.W., Ramsley K.R. et al. Science exploration architecture for Phobos and Deimos: The role of Phobos and Deimos in the future exploration of Mars, *Advances in Space Research*, 2018, vol. 62, pp. 2174-2186. DOI:[10.1016/J.ASR.2017.12.017](https://doi.org/10.1016/J.ASR.2017.12.017)
7. Murchie S.L., Britt D.T., Pieters C.M. The value of Phobos sample return, *Planetary and Space Science*, 2014, vol. 102, pp. 176-182. DOI:[10.1016/j.pss.2014.04.014](https://doi.org/10.1016/j.pss.2014.04.014)
8. Marov M.Ya., Avduevsky V.S., Akim E.L. et al. Phobos-Grunt: Russian sample return mission, *Advances in Space Research*, 2004, vol. 33, pp. 2276-2280. DOI:[10.1016/S0273-1177\(03\)00515-5](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(03)00515-5)
9. Martynov M.B., Alexashkin S.N., Khamidullina N.M. et al. Planetary Protection Principles Used for Phobos-Grunt Mission, *Solar System Research*, 2011, vol. 45, pp. 593-596. DOI:[10.1134/S0038094611070185](https://doi.org/10.1134/S0038094611070185)
10. Martynov M.B. The design philosophy of the Phobos-Grunt space vehicle, *Solar System Research*, 2012, vol. 46, pp. 493-497. DOI:[10.1134/S0038094612070179](https://doi.org/10.1134/S0038094612070179)
11. Celik O., Baresi N., Ballouz R.-L., Ogawa K., Wada K., Kawakatsu Y. Ballistic deployment from quasi-satellite orbits around Phobos under realistic dynamical and surface

- environment constraints, *Planetary and Space Science*, 2019, vol. 178. DOI: [10.1016/j.pss.2019.06.010](https://doi.org/10.1016/j.pss.2019.06.010)
12. Conte D., Spencer D.B. Mission analysis for Earth to Mars-Phobos distant Retrograde Orbits, *Acta Astronautica*, 2018, vol. 151, pp. 761-771. DOI: [10.1016/j.actaastro.2018.06.049](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.06.049)
13. Ferri A., Pelle S., Belluco M., Voirin T., Gelmi R. The exploration of PHOBOS: Design of a Sample Return mission, *Advances in Space Research*, 2018, vol. 62, pp. 2163-2173. DOI: [10.1016/j.asr.2018.06.014](https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.06.014)
14. Usui T., Bajo K., Fujiya W. et al. The Importance of Phobos Sample Return for Understanding the Mars-Moon System, *Space Science Reviews*, 2020, vol. 216. DOI: [10.1007/s11214-020-00668-9](https://doi.org/10.1007/s11214-020-00668-9)
15. Canalias E., Lorda L., Martin T., Laurent-Varin J., Marty J.C., Mimasu Y. Trajectory analysis for the Phobos proximity phase of the MMX mission, *International Symposium on Space Flight Dynamics*, 2017. URL: https://issfd.org/ISSFD_2017/paper/ISTS-2017-d-006_ISSFD-2017-006.pdf
16. Joffre E., Zamaro M., Silva N., Marcos A., Simplício P. Trajectory design and guidance for landing on Phobos, *Acta Astronautica*, 2018, vol. 151, pp. 389-400. DOI: [10.1016/j.actaastro.2018.06.024](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.06.024)
17. Kempton K., Pearson J., Levin E. et al. *Phase 1 Study for the Phobos L1 Operational Tether Experiment (PHLOTE)*. End Report. NASA, 2018, 91 p. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20190000916/downloads/20190000916.pdf>

18. Aslanov V.S., Prospects of a tether system deployed at the L1 libration point, *Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 106. URL: <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06884-4>
19. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow, Nauka, 1978, 312 p.
20. Zhuravskii A.M. *Spravochnik po ellipticheskim funktsiyam* (Handbook of Elliptic Functions), Moscow-Leningrad, AN SSSR, 1941, 235 p.

Статья поступила в редакцию 09.12.2021; одобрена после рецензирования 25.12.2021; принята к публикации 21.02.2022.

The article was submitted on 09.12.2021; approved after reviewing on 25.12.2021; accepted for publication on 21.02.2022.