

## **Решение краевой задачи формирования траектории движения самолёта при выполнении пространственного маневра**

**Танг Тхань Лам**

*Московский физико-технический институт (государственный университет),*

*МФТИ, ул. Гагарина, 20, Жуковский, Московская область, 140184, Россия*

*e-mail: [tangthanhlam@gmail.com](mailto:tangthanhlam@gmail.com)*

### **Аннотация**

Рассматривается задача планирования траектории движения самолёта при выполнении пространственного маневра. Для получения траектории с соблюдением заданных граничных условий используются два подхода, основанных на концепциях обратной задачи динамики и представлении траектории в параметризованном виде. В первом случае рассматривается наиболее простая параметризация, обеспечивающая только выполнение граничных условий. Во втором случае параметризация предусматривает дополнительную оптимизацию какого-либо критерия качества, что соответствует некоторой реализации прямого вариационного метода. На конкретных примерах проводится сравнение этих двух подходов.

**Ключевые слова:** пространственный маневр самолета, планирование траектории, краевая задача, обратная динамика, прямой вариационный метод.

### **Введение**

Одной из основных задач динамики полёта является определение траектории и управлений, обеспечивающих перевод самолёта из заданной начальной точки в

заданную конечную точку в пространстве. Если дополнительно задается критерий качества управления, то задача может решаться методами теории оптимального управления. Но в любом случае формирование траектории полета – это по сути краевая задача. К настоящему времени разработано много методов решения задач такого типа. Среди них хорошо известны методы пристрелки, конечных разностей, конечных элементов, метод Галёркина-Ритца, методы сведения к интегральным уравнениям Фредгольма и др. К числу перспективных направлений, предложенных в последнее время, следует отнести методы решения на основе параметризации траектории и применения концепции обратных задач динамики. Параметризация траектории позволяет свести задачу к поиску необходимых значений конечного числа параметров, а концепция инверсной динамики позволяет легко определить управления, необходимые для осуществления движения по требуемой траектории. Если дополнительно необходима оптимизация качества управления по какому-либо критерию, то такой подход соответствует одной из возможных реализаций прямого вариационного метода. Основное достоинство данного направления – сравнительная простота и экономичность расчетных алгоритмов. В перспективе это позволит генерировать траектории в темпе реального времени, что привлекательно для бортового применения.

В данной статье рассмотрены два характерных способа формирования траектории, основанные на задании ее в параметризованном виде. В первом способе согласование граничных условий осуществляется за счет соответствующего выбора коэффициентов [2, 3, 4, 5], а во втором способе - за счет специального выбора

базисных функций [1]. Свободные коэффициенты параметризованных зависимостей во втором способе определяются исходя из условия оптимальности заданного критерия качества и ограничений на управления, что делает этот способ существенно более гибким. Однако расчет траектории требует довольно большого объема вычислений. На конкретных примерах в статье показывается, что первый способ, несмотря на его привлекательную простоту, навряд ли может быть использован для автономного генерирования траектории самолета.

### 1. Уравнения движения и обратная задача

Движения центра масс самолета в пространстве описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dot{V} = g(n_{xa} - \sin \Theta) \\ \dot{\Theta} = g(n_{ya} \cos \gamma - \cos \Theta)/V \\ \dot{\Psi} = -gn_{ya} \sin \gamma/(V \cos \Theta) \\ \dot{x} = V \cos \Theta \cos \Psi \\ \dot{y} = V \sin \Theta \\ \dot{z} = -V \cos \Theta \sin \Psi \end{cases} \quad (1)$$

$$n_{xa} = \frac{P \cos \alpha - X_a}{mg} \quad n_{ya} = \frac{P \sin \alpha + Y_a}{mg} \quad (2)$$

Здесь  $x, y, z$  – координаты центра масс самолёта в нормальной земной системе координат,  $V$  – скорость полёта,  $\Theta$  – угол наклона траектории,  $\Psi$  – угол курса,  $\alpha$  – угол атаки,  $\gamma$  – угол крена,  $P$  – тяга двигателя,  $X_a$  – аэродинамическое сопротивление,  $Y_a$  – аэродинамическая подъемная сила,  $m$  – масса самолета,  $g$  – ускорение свободного падения,  $n_{xa}$  – продольная перегрузка,  $n_{ya}$  – поперечная

перегрузка. Аэродинамические силы  $X_a$  и  $Y_a$  зависят от скорости  $V$  и от плотности атмосферы  $\rho$  на высоте полета,

$$X_a = c_x \rho V^2 / 2, \quad Y_a = c_y \rho V^2 / 2,$$

где  $c_x = c_x(\alpha)$  и  $c_y = c_y(\alpha)$  - аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, величины которых зависят от угла атаки  $\alpha$  (угол между продольной осью самолета и вектором скорости полета).

Для траекторного движения, описываемого моделью (1), управляющими переменными являются тяга двигателя ( $P$ ), угол атаки ( $\alpha$ ) и угол крена ( $\gamma$ ). Однако, в задачах формирования траектории вместо  $P$  и  $\alpha$  в качестве переменных можно рассматривать перегрузки  $n_{xa}$  и  $n_{ya}$ . Привлекательность такого подхода обусловлена тем, что величины  $n_{xa}$ ,  $n_{ya}$  и  $\gamma$  напрямую определяются зависимостями  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  без каких либо дополнительных параметров и переменных.

Для применения методологии обратной задачи требуется, чтобы управляющие силы могли быть однозначно определены по заданной траектории. Система (1) это допускает, в чем нетрудно убедиться. Пусть зависимости координат самолета от времени  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  – заданы. Непосредственно из (1) следует:

$$\sin \Theta = \frac{\dot{y}}{V}, \quad \cos \Theta = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}{V}, \quad \sin \Psi = -\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}, \quad \cos \Psi = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}, \quad (3)$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

С помощью дифференцирования данных соотношений находим

$$\dot{\Theta} = \frac{\dot{V}\dot{y} - V\ddot{y}}{V^2 \cos \Theta}, \quad \dot{\Psi} = \frac{(\dot{x}\dot{z} - \dot{z}\dot{x})\cos^2 \Psi}{\dot{x}^2}, \quad \dot{V} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V}. \quad (4)$$

Непосредственно из (1) нетрудно также получить выражения для определения перегрузок и угла крена

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\Psi \cos \Theta}{\dot{\Theta} + g \cos \Theta / V}, \quad n_{xa} = \sin \Theta + \frac{\dot{V}}{g}, \quad n_{ya} = \frac{V \dot{\Theta} + g \cos \Theta}{g \cos \gamma}. \quad (5)$$

С другой стороны, дифференцируя три последних уравнения системы (1), получаем с учетом первых трех уравнений этой системы следующие соотношения:

$$\begin{cases} \ddot{x} = n_{xa} g \cos \Theta \cos \Psi - n_{ya} g \cos \gamma \sin \Theta \cos \Psi + n_{ya} g \sin \gamma \sin \Psi \\ \ddot{y} = -g + n_{xa} g \sin \Theta + n_{ya} g \cos \gamma \cos \Theta \\ \ddot{z} = -n_{xa} g \cos \Theta \sin \Psi + n_{ya} g \cos \gamma \sin \Theta \sin \Psi + n_{ya} g \sin \gamma \cos \Psi \end{cases} \quad (6)$$

Этот результат позволяет записать:

$$\begin{aligned} n_{xa} &= \frac{(\ddot{y} + g) \sin \Theta + (\ddot{x} \cos \Psi - \ddot{z} \sin \Psi) \cos \Theta}{g}, \\ n_{ya} &= \frac{(\ddot{y} + g) \cos \Theta - (\ddot{x} \cos \Psi - \ddot{z} \sin \Psi) \sin \Theta}{g \cos \gamma}, \\ \gamma &= \operatorname{arctg} \left( \frac{\ddot{x} \sin \Psi + \ddot{z} \cos \Psi}{(\ddot{y} + g) \cos \Theta - (\ddot{x} \cos \Psi - \ddot{z} \sin \Psi) \sin \Theta} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Формулы (7) вместе с формулами (3) определяют переменные управления  $n_{xa}$ ,  $n_{ya}$  и  $\gamma$  в виде функций координат  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  и их первых и вторых производных по времени. Тягу двигателя и угол атаки можно определить по соотношениям (2). Таким образом, система (1) может быть использована для решения обратных задач динамики. Необходимо отметить, что к настоящему времени уже существует ряд методов формирования траектории на основе привлечения концепции обратной задачи динамики. В данной статье рассмотрены два наиболее характерных подхода – простое планирование траектории и формирование траектории на принципе оптимальности.

## 2. Простое планирование траектории

Предполагается, что заданное начальное состояние  $\mathbf{X}_0 = [V_0 \ \Theta_0 \ \Psi_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0]^T$  и конечное состояние  $\mathbf{X}_f = [V_f \ \Theta_f \ \Psi_f \ x_f \ y_f \ z_f]^T$  самолёта, а также начальное и конечное время маневра  $t_0, t_f$ . Еще могут быть заданы начальный и конечный векторы управления  $\mathbf{u}_0 = [n_{xa0} \ n_{ya0} \ \gamma_0]^T$ ,  $\mathbf{u}_f = [n_{xaf} \ n_{yaf} \ \gamma_f]^T$ . Требуется построить траекторию полёта и управление, удовлетворяющие всем этим краевым условиям.

При рассмотрении траектории  $x(t), y(t), z(t)$  физическое время  $t$  заменим на относительное время  $\tau$  в соответствии с формулой преобразования

$$\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} = \frac{t - t_0}{\Delta}. \quad (8)$$

Здесь  $\Delta = t_f - t_0$ , так что  $\tau = 0$  при  $t = t_0$  и  $\tau = 1$  при  $t = t_f$ .

В результате должны получиться зависимости

$$x(t(\tau)) = P_x(\tau), \quad y(t(\tau)) = P_y(\tau), \quad z(t(\tau)) = P_z(\tau).$$

Процедура планирования траектории предполагает задание функций  $P_x(\tau), P_y(\tau), P_z(\tau)$  в виде параметризованных зависимостей с использованием базисных функций.

Например, в качестве  $P_x(\tau), P_y(\tau), P_z(\tau)$  могут быть взяты многочлены вида

$$P_x(\tau) = \sum_{i=1}^6 k_i \varphi_{xi}(\tau), \quad P_y(\tau) = \sum_{i=1}^6 h_i \varphi_{yi}(\tau), \quad P_z(\tau) = \sum_{i=1}^6 w_i \varphi_{zi}(\tau), \quad (9)$$

где  $k_i, h_i, w_i$  – постоянные коэффициенты, а  $\varphi_{xi}(\tau), \varphi_{yi}(\tau), \varphi_{zi}(\tau), i=1, \dots, 6$  – базисные функции, обладающие свойством линейной независимости. Для упрощения вычислений структура базисных функций принимается достаточно

простой, требуется лишь, чтобы функции  $P_x(\tau)$ ,  $P_y(\tau)$ ,  $P_z(\tau)$  были непрерывными и, как минимум, дважды дифференцируемы. В частности, удобны для использования степенные зависимости вида

$$\varphi_{x1}(\tau) = 1, \varphi_{x2}(\tau) = \tau, \varphi_{x3}(\tau) = \tau^2, \varphi_{x4}(\tau) = \tau^3, \varphi_{x5}(\tau) = \tau^4, \varphi_{x6}(\tau) = \tau^5.$$

Могут применяться варианты с тригонометрическими функциями, а также же комбинации степенных и гармонических функций, как например

$$\begin{aligned} \varphi_{x1}(\tau) &= 1, \varphi_{x2}(\tau) = \tau, \varphi_{x3}(\tau) = \tau^2, \varphi_{x4}(\tau) = \tau^3, \\ \varphi_{x5}(\tau) &= \sin(2\pi\tau), \varphi_{x6}(\tau) = \cos(2\pi\tau). \end{aligned}$$

Дифференцируя зависимости (9) по  $\tau$ , получим производные

$$\begin{aligned} P'_x(\tau) &= \sum_{i=1}^6 k_i \varphi'_{xi}(\tau), & P'_y(\tau) &= \sum_{i=1}^6 h_i \varphi'_{yi}(\tau), & P'_z(\tau) &= \sum_{i=1}^6 w_i \varphi'_{zi}(\tau), \\ P''_x(\tau) &= \sum_{i=1}^6 k_i \varphi''_{xi}(\tau), & P''_y(\tau) &= \sum_{i=1}^6 h_i \varphi''_{yi}(\tau), & P''_z(\tau) &= \sum_{i=1}^6 w_i \varphi''_{zi}(\tau). \end{aligned}$$

Многочлены  $P_x(\tau)$ ,  $P_y(\tau)$ ,  $P_z(\tau)$  и их производные должны удовлетворять заданным граничным условиям:

$$\begin{array}{lll} P_x(0) = x(t_0) = x_0 & P_y(0) = y(t_0) = y_0 & P_z(0) = z(t_0) = z_0 \\ P_x(1) = x(t_f) = x_f & P_y(1) = y(t_f) = y_f & P_z(1) = z(t_f) = z_f \\ \\ P'_x(0) = \dot{x}(t_0)\Delta & P'_y(0) = \dot{y}(t_0)\Delta & P'_z(0) = \dot{z}(t_0)\Delta \\ P'_x(1) = \dot{x}(t_f)\Delta & P'_y(1) = \dot{y}(t_f)\Delta & P'_z(1) = \dot{z}(t_f)\Delta \\ \\ P''_x(0) = \ddot{x}(t_0)\Delta^2 & P''_y(0) = \ddot{y}(t_0)\Delta^2 & P''_z(0) = \ddot{z}(t_0)\Delta^2 \\ P''_x(1) = \ddot{x}(t_f)\Delta^2 & P''_y(1) = \ddot{y}(t_f)\Delta^2 & P''_z(1) = \ddot{z}(t_f)\Delta^2 \end{array}$$

На основании этих соотношений составим три системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 k_i \varphi_{xi}(0) = x_0 \\ \sum_{i=1}^6 k_i \varphi'_{xi}(0) = \dot{x}(t_0) \Delta \\ \sum_{i=1}^6 k_i \varphi''_{xi}(0) = \ddot{x}(t_0) \Delta^2 \\ \sum_{i=1}^6 k_i \varphi_{xi}(1) = x_f \\ \sum_{i=1}^6 k_i \varphi'_{xi}(1) = \dot{x}(t_f) \Delta \\ \sum_{i=1}^6 k_i \varphi''_{xi}(1) = \ddot{x}(t_f) \Delta^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^6 h_i \varphi_{yi}(0) = y_0 \\ \sum_{i=1}^6 h_i \varphi'_{yi}(0) = \dot{y}(t_0) \Delta \\ \sum_{i=1}^6 h_i \varphi''_{yi}(0) = \ddot{y}(t_0) \Delta^2 \\ \sum_{i=1}^6 h_i \varphi_{yi}(1) = y_f \\ \sum_{i=1}^6 h_i \varphi'_{yi}(1) = \dot{y}(t_f) \Delta \\ \sum_{i=1}^6 h_i \varphi''_{yi}(1) = \ddot{y}(t_f) \Delta^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^6 w_i \varphi_{zi}(0) = z_0 \\ \sum_{i=1}^6 w_i \varphi'_{zi}(0) = \dot{z}(t_0) \Delta \\ \sum_{i=1}^6 w_i \varphi''_{zi}(0) = \ddot{z}(t_0) \Delta^2 \\ \sum_{i=1}^6 w_i \varphi_{zi}(1) = z_f \\ \sum_{i=1}^6 w_i \varphi'_{zi}(1) = \dot{z}(t_f) \Delta \\ \sum_{i=1}^6 w_i \varphi''_{zi}(1) = \ddot{z}(t_f) \Delta^2 \end{cases} \quad (10)$$

В (10) величины  $x_0, y_0, z_0, x_f, y_f, z_f, \Delta, n_{xa0}, n_{ya0}, \gamma_0, n_{xaf}, n_{yaf}, \gamma_f, \varphi_{si}(0), \varphi'_{si}(0), \varphi''_{si}(0), \varphi_{si}(1), \varphi'_{si}(1), \varphi''_{si}(1)$ ,  $s = x, y, z, i = 1, 2, \dots, 6$ , известны. Значения величин  $\dot{x}(t_0), \dot{x}(t_f), \dot{y}(t_0), \dot{y}(t_f), \dot{z}(t_0), \dot{z}(t_f)$  определяются по уравнениям (1), а значения  $\ddot{x}(t_0), \ddot{x}(t_f), \ddot{y}(t_0), \ddot{y}(t_f), \ddot{z}(t_0), \ddot{z}(t_f)$  – по соотношениям (6).

Система (10) представляет собой  $6 \times 3 = 18$  уравнений относительно  $6 \times 3 = 18$  неизвестных коэффициентов  $(k_1, k_2, \dots, k_6), (h_1, h_2, \dots, h_6)$  и  $(w_1, w_2, \dots, w_6)$ . Задача вычисления коэффициентов из системы (10) облегчается тем, что эта система разделена на 3 независимые подсистемы.

Получить решение несложно. Например, для первой подсистемы с использованием векторно-матричных обозначений

$$\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5 \quad k_6]^T, \\
\mathbf{B} = [x_0 \quad \dot{x}(t_0) \Delta \quad \ddot{x}(t_0) \Delta^2 \quad x_f \quad \dot{x}(t_f) \Delta \quad \ddot{x}(t_f) \Delta^2]^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varphi_{x1}(0) & \varphi_{x2}(0) & \varphi_{x3}(0) & \varphi_{x4}(0) & \varphi_{x5}(0) & \varphi_{x6}(0) \\ \varphi'_{x1}(0) & \varphi'_{x2}(0) & \varphi'_{x3}(0) & \varphi'_{x4}(0) & \varphi'_{x5}(0) & \varphi'_{x6}(0) \\ \varphi''_{x1}(0) & \varphi''_{x2}(0) & \varphi''_{x3}(0) & \varphi''_{x4}(0) & \varphi''_{x5}(0) & \varphi''_{x6}(0) \\ \varphi_{x1}(1) & \varphi_{x2}(1) & \varphi_{x3}(1) & \varphi_{x4}(1) & \varphi_{x5}(1) & \varphi_{x6}(1) \\ \varphi'_{x1}(1) & \varphi'_{x2}(1) & \varphi'_{x3}(1) & \varphi'_{x4}(1) & \varphi'_{x5}(1) & \varphi'_{x6}(1) \\ \varphi''_{x1}(1) & \varphi''_{x2}(1) & \varphi''_{x3}(1) & \varphi''_{x4}(1) & \varphi''_{x5}(1) & \varphi''_{x6}(1) \end{bmatrix},$$

можно записать  $\mathbf{Ak} = \mathbf{B}$  и, таким образом, искомая формула вычисления коэффициентов примет вид  $\mathbf{k} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ . Т.к. используемые базисные функции обладают свойством линейной независимости, то матрица  $\mathbf{A}$  – не вырождена, следовательно обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  существует и решение для  $\mathbf{k}$  единственно.

Аналогичным образом определяются решения системы (10) для остальных коэффициентов ( $h_1, h_2 \dots h_6$ ) и ( $w_1, w_2 \dots w_6$ ).

### 3. Планирование траектории прямым вариационным методом.

В формулах (9) предыдущего раздела выполнение краевых условий обеспечивалось специальным выбором коэффициентов при заданных произвольно базисных функциях. Однако краевая задача может быть решена и другим способом, путем специального выбора базисных функций при заданных произвольно коэффициентах. В этом случае наличие свободы в выборе коэффициентов позволяет совместить процедуру планирования траектории с оптимизацией какого либо критерия качества, а также учесть ограничения на фазовые и управляющие переменные. По-видимому, такой подход для задач динамики полета впервые был предложен Тараненко [1] в контексте оптимизации управления прямым

вариационным методом. Метод Тараненко предполагает замену аргумента физического времени  $t$  на некоторый обобщенный аргумент  $\tau$  в соответствии с уравнением

$$\frac{d\tau}{dt} = \lambda,$$

где  $\lambda$  – неизвестная функция.

Траектория задается соотношениями

$$x(\tau) = x_1(\tau), \quad y(\tau) = x_2(\tau), \quad z(\tau) = x_3(\tau), \quad V(\tau) = x_4(\tau).$$

Здесь функции  $x_i(\tau)$ ,  $i = 1 \div 4$ , должны быть непрерывными, однозначными и дифференцируемыми на всем интервале значений аргумента  $\tau$ . Функции  $x_i(\tau)$  ищутся в виде комбинации известных, априорно заданных базисных функций:

$$x_i(\tau) = \varphi_{i0}(\tau) + \sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_{ij}(\tau)$$

где  $\varphi_{i0}(\tau), \phi_{ij}(\tau)$ ,  $i = 1 \div 4$ ,  $j = 1 \div n$  – базисные функции,  $k_{ij}$  – неизвестные коэффициенты. Функции  $\varphi_{i0}(\tau)$  и  $\phi_{ij}(x)$  выбираются так, чтобы удовлетворять неоднородным и однородным краевым условиям соответственно:

$$\varphi_{i0}(\tau_0) = x_i(\tau_0) = x_{i0}, \quad \varphi_{i0}(\tau_f) = x_i(\tau_f) = x_{if},$$

$$\phi_{ij}(\tau_0) = 0, \quad \phi_{ij}(\tau_f) = 0.$$

Например, по рекомендациям [1]

$$\varphi_{i0}(\tau) = x_{i0} + \frac{(x_{if} - x_{i0})(\tau - \tau_0)}{(\tau_f - \tau_0)},$$

$$\phi_{ij}(x) = \sin \frac{j\pi(\tau - \tau_0)}{\tau_f - \tau_0} \quad \text{или} \quad \phi_{ij}(x) = (\tau - \tau_0)^j (\tau - \tau_f)^j.$$

Нетрудно видеть, что этот выбор базисных функций гарантирует для  $x_i(\tau)$  удовлетворение краевых условий при любых значениях параметров  $k_{ij}$ . С другой стороны, функции  $x_i(\tau)$  зависят от коэффициентов  $k_{ij}$ , а следовательно выбором этих коэффициентов можно влиять на траекторию, обеспечивая оптимизацию заданного критерия качества и выполнение ограничений на управления не заботясь о краевых условиях. Преобразуем систему (1) к новому аргументу  $\tau$ :

$$\begin{cases} V' = g(n_{xa} - \sin \Theta) / \lambda \\ \Theta' = g(n_{ya} \cos \gamma - \cos \Theta) / (\lambda V) \\ \Psi' = -g n_{ya} \sin \gamma / (\lambda V \cos \Theta) \\ x' = V \cos \Theta \cos \Psi / \lambda \\ y' = V \sin \Theta / \lambda \\ z' = -V \cos \Theta \sin \Psi / \lambda \\ t' = 1 / \lambda \end{cases} \quad (11)$$

Действуя так же, как описано в разделе 1, из уравнений (11) нетрудно получить следующие кинематические соотношения:

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \sin \Theta = \frac{\lambda y'}{V}, \quad \operatorname{tg} \Psi = -\frac{z'}{x'},$$

$$\lambda' = \frac{V'(x'^2 + y'^2 + z'^2) - V(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}},$$

$$\Theta' = \frac{y''(x'^2 + z'^2) - y'(x'x'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2} \cos \Theta},$$

$$\Psi' = -\frac{\cos^2 \Psi (x'z'' - x''z')}{x'^2}.$$

Для управляющих переменных получаются формулы:

$$\gamma = \arctg\left(-\frac{\lambda\Psi \cos\Theta}{\lambda\Theta' + g \cos\Theta/V}\right), \quad n_{xa} = \sin\Theta + \frac{\lambda V'}{g}, \quad n_{ya} = \frac{\lambda V\Theta' + g \cos\Theta}{g \cos\gamma}.$$

Приведенные формулы показывают, что все переменные управления и состояния выражаются через  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$ ,  $z(\tau)$ ,  $V(\tau)$  и их производные, но в отличие от формул раздела 1 здесь дополнительно присутствует масштабирующая функция  $\lambda$ . Выбор свободных коэффициентов  $k_{ij}$  подчиним оптимизации функционала  $J(p)$ , который зависит от цели задачи (здесь  $p$  - вектор коэффициентов  $k_{ij}$ ). Таким образом, формирование оптимальной траектории, которая удовлетворяет заданным граничным условиям, сводится к задаче нелинейного программирования:

$$\min_{p \in C} J(p) \quad \text{или} \quad \max_{p \in C} J(p), \quad (12)$$

где  $C$  – область допустимых значений параметров  $p$ , обеспечивающая выполнение требуемых ограничений на управления и переменные состояния. Рекомендации относительно способов решения этой задачи приводятся в [1].

#### 4. Примеры расчетов

Рассмотренные выше варианты планирования траектории были проверены численными расчетами для ряда типичных маневров. Результаты вычислений для двух примеров представлены графиками на рисунках 1÷4. Графики простого планирования траектории (вариант 1) отображены штриховыми линиями, а графики планирования траектории прямым вариационным методом (вариант 2) с оптимизацией по критерию быстродействия отображены сплошными линиями. В обоих случаях краевые условия одинаковые.

**Пример 1** (разворот на  $180^\circ$  с набором высоты)

Граничные условия:

- начало маневра  $t_0 = 0$ ,

$V_0 = 35$  м/с,  $\Theta_0 = 0$  рад,  $\Psi_0 = 0$  рад,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м,  $z_0 = 0$  м,

$n_{xa0} = 0$ ,  $n_{ya0} = 1$ ,  $\gamma_0 = 0$  рад.

- окончание маневра  $t_f = 14.5$  с,

$V_f = 35$  м/с,  $\Theta_f = 0$  рад,  $\Psi_f = \pi$  рад,  $x_f = 0$  м,  $y_f = 80$  м,  $z_f = -270$  м,

$n_{xa0} = 0$ ,  $n_{ya0} = 1$ ,  $\gamma_f = 0$  рад.

В расчётах варианта 2 учитываются ограничения на управления и переменные состояния:

$35 \text{ м/с} \leq V \leq 80 \text{ м/с}$ ,  $|\Theta| \leq 60^\circ$ ,  $-90^\circ \leq \Psi \leq 270^\circ$ ,  $-0.1 \leq n_{xa} \leq 0.6$ ,  $-0.1 \leq n_{ya} \leq 2$ ,  $|\gamma| \leq 60^\circ$ .

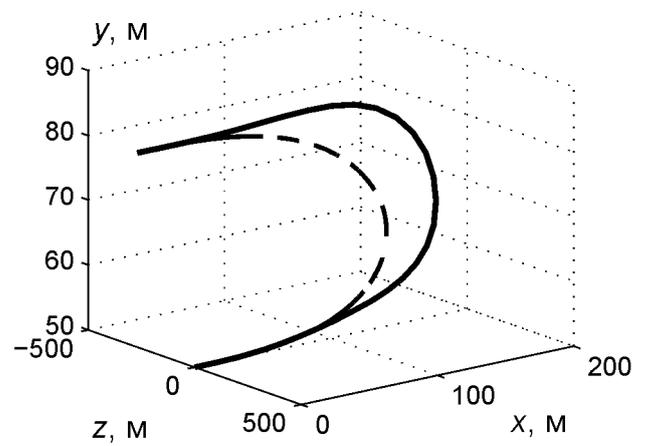
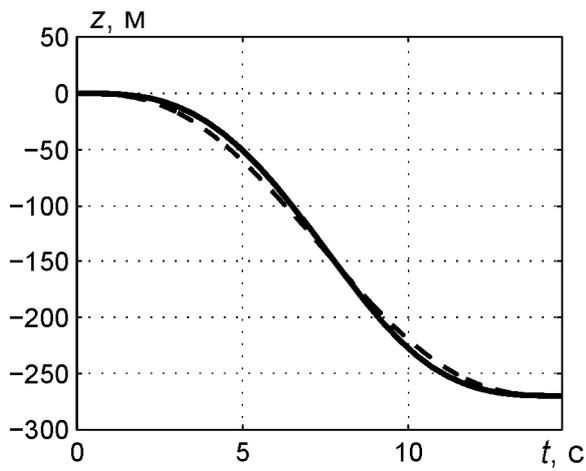
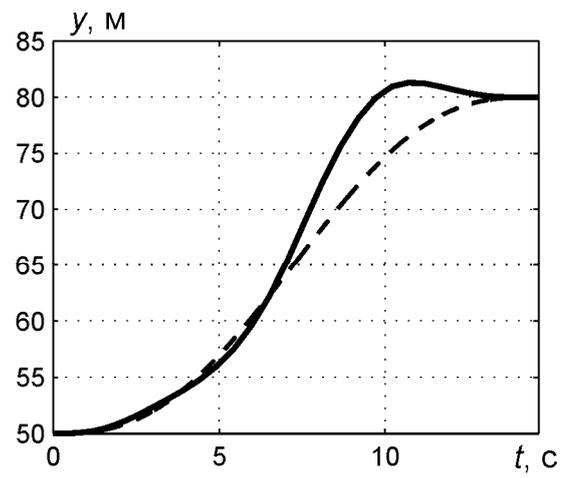
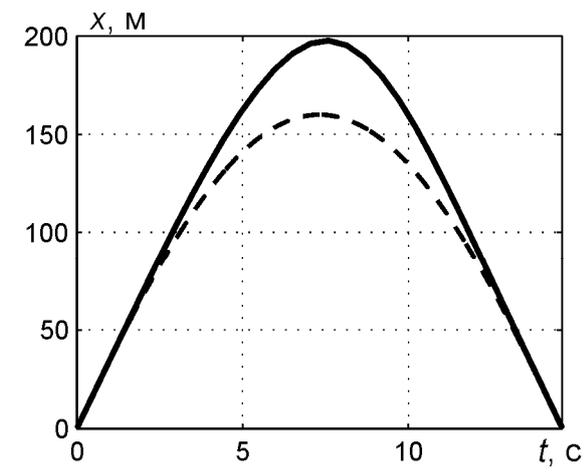


Рис. 1. Траектории движения самолёта (Пример 1).

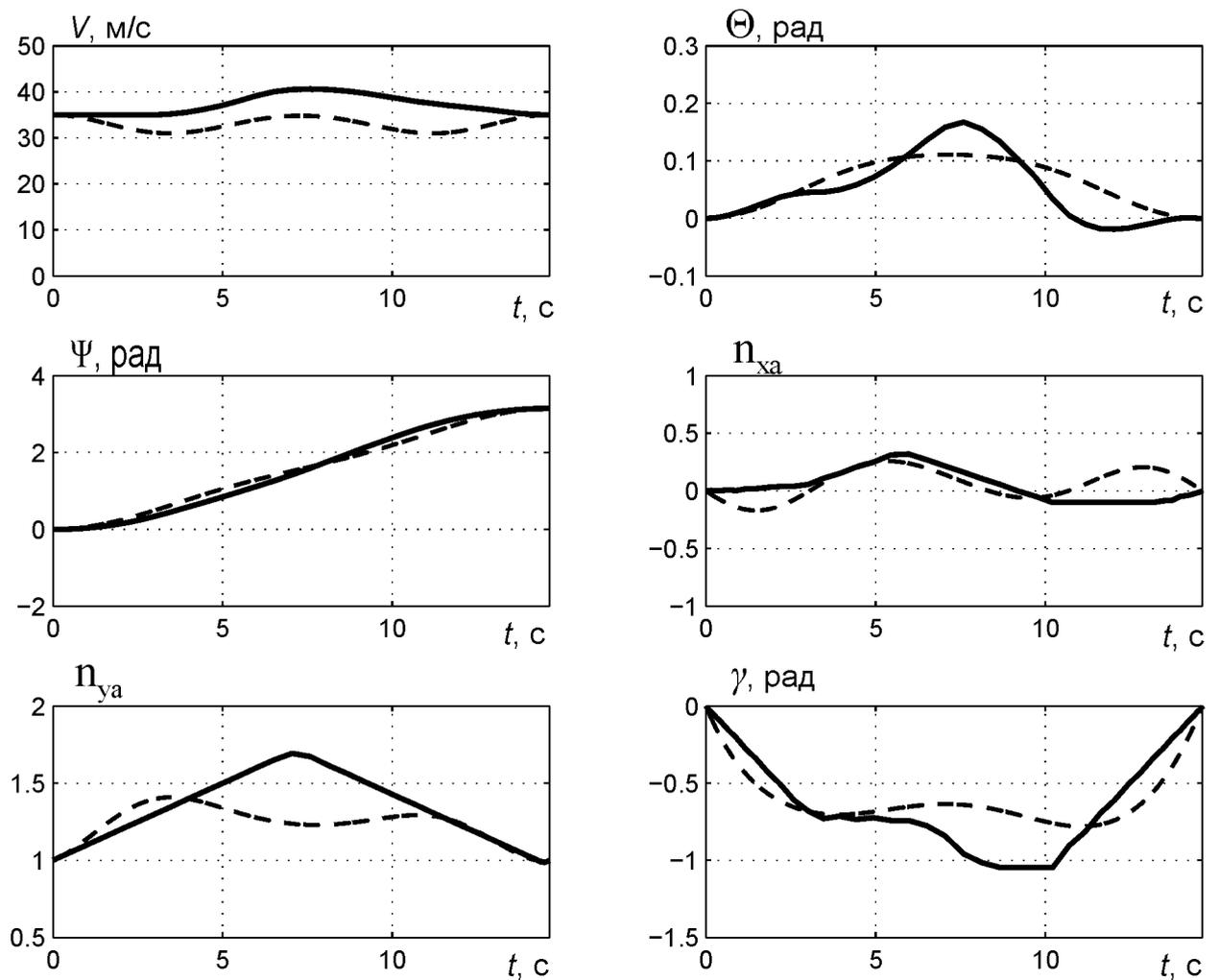


Рис. 2. Поведение переменных управления и состояния (Пример 1).

В этом примере разворот происходит с достаточно большим радиусом. Кривизна траектории невелика, поэтому изменения переменных управления и состояния медленны и плавны. Графики показывают, что результаты двух вариантов имеют отличия, но они не слишком большие. Можно сделать вывод, что оба варианта дают приемлемые для практики решения.

### Пример 2 (разворот на $180^\circ$ с возвратом на исходную высоту)

Граничные условия:

- начало маневра  $t_0 = 0$

$V_0 = 35 \text{ м/с}$ ,  $\Theta_0 = 0 \text{ рад}$ ,  $\Psi_0 = 0 \text{ рад}$ ,  $x_0 = 0 \text{ м}$ ,  $y_0 = 50 \text{ м}$ ,  $z_0 = 0 \text{ м}$ ,

$n_{xa0} = 0$ ,  $n_{ya0} = 1$ ,  $\gamma_0 = 0 \text{ рад}$ .

- окончание маневра  $t_f = 22.5 \text{ с}$

$V_f = 35 \text{ м/с}$ ,  $\Theta_f = 0 \text{ рад}$ ,  $\Psi_f = \pi \text{ рад}$ ,  $x_f = 0 \text{ м}$ ,  $y_f = 50 \text{ м}$ ,  $z_f = -80 \text{ м}$ ,

$n_{xa0} = 0$ ,  $n_{ya0} = 1$ ,  $\gamma_f = 0 \text{ рад}$ .

В расчётах варианта 2 учитываются ограничения на переменные управления и состояния:

$35 \text{ м/с} \leq V \leq 80 \text{ м/с}$ ,  $|\Theta| \leq 60^\circ$ ,  $-90^\circ \leq \Psi \leq 270^\circ$ ,  $-0.1 \leq n_{xa} \leq 0.6$ ,  $-0.1 \leq n_{ya} \leq 2$ ,  $|\gamma| \leq 60^\circ$ .

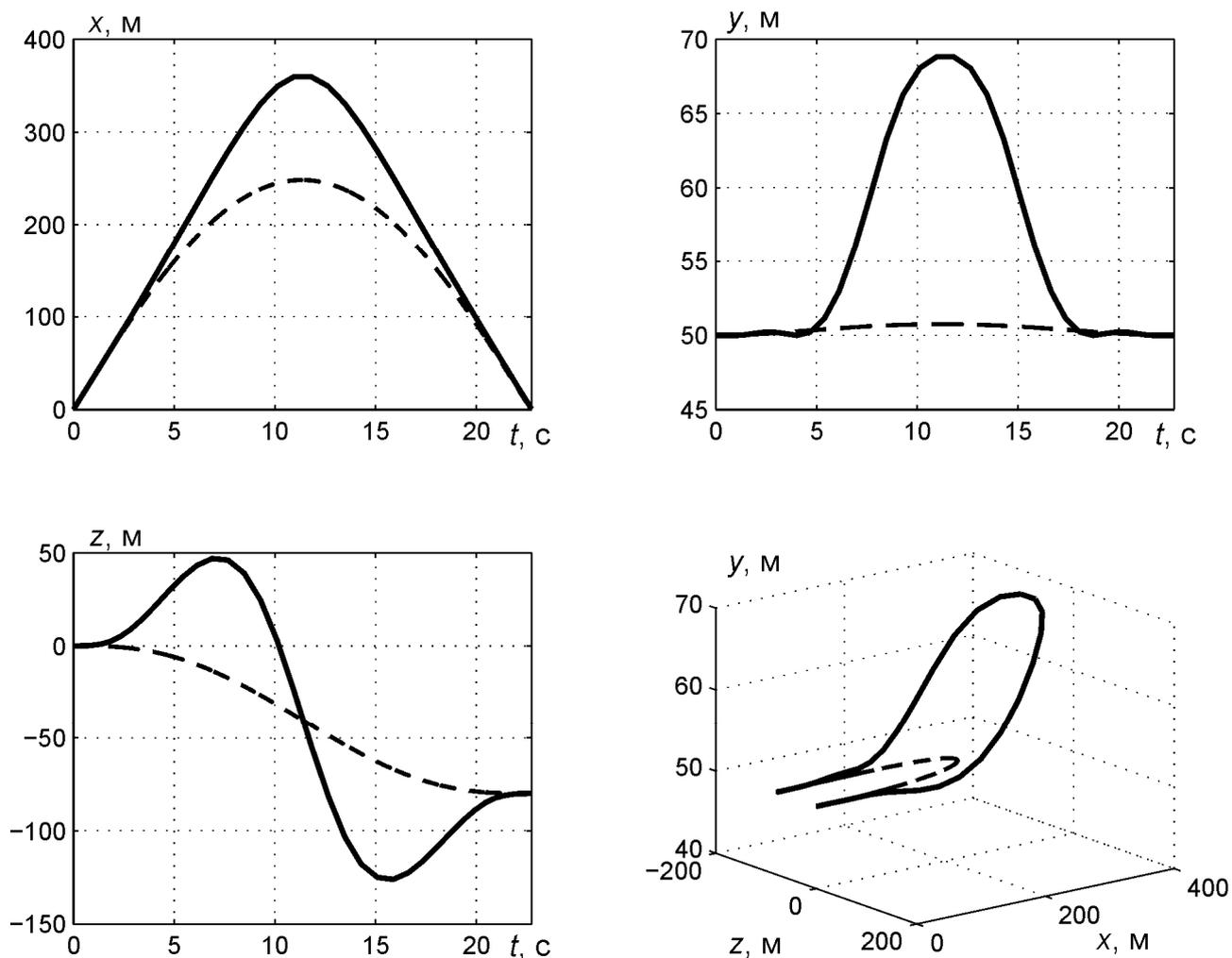


Рис. 3. Траектории движения самолёта (Пример 2).

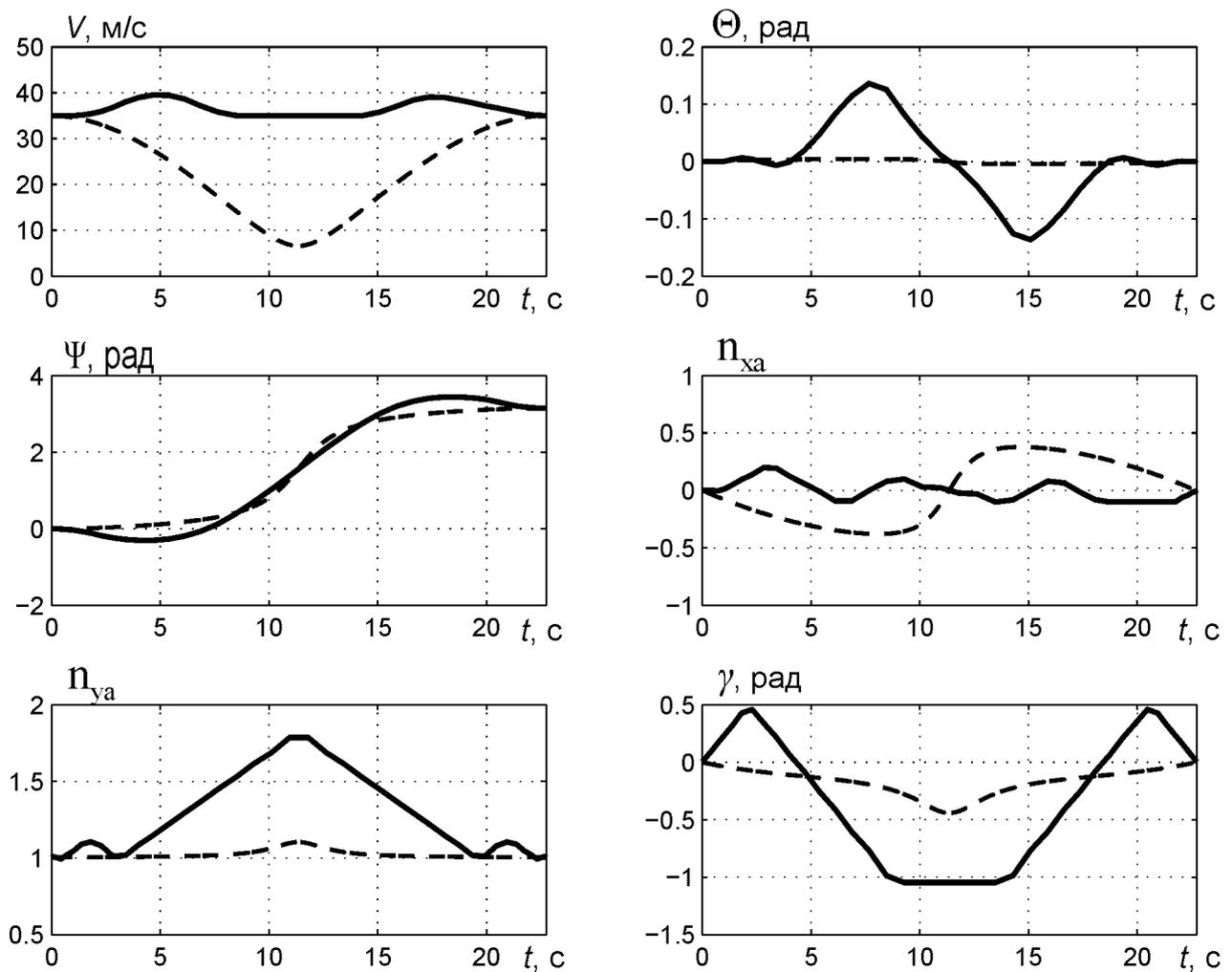


Рис. 4. Поведение переменных управления и состояния (Пример 2).

В этом примере вариант 1 дает траекторию разворота с очень малым радиусом. Кривизна траектории велика, поэтому изменения переменных управления и состояния происходили быстрее и резче чем в первом примере. Результаты вариантов 1 и 2 отличаются очень сильно. Анализ поведения зависимостей  $V(t)$  и  $n_{ya}(t)$  для варианта 1 (рис.4) показывает, что перегрузка  $n_{ya}$  сохраняется на уровне  $\sim 1$  в условиях очень малых скоростей  $V$ , что для обычного самолета совершенно нереально. Минимум скорости достигает величины  $\sim 7$  м/с (на 11-ой секунде), что существенно меньше скорости сваливания и недопустимо по условиям безопасности полета. В окрестности этой точки график зависимости  $\Psi(t)$  (рис.4)

демонстрирует резкое увеличение угла разворота. Но это вполне естественно, т.к. в соответствии с кинематикой движения (см. 3-е уравнение (1)) ситуация  $V \rightarrow 0$  в условиях  $n_{ya} \neq 0$  приводит к получению  $\dot{\Psi} \rightarrow \infty$ .

Таким образом, в данном примере вариант 1 дал неприемлемую для использования траекторию. Результат вполне прогнозируемый, т.к. этот вариант не учитывает ограничения, важные для практической реализации генерируемой траектории. В тоже время, формальная проверка полученного решения варианта 1 на согласованность между переменными управления и переменными состояния никакой информации о неприемлемости решения не дает. На рис. (5) показаны графики поведения переменных состояния для аппроксимирующего решения (9) и для результатов численного интегрирования исходной системы уравнений движения (1) (метод Рунге-Кутты 4-го порядка) с использованием вычисленных по формулам (7) управлений для сгенерированной траектории. Графики обоих типов совпадают, что указывает на согласованность аппроксимирующего решения с динамикой рассматриваемой системы.

Уже этот один пример демонстрирует недостаточность простого планирования траектории полета самолета без учета ограничений, связанных с реализацией этой траектории. Рассмотренный метод планирования траектории с оптимизацией (вариант 2) в данном примере сгенерировал вполне реализуемую траекторию, поскольку этот метод учитывает необходимые ограничения. Однако объемы вычислений этим методом оказываются очень большими, т.к. получение

решения требует использования итерационных процедур нелинейного программирования.

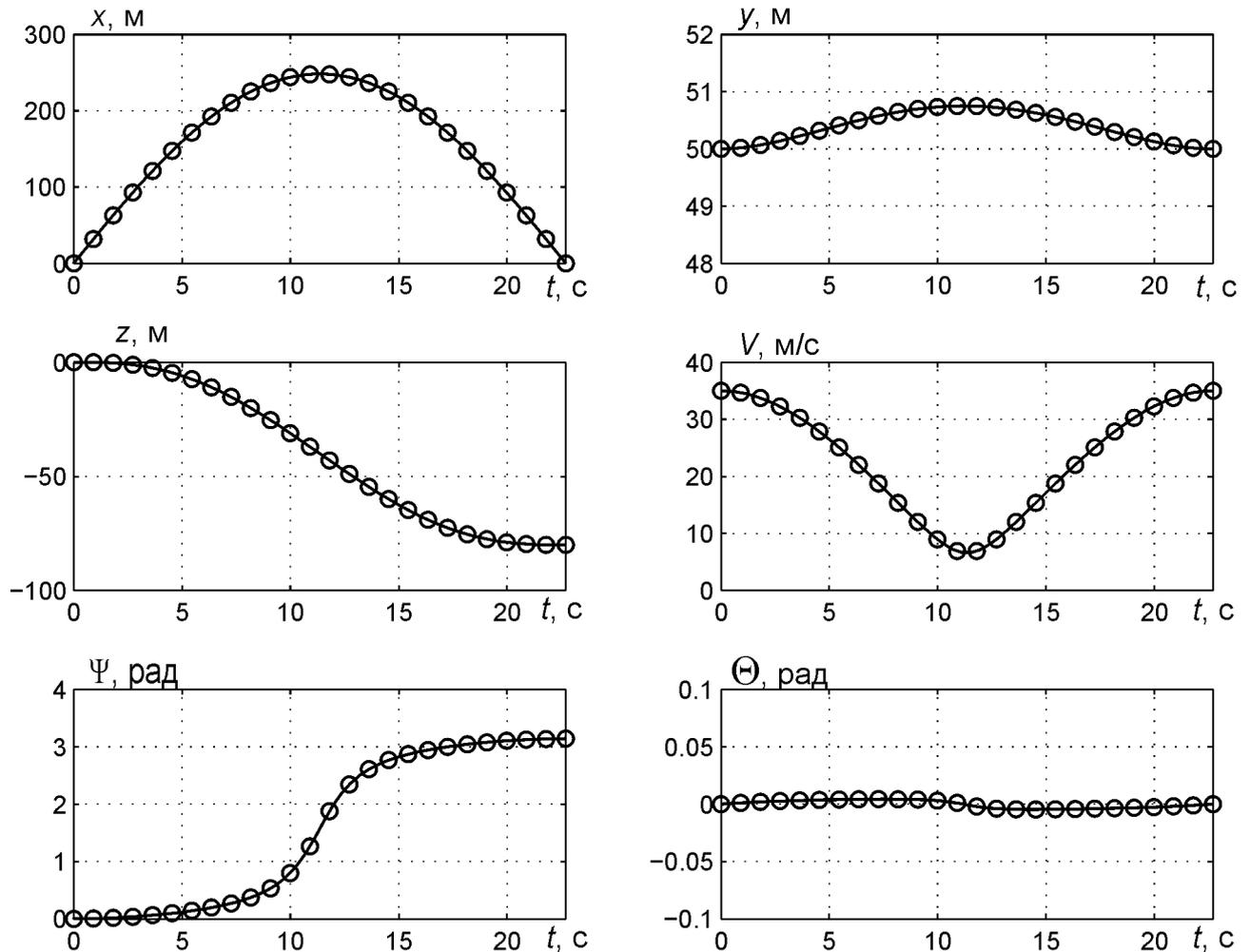


Рис. 5. Проверка на согласованность (маркеры “o” – решение задачи планирования траектории, сплошные линии – результат интегрирования).

### Заключение

В статье рассмотрены и на численных примерах проанализированы два метода планирования траектории пространственного маневра самолета, основанные на параметризации траектории и использовании концепции обратной задачи динамики. Из приведенных расчетных примеров следует, что самый простой метод

планирования, который не учитывает ограничения на фазовые переменные и на управления, может приводить к получению нереальных результатов. И, несмотря на привлекательность из-за своей простоты, этот метод навряд ли приемлем для бортового применения (речь идет о летательных аппаратах обычной самолетной схемы).

Для более надежного решения задачи генерирования траектории маневра можно использовать более сложные методы, позволяющие учесть хотя бы основные, наиболее важные ограничения. Рассмотренный в статье метод прямого решения вариационной задачи, предложенный Тараненко, в принципе позволяет учесть такие ограничения и заодно выполнить оптимизацию маневра по какому либо заданному критерию. Основным недостатком этого метода является большой объем вычислений, что вызвано необходимостью выполнения нелинейной условной оптимизации с привлечением итерационных процедур.

Следует отметить, что даже очень сложный метод генерирования траектории не застрахован от получения нереализуемых решений, поэтому получаемые результаты должны быть проанализированы и проверены. Для условий бортового применения это представляет собой непростую задачу.

### **Библиографический список**

1. Тараненко В.Т., Момджи В.Г. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета. - М.: Машиностроение, 1986. - 127 с.
2. Нелинейная динамика и управление: Сборник статей / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 400 с.

3. Велищанский М.А. Синтез квазиоптимальной траектории движения беспилотного летательного аппарата // Электронный журнал «Наука и образование», 2013, №12: <http://technomag.bmstu.ru/doc/646471.html> (дата публикации 12.2013).
4. Канатников А.Н. Построение траекторий летательных аппаратов с немонотонным изменением энергии // Электронный журнал «Наука и образование», 2013, №4: <http://technomag.bmstu.ru/doc/554666.html> (дата публикации 04.2013).
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости // Электронный журнал «Наука и образование», 2012, №3: <http://technomag.bmstu.ru/doc/367724.html> (дата публикации 03.2012).