

Труды МАИ. 2024. № 134  
Trudy MAI, 2024, no. 134

Научная статья  
УДК 539.3  
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178880>

## **ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ ВАФЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ**

**Сергей Алексеевич Анисимов**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия  
[ser85@bk.ru](mailto:ser85@bk.ru)

*Аннотация.* В работе даётся описание вычислительной модели, основанной на методе численного интегрирования и предназначенной для решения в линейной эйлеровой постановке задач устойчивости сжимаемых в осевом направлении вафельных цилиндрических оболочек. С принятием гипотезы «размазывания» указанные оболочки рассматриваются по схеме конструктивно-ортотропных оболочек, подчиняющихся гипотезам Кирхгофа-Лява. На основе тетраэдрального элемента (Tet10) в среде программного комплекса MSC Patran/Nastran строится также альтернативная конечно-элементная модель для решения тех же задач. Достоверность получаемых численных решений подтверждается хорошим согласованием результатов расчётов на основе отмеченной альтернативной вычислительной модели и имеющимся решением методом конечных разностей. Результаты проведённых

расчётов на устойчивость при осевом сжатии образцов вафельных цилиндрических оболочек, изготовленных из алюминиевых сплавов, сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** устойчивость при осевом сжатии, вафельная цилиндрическая оболочка, метод численного интегрирования, метод конечных элементов

**Для цитирования:** Анисимов С.А. Численный анализ устойчивости при осевом сжатии вафельных цилиндрических оболочек из алюминиевых сплавов // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178880>

Original article

## NUMERICAL ANALYSIS OF BUCKLING UNDER AXIAL COMPRESSION OF ORTHOGRID-STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS MADE OF ALUMINUM ALLOYS

**Sergey A. Anisimov**

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev,

Samara, Russia

[ser85@bk.ru](mailto:ser85@bk.ru)

**Abstract.** In the introductory part of the article, it is noted that orthogrid-stiffened (reinforced on the inner surface by an orthogonal mesh of ribs) cylindrical shells made of aluminum alloys are widespread structural elements of rocket and space technology products, which under operating conditions are subject to large axial compressive loads. An important (in terms of strength) problem here is the calculation of this type of shell for buckling (or load-bearing capacity). Such calculations are usually performed using well-known commercial

finite element systems. The corresponding computational models are built using both shell and volumetric elements. It is noted that the use of these detailed finite element models when carrying out the necessary parametric studies may turn out to be ineffective due to the large expenditure of computer time on the calculation of a separate option. This especially applies to cases of large-sized structures. Recent publications are pointed out, in which calculations for the buckling of the type of shell under consideration are carried out within the framework of models based on the “smearing” hypothesis. With this approach, the shell, supported by a network of ribs, is approximately considered according to the scheme of an axisymmetric structural-orthotropic shell, which makes it possible to construct a more computationally efficient calculation model. It is noted that in this article, a similar calculation model is constructed based on the numerical integration method.

The main content of the article is devoted to the description of the designated computational model and the calculated results obtained using it. Assuming that the reinforcing ribs are located quite often, using the “smearing” hypothesis, the ribbed cylindrical structure under consideration is reduced to a design of a structurally orthotropic shell, working in accordance with the Kirchhoff-Love hypotheses. The problem of buckling under axial compression of the shell model accepted for consideration is formulated in the traditional Eulerian (bifurcation) formulation, taking into account the linearity of the subcritical stress-strain state. The resulting linear homogeneous boundary value problem for a system of eight first-order ordinary differential equations (as a result of applying the procedure of expansion into Fourier series along the circumferential coordinate) for each harmonic number  $n$  is solved using the orthogonal sweep procedure of S.K. Godunov, including numerical integration according to the Kutta-Merson scheme. The numerical

solution algorithm developed (in the form of a Fortran program) determines the harmonic number  $n$  and the smallest (critical) value of the compressive load  $Q$ , at which the specified homogeneous boundary value problem has a non-zero solution.

In order to check the reliability of the results obtained using the described computational model, a calculation of an axially compressible cylindrical orthogrid-stiffened shell was carried out and a comparison was made with the known solution obtained using a finite-difference computational model. Additionally, an alternative finite element model was built in the MSC Patran/Nastran software package based on a tetrahedral element (Tet10). A practical coincidence of the results of the buckling calculations using all three of these computational models was noted.

Next, the question is considered concerning the degree of consistency with experiment of the buckling calculation results obtained using the developed computational model. Calculations were carried out to determine the critical loads for nine different structures of samples of orthogrid-stiffened shells (made of aluminum alloy) that passed axial compression tests. A slight overestimation (by about 20%) of the calculated values of critical loads compared to the experiment was noted. The analysis carried out for the considered set of samples established the desired value of the “knockdown factor” in the form  $k = 0.75$ .

The final part of the article contains conclusions on the research performed. It is noted here that the article presents a computational model constructed using the “smearing” hypothesis and the numerical integration method for calculating the buckling of axially compressed cylindrical orthogrid-stiffened shells. The main results obtained using the developed model are also indicated.

**Keywords:** buckling under axial compression, orthogrid-stiffened cylindrical shell, numerical integration method, finite element method

**For citation:** Anisimov S.A. Numerical analysis of buckling under axial compression of orthogrid-stiffened cylindrical shells made of aluminum alloys. *Trudy MAI*, 2024, no. 134.

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178880>

## Введение

Выполненные из алюминиевых сплавов вафельные (подкреплённые со стороны внутренней поверхности ортогональной сеткой рёбер) цилиндрические оболочки являются широко распространёнными конструктивными элементами изделий ракетно-космической техники, которые в условиях эксплуатации находятся под действием большой величины осевых сжимающих нагрузок. Использование подобного типа оболочек позволяет разработчикам путём надлежащего подбора толщин и геометрических характеристик сетки рёбер находить такие конструктивные варианты, которые в рамках заданных габаритных размеров обеспечивали бы требуемую (в условиях осевого сжатия) несущую способность с одновременным удовлетворением заданных требований по массе проектируемого объекта. В процессе такого подбора должен осуществляться расчёт критического значения осевой сжимающей нагрузки в момент потери несущей способности (или устойчивости) рассматриваемого варианта оболочки.

Согласно обзорным материалам работ [1-8], содержащим информацию по сложившейся к настоящему времени ситуации по вопросам устойчивости орёбрённых оболочек, можно отметить следующее. Расчёты подобных оболочек на

устойчивость, как правило, выполняются с использованием известных коммерческих конечно-элементных комплексов. Соответствующие вычислительные модели строятся с применением как оболочечных, так и объёмных элементов [9-17]. В работе [1] отмечено, что использование указанных подробных конечно-элементных моделей при проведении необходимых параметрических исследований, может оказаться неэффективным вследствие больших затрат машинного времени на расчёт отдельного варианта. Особенно это относится к случаям крупногабаритных конструкций. Указывается на публикации последнего времени, в которых расчёт на устойчивость рассматриваемого типа оболочек осуществляется в рамках моделей, основанных на гипотезе «размазывания». При таком подходе подкреплённая сеткой рёбер оболочка приближённо рассматривается по схеме осесимметричной конструктивно-ортотропной оболочки, жесткостные характеристики которой определяются путём сложения жесткостей исходной (гладкой) оболочки с оцененными (тем или иным способом) жесткостными добавками со стороны подкрепляющей системы рёбер. Задача устойчивости при осевом сжатии принимаемой к рассмотрению модели оболочки формулируется в традиционной эйлеровой (бифуркационной) постановке, осуществляемой с учётом линейности докритического напряжённо-деформированного состояния. Для её решения применяются самые различные аналитические и вычислительные подходы. Ниже даётся описание основанной на методе численного интегрирования вычислительной модели, реализующей решение обозначенной задачи устойчивости, и приводятся примеры её применения к расчётному определению значений критических нагрузок для рассматриваемого типа оболочек.

## Математическая модель, основанная на методе численного интегрирования

Рассматриваем тонкую (толщиной  $h$  и радиусом  $R$ ) изотропную цилиндрическую оболочку, подкреплённую (по внутренней поверхности) в осевом и окружном направлении регулярной ортогональной сеткой рёбер, имеющих прямоугольное поперечное сечение. Принимаем в качестве поверхности приведения срединную поверхность оболочки. Считая, что подкрепляющие рёбра расположены достаточно часто, с применением гипотезы «размазывания» приводим рассматриваемую ребристую цилиндрическую конструкцию к схеме конструктивно ортотропной оболочки, работающей в соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява. Для описания поведения подобной оболочки используем соотношения геометрически нелинейной (в квадратичном приближении) теории оболочек в форме В.В. Новожилова [18]. Криволинейные ортогональные координаты  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для описания напряжённо-деформированного состояния оболочки (см. рис. 1) выбираем следующим образом. Принимаем  $\alpha_1 = x$ , где  $x$  – координата, задающая положение точки вдоль оси вращения  $x$  и отсчитываемая от левого торца оболочки. В качестве  $\alpha_2$  принимаем угловую координату в окружном направлении. Принимаем также  $\alpha_3 = z$ , где  $z$  – координата, отсчитываемая в радиальном направлении от поверхности приведения оболочки. Для геометрических характеристик осевых рёбер (в направлении  $\alpha_1$ ) вводим обозначения  $a_1, b_1, l_1$ , а для кольцевых рёбер (в направлении  $\alpha_2$ ) – обозначения  $a_2, b_2, l_2$ , где  $a_i, b_i, l_i$  ( $i=1, 2$ ) – ширина и высота поперечного сечения соответствующих рёбер и расстояние между двумя соседними из них.

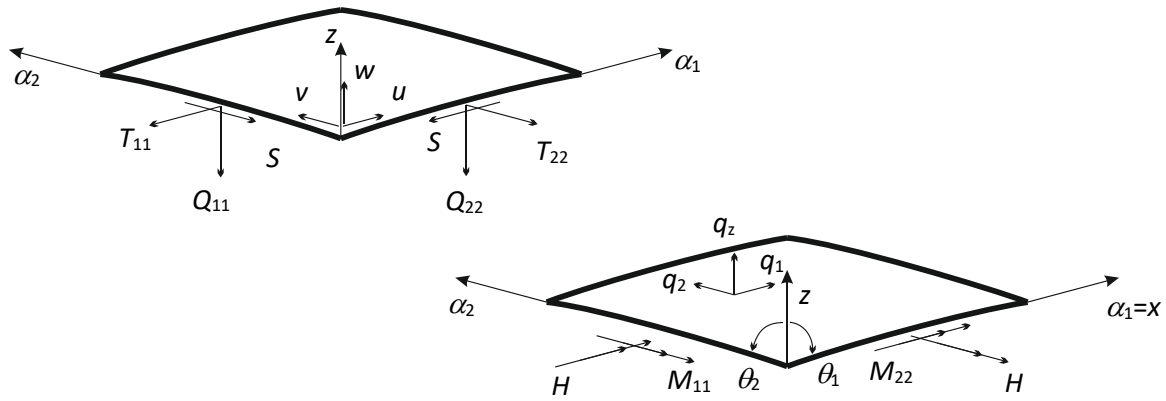


Рис. 1. Элемент оболочки в выбранной системе координат

Напряжённо-деформированное состояние оболочки полностью определяют девятнадцать параметров, обозначаемых как  $u, v, w, \theta_1, \theta_2, E_{11}, E_{22}, E_{12}, K_{11}, K_{22}, K_{12}, T_{11}, T_{22}, S, Q_{11}, Q_{22}, M_{11}, M_{22}, H$  (см. рис. 1). Здесь  $u, v, w$  – перемещения точек поверхности приведения оболочки в направлениях координатных линий  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ;  $\theta_1, \theta_2$  – углы поворотов;  $E_{11}, E_{22}, E_{12}, K_{11}, K_{22}, K_{12}$  – соответственно удлинения, сдвиг, изменения кривизн и кручение поверхности приведения оболочки;  $T_{11}, T_{22}, S, Q_{11}, Q_{22}, M_{11}, M_{22}, H$  – возникающие в оболочке усилия и моменты. Соответствующие девятнадцать определяющих соотношений для указанных параметров записываются в следующем виде.

1) Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= -w', \quad \theta_2 = -w^\bullet + v/R, \\
 E_{11} &= u' + 0,5\theta_1^2, \quad E_{22} = v^\bullet + w/R + 0,5\theta_2^2, \quad E_{12} = v' + u^\bullet + \theta_1\theta_2, \\
 K_{11} &= \theta_1', \quad K_{22} = \theta_2^\bullet, \quad K_{12} = \theta_1^\bullet + v'/R, \\
 (\dots)' &= \frac{\partial(\dots)}{\partial x}, \quad (\dots)^\bullet = \frac{1}{R} \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha_2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$



2) Физические соотношения:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= (B_{11} + \Delta B_{11})E_{11} + B_{12}E_{22} + (A_{11} + \Delta A_{11})K_{11} + A_{12}K_{22} \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\
 S &= B_{33}E_{12} + 2A_{33}K_{12}, \\
 M_{11} &= (A_{11} + \Delta A_{11})E_{11} + A_{12}E_{22} + (D_{11} + \Delta D_{11})K_{11} + D_{12}K_{22} \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\
 H &= A_{33}E_{12} + 2D_{33}K_{12}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Входящие в эти соотношения жесткостные параметры при выборе в качестве поверхности приведения отмеченной срединной поверхности оболочки вычисляются по схеме:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= A_{12} = A_{21} = A_{22} = A_{33} = 0, \\
 B_{11} &= B_{22} = Eh / (1 - \nu^2), \quad B_{12} = B_{21} = \nu B_{11}, \\
 D_{11} &= D_{22} = B_{11}h^2 / 12, \quad D_{12} = D_{21} = \nu D_{11}, \\
 B_{33} &= Gh, \quad D_{33} = B_{33}h^2 / 12, \quad G = 0,5E / (1 + \nu). \\
 \Delta B_{ii} &= EF_i / l_i, \quad \Delta A_{ii} = ES_i / l_i, \quad \Delta D_{ii} = EJ_i / l_i, \quad F_i = a_i b_i, \\
 S_i &= F_i z_{0i}, \quad J_i = a_i b_i^3 / 12 + F_i (z_{0i})^2, \quad z_{0i} = -(h + b_i) / 2, \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки.

3) Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 T_{11}' + S^* + q_1 &= 0, \\
 S' + T_{22}^* + (Q_{22} + H') / R + q_2 &= 0, \\
 Q_{11}' + Q_{22}^* - T_{22} / R + q_z &= 0, \\
 M_{11}' + H^* - T_{11}\theta_1 - S\theta_2 - Q_{11} &= 0, \\
 M_{22}^* + H' - T_{22}\theta_2 - S\theta_1 - Q_{22} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_z$  – интенсивности приложенных к оболочке поверхностных нагрузок (см. рис. 1). В рассматриваемом случае осевого сжатия оболочки эти нагрузки полагаются равными нулю.

4) Граничные условия.

На каждом из торцов оболочки должны быть заданы четыре условия из

приводимого ниже перечня, включающего

- кинематические условия:

$$u=u^*, v=v^*, w=w^*, \theta_1=\theta_2^* \quad (5)$$

- и статические условия:

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S + 2H/R = T_{12}^*, \quad Q_{11} + H^* = Q_{11}^*, \quad M_{11} = M_{11}^* \quad (6)$$

Здесь звёздочкой помечены задаваемые значения параметров на торцах оболочки. При этом факторы  $T_{11}^*$ ,  $T_{12}^*$ ,  $Q_{11}^*$ ,  $M_{11}^*$  представляют собой, соответственно, приложенные к торцу оболочки нормальное усилие, сдвигающее усилие, перерезывающее усилие и изгибающий момент. Их положительные направления совпадают с положительными направлениями соответствующих внутренних усилий и моментов, представленных на рис. 1. В принятом к рассмотрению случае приложения к торцу оболочки равномерно распределённой осевой сжимающей нагрузки  $Q$  на этом торце должно быть задано условие вида:

$$T_{11} = -Q/(2\pi R). \quad (7)$$

Далее мы будем полагать, что в рассматриваемом случае осевого сжатия вафельной оболочки на её торцах реализуются граничные условия, близкие к жёсткому закреплению. Другими словами, в качестве заданного статического граничного условия будем принимать связь (7), считая, что остальные семь граничных условий являются кинематическими, устанавливающими нулевые значения кинематических параметров на торцах оболочки.

До момента достижения приложенной сжимающей нагрузкой некоторого (критического) значения  $Q_{кр}$  единственным решением поставленной краевой задачи

о деформации вафельной оболочки будет осесимметричное решение (с параметрами, зависящими только от координаты  $x$ ), которое назовём основным. В соответствии с бифуркационным подходом в качестве  $Q_{кр}$  принимаем нагрузку, при которой наряду с исходной формой равновесия становятся возможными формы, близкие к исходной, но отличные от неё. Считая бесконечно малыми добавки в компонентах напряжённо-деформированного состояния оболочки, связанные с переходом (в точке бифуркации) от исходного основного равновесного состояния к близкому новому равновесному состоянию, осуществляем относительно этих добавок линеаризацию (в окрестности исходного осесимметричного состояния) соотношений поставленной геометрически нелинейной задачи о деформации оболочки. При этом для нахождения указанных добавок получаем систему линейных однородных алгебраических и дифференциальных (в частных производных по координатам  $\alpha_1=x$  и  $\alpha_2$ ) уравнений с заданными однородными граничными условиями. Представляя искомые добавки разложенными в ряды Фурье по окружной координате (согласно схемам вида  $X = \sum_{n=0}^{\infty} X_{(n)}(\alpha_1) \cos n\alpha_2$ ,  $Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{(n)}(\alpha_1) \sin n\alpha_2$ ), после подстановки полученных выражений в соотношения сформулированной линейной задачи получаем для каждой  $n$ -ой гармоники ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) систему из девятнадцати линейных однородных алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений относительно девятнадцати неизвестных амплитудных значений указанных добавок. Указанные дифференциальные уравнения при этом содержат факторы (обозначаемые как  $\theta_1^0, T_{11}^0, T_{22}^0$ ), представляющие собой результаты решения, отвечающего докритическому состоянию вафельной оболочки при действии сжимающей

нагрузки  $Q$ .

По схеме, изложенной в книге [18], решение каждой из представленных задач (для докритического и критического состояния оболочки) сводим к решению соответствующей линейной краевой (в первом случае неоднородной, во втором случае однородной) задачи для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение обеих краевых задач осуществляем, используя представленную в книге [18] процедуру ортогональной прогонки С.К. Годунова [19] в сочетании с численным интегрированием по методу Кутта-Мерсона [20]. Отметим, что один из фрагментов этой процедуры состоит в формировании (при завершении прямого этапа прогонки) разрешающей системы из четырёх линейных алгебраических уравнений для определения четырёх неизвестных констант, входящих в структуру общего решения поставленной краевой задачи. Столбец правой части этой системы формируется на основе граничных условий, заданных на правом торце оболочки. В случае обозначенной однородной краевой задачи указанная линейная алгебраическая система оказывается однородной. Ненулевое решение этой системы имеет место в случае, если определитель её матрицы равен нулю.

Поиск значения  $Q=Q_{кр}$ , при котором отмеченный определитель приобретает нулевое значение, осуществляется следующим образом. При каждом выбранном значении  $n$  в цикле по  $Q$  с малым по величине шагом  $\Delta Q$  решается методом ортогональной прогонки соответствующая однородная краевая задача с вычислением значения указанного определителя. В момент смены знака этого определителя фиксируется (с точностью  $\Delta Q$ ) значение  $Q=Q_{кр}$ . В качестве искомого критического

значения параметра  $Q$  для исследуемой оболочки принимается минимальная из найденных (при всех  $n$ ) величина  $Q_{кр}$ . Описанная вычислительная модель реализована в виде программы на языке Фортран.

### Подтверждение достоверности получаемых на основе описанной вычислительной модели результатов

В качестве объекта моделирования принимаем вафельную цилиндрическую оболочку из алюминиевого сплава (с упругими характеристиками  $E=70$ Гпа,  $\nu=0,3$ ), расчёт на устойчивость которой при осевом сжатии был выполнен в работе [11] с использованием вычислительной модели, основанной на методе конечных разностей (КР). Длина оболочки  $L=2175$  мм. Значения остальных параметров, характеризующих оболочку, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения геометрических параметров оболочки

$R$ , мм	$b_1$ , мм	$b_2$ , мм	$h$ , мм	$a_1$ , мм	$a_2$ , мм	$l_1$ , мм	$l_2$ , мм
1450	11,5	11,5	2,5	3,5	3,5	70,2	70,2

Будем оценивать, следуя работе [13], так называемую «эффективную» толщину вафельной оболочки ( $t_{эфф}$ ) с использованием схемы:

$$t_{эфф} = \sqrt[4]{\frac{144D_{11}D_{22}}{B_{11}B_{22}}}$$

Отмечаем, что для данной оболочки отношение радиуса к эффективной толщине оценивается величиной  $R/t_{эфф}=127$ .

Расчёт данной оболочки с использованием представленной выше

вычислительной модели, основанной на методе численного интегрирования (ЧИ), привёл к результату  $Q_{кр}=4942$  кН. При этом получена форма потери устойчивости, характеризуемая двенадцатью волнами в окружном направлении и пятью полуволнами в осевом направлении.

Аналогичный расчёт данной оболочки был также выполнен с использованием построенной на основе тетраэдрального элемента (Tet10) в среде программного комплекса MSC Patran/Nastran конечно-элементной (КЭ) модели. При этом моделировалась четверть оболочки с соблюдением соответствующих условий симметрии. В результате выполненного КЭ моделирования получено значение  $Q_{кр}=5236$  кН, что всего лишь на 6% выше результата, полученного ЧИ моделированием. При этом по форме потери устойчивости (см. рис. 2) результаты отмеченных моделирований полностью совпали.

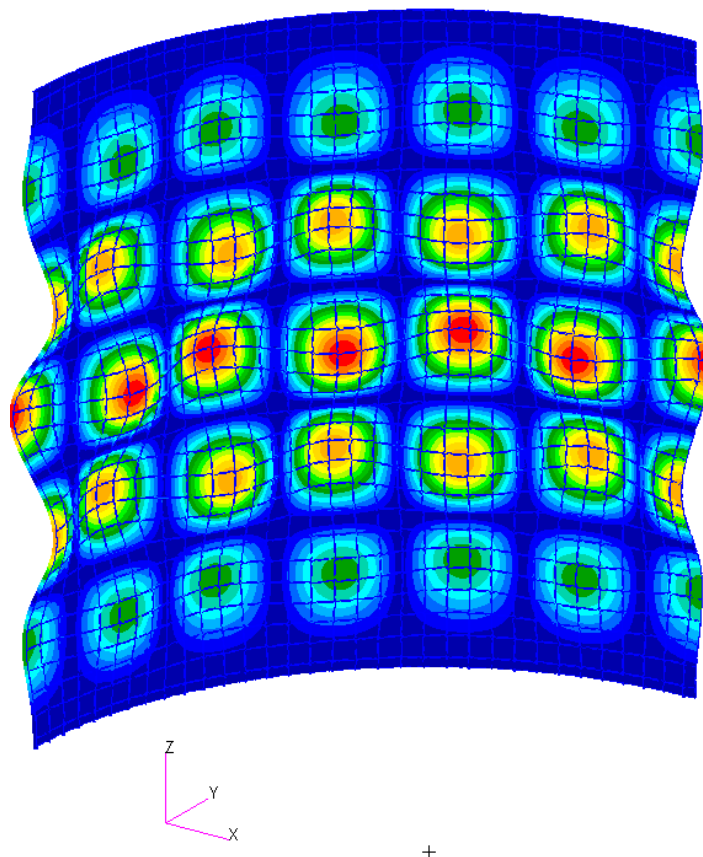


Рис. 2. Форма потери устойчивости

В результате выполненного в работе [11] КР моделирования, учитывающего имеющиеся у оболочки начальные несовершенства (с амплитудой порядка 1,5 мм), получено значение  $Q_{кр} = 5030$  кН, что всего лишь на 1,8% выше результата, полученного методом численного интегрирования.

Наблюдаемое здесь практическое совпадение результатов расчётов на устойчивость, выполненных с применением всех трёх из указанных вычислительных моделей, говорит об обоснованности применения представленной ЧИ модели к расчёту на устойчивость подобного типа вафельных оболочек.

### **Результаты численного моделирования в сравнении с экспериментом**

Отметим, что получаемое расчётом на основе линейного бифуркационного подхода критическое значение нагрузки при осевом сжатии цилиндрической оболочки обычно выше величины  $Q_{кр}^{эксн}$ , фиксируемой в эксперименте. Это расчётное значение называют верхним значением ( $Q_{кр}^в$ ) критической нагрузки. Существенное уменьшение величины  $Q_{кр}^{эксн}$  по сравнению с  $Q_{кр}^в$  связано с наличием отклонений геометрических характеристик реально изготовленной оболочки от характеристик, соответствующих её заданной идеальной форме. Подобные несовершенства, как правило, являются следствием принятой технологии изготовления оболочки. Чтобы учесть при проектировании цилиндрической оболочки, эксплуатируемой в условиях осевого сжатия, влияние отмеченного типа несовершенств, в расчётной практике ориентируются на так называемое нижнее значение критической нагрузки  $Q_{кр}^н$ . Это значение определяется по схеме  $Q_{кр}^н = kQ_{кр}^в$ , где  $k$  - так называемый «коэффициент

понижения». В этой связи, встаёт вопрос об оценке (с экспериментальным подтверждением) значений коэффициента  $k$  применительно к проблеме устойчивости рассматриваемых вафельных оболочек.

В книге [21] со ссылкой на имеющиеся экспериментальные данные указывается, что расчётные значения критических нагрузок для вафельных цилиндрических оболочек при осевом сжатии отличаются от экспериментальных значений в пределах 20%-30%.

В целях оценки степени согласованности результатов численного моделирования, получаемых на основе разработанной вычислительной модели, с экспериментом, были выполнены расчёты по определению критических нагрузок для девяти различной структуры образцов вафельных оболочек (из алюминиевого сплава), прошедших испытания на осевое сжатие [22].

Значения геометрических параметров указанных образцов приведены в таблице 2. Образцам присвоены номера (N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) в порядке возрастания зафиксированной в эксперименте величины критической нагрузки. Для данных образцов отношение радиуса к эффективной толщине  $R/t_{эфф}$  лежит в диапазоне от 67 до 94.

Таблица 2 – Значения геометрических параметров оболочек

N	$Q_{экс},$ кН	$R,$ мм	$b_1,$ мм	$b_2,$ мм	$h,$ мм	$a_1,$ мм	$a_2,$ мм	$l_1,$ мм	$l_2,$ мм
1	2363,4	900	9,64	9,64	1,96	3,53	6,28	101	90
2	2765,5	900	9,9	9,9	1,96	3,84	4,77	101	90
3	2856,7	900	9,75	9,75	2,05	4,82	7,55	104,7	90
4	3010,6	900	9,76	9,76	2,04	5,2	8,04	104,7	90



Продолжение таблицы 2

N	$Q_{экс}$ , кН	R, мм	$b_1$ , мм	$b_2$ , мм	h, мм	$a_1$ , мм	$a_2$ , мм	$l_1$ , мм	$l_2$ , мм
5	3010,6	900	9,87	9,87	2,13	4,5	7,3	104,7	90
6	3295	900	9,38	9,38	2,12	5,4	8,12	87	87
7	3687,3	900	9,18	9,18	2,4	5,3	8,5	100	87
8	3932,5	900	9,81	9,81	2,04	8,6	11,3	104,7	90
9	4452,2	900	12,36	12,36	2,22	4,52	6,04	93,2	90

На рис. 3 представлены диаграммы, характеризующие зависимость значения критической нагрузки  $Q_{кр}$  от номера N испытуемого на осевое сжатие образца.

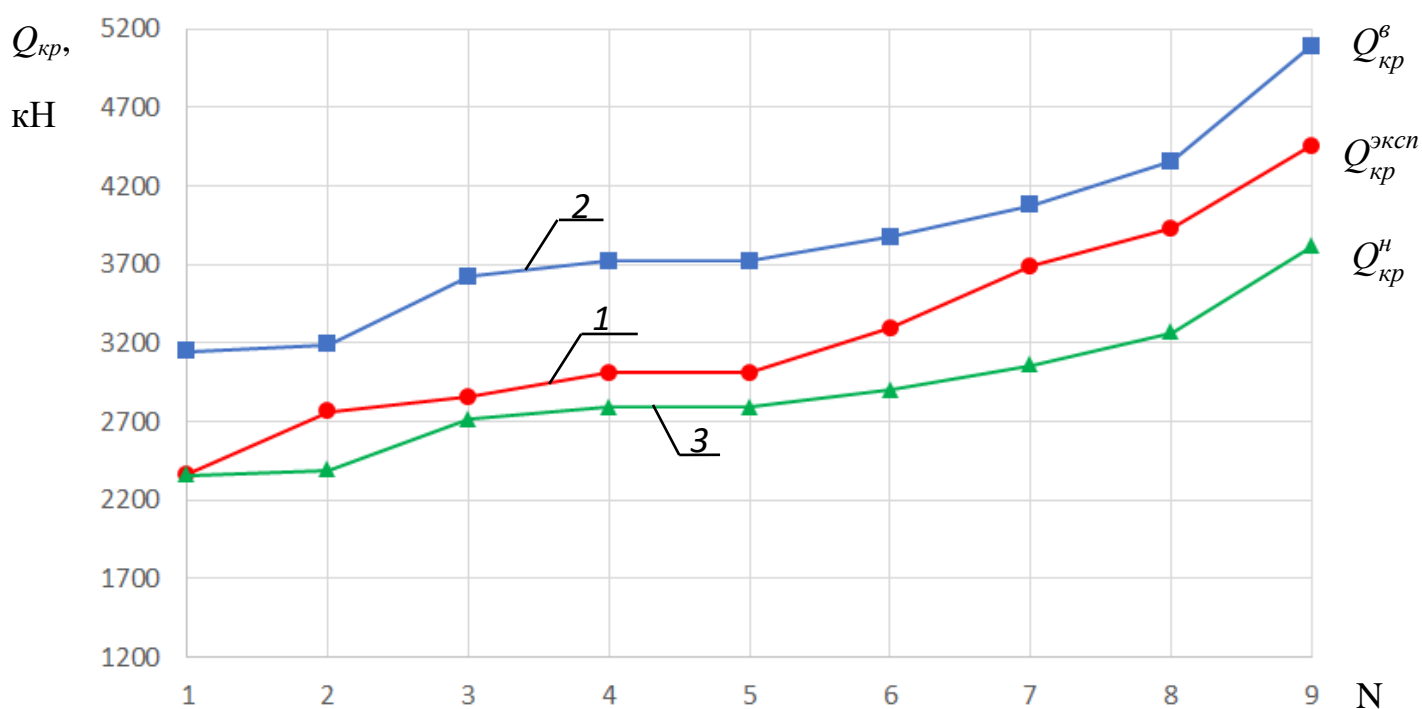


Рис. 3. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными

Цифрой 1 обозначена диаграмма, соответствующая экспериментально полученным результатам (при этом  $Q_{кр} = Q_{кр}^{экс}$ ), цифрой 2 обозначена диаграмма, соответствующая расчётам с использованием принятой вычислительной модели (при этом  $Q_{кр} = Q_{кр}^6$ ), цифрой 3 обозначена диаграмма, соответствующая расчётам по схеме

$Q_{кр}^H = kQ_{кр}^6$ , где  $k = 0,75$  (при этом  $Q_{кр} = Q_{кр}^H$ ). Видно, что расчётная диаграмма 2 хорошо согласуется с результатами эксперимента, но расположена выше экспериментальной диаграммы 1. С использованием значения «коэффициента понижения» вида  $k = 0,75$  можно получить (идущую в запас) нижнюю оценку расчётных значений критических нагрузок для данного типа вафельных оболочек. Отметим, что указанное значение  $k = 0,75$  согласуется с рекомендацией, данной по этому коэффициенту в публикации [23].

### **Заключение**

В завершение укажем, что в данной статье представлена вычислительная модель, основанная на методе численного интегрирования и предназначенная для решения задач устойчивости (в рамках линейного бифуркационного подхода) сжимаемых в осевом направлении вафельных цилиндрических оболочек. Обозначенные оболочки с принятием гипотезы «размазывания» рассматриваются по схеме конструктивно-ортотропных оболочек, подчиняющихся гипотезам Кирхгофа-Лява. С использованием представленной модели проведены расчёты на устойчивость при осевом сжатии ряда изготовленных из алюминиевых сплавов вафельных цилиндрических оболочек. Дано сравнение с результатами эксперимента и расчётными результатами, полученными на основе альтернативных вычислительных моделей.

## Список источников

1. Wang B., Tian K., Hao P., Zheng Y., Ma Y., Wang J. Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells // Composite Structures, 2016, no. 152, pp. 807-815. DOI: [10.1016/j.compstruct.2016.05.096](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.096)
2. Wang B., Du K., Hao P., Zhou C., Tian K., Xu S., Ma Y., Zhang X. Numerically and experimentally predicted knockdown factors for stiffened shells under axial compression // Thin-Walled Structures, 2016, no. 109, pp. 13-24. DOI: [10.1016/J.TWS.2016.09.008](https://doi.org/10.1016/J.TWS.2016.09.008)
3. Wagner H.N.R., Huhne C., Niemann S., Tian K., Wang B., Hao P. Robust knockdown factors for the design of cylindrical shells under axial compression: Analysis and modeling of stiffened and unstiffened cylinders // Thin-Walled Structures, 2018, no. 127, pp. 629-645. DOI: [10.1016/j.tws.2018.01.041](https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.01.041)
4. Tian K., Wang B., Hao P., Waas A.M. A high-fidelity approximate model for determining lower-bound buckling loads for stiffened shells // International Journal of Solids and Structures, 2018, no. 148-149, pp. 14–23. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2017.10.034](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.10.034)
5. Егоров И.А. Учёт пластических деформаций при проектировании отсеков вафельного типа // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164103>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-04)
6. Малинин Г.В. Методики расчета ребристых пластин на прочность и устойчивость // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://www.trudymai.ru/published.php?ID=162655>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)
7. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 104. URL: <https://www.trudymai.ru/published.php?ID=102130>

8. Петров И.И., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <https://www.trudymai.ru/published.php?ID=167066>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-11)
9. Кабанов В.В., Железнов Л.П. Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций: межвузовский сборник трудов. - Куйбышев: КуАИ, 1990. С. 3-12.
10. Юдин А.С., Пономарев С.Е., Юдин С.А. Устойчивость подкреплённых цилиндрических оболочек // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2002. № 1. С. 45-49.
11. Петроковский С.А. Научно-технические разработки ОКБ-23-КБ «Салют». - М.: Воздушный транспорт, 2006. С. 204-240.
12. Петроковский С.А. Научно-технические разработки КБ «Салют» 2012-2013 гг. - М.: Машиностроение, 2014. С. 90-97
13. Hilburger M.W., Lovejoy A.E., Thornburgh R.P., Rankin C. Design and analysis of subscale and full-scale buckling-critical cylinders for launch vehicle technology development // AIAA Paper, 2012. DOI: [10.2514/6.2012-1865](https://doi.org/10.2514/6.2012-1865)
14. Hilburger M.W., Haynie W.T., Lovejoy A.E., Roberts M.G., Norris J.P., Waters W.A., Herring H.M. Subscale and full-scale testing of buckling-critical launch vehicle shell structures // AIAA Paper, 2012. URL: [https://archive.org/details/NASA\\_NTRS\\_Archive\\_20120008177/page/n2/mode/1up](https://archive.org/details/NASA_NTRS_Archive_20120008177/page/n2/mode/1up)
15. Hilburger M.W., Waters W.A.J., Haynie W.T. Buckling Test Results from the 8-Foot-Diameter Orthogrid-Stiffened Cylinder Test Article TA01. [Test Dates: 19-21 November 2008] // NASA/TP-2015-218785, L-20490, NF1676L-20067 - 2015.

16. Hilburger M.W., Waters W.A.J., Haynie W.T., Thornburgh R.P. Buckling Test Results and Preliminary Test and Analysis Correlation from the 8-Foot-Diameter Orthogrid-Stiffened Cylinder Test Article TA02 // NASA/TP-2017-219587, L-20801, NF1676L-26704. - 2017.
17. Васюков Е.В., Владимиров С.А., Ежов С.А. и др. Сравнительный расчётно-экспериментальный анализ устойчивости при осевом сжатии цилиндрических оболочек с вафельным и спиральным типами оребрения // Космонавтика и ракетостроение. 2022. № 5 (128). С. 54-66.
18. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
19. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1961. Т. XVI. Вып. 3. С. 171-174.
20. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. - М.: ИЛ, 1962. – 208 с.
21. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. - М.: Физматлит, 2010. – 248 с.
22. Стёпкин В.И., Сухинин С.Н. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости вафельных оболочечных конструкций с учетом параметров анизотропии // Ракетно-космическая техника: Сер. 2. 1995. Вып. 1. С. 89-101.
23. Hilburger M.W. Developing the next generation shell buckling design factors and technologies // Proceedings of the 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics and materials conference, 2012. DOI: [10.2514/6.2012-1686](https://doi.org/10.2514/6.2012-1686)

## References

1. Wang B., Tian K., Hao P., Zheng Y., Ma Y., Wang J. Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells, *Composite Structures*, 2016, no. 152, pp. 807-815. DOI: [10.1016/j.compstruct.2016.05.096](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.096)
2. Wang B., Du K., Hao P., Zhou C., Tian K., Xu S., Ma Y., Zhang X. Numerically and experimentally predicted knockdown factors for stiffened shells under axial compression, *Thin-Walled Structures*, 2016, no. 109, pp. 13-24. DOI: [10.1016/J.TWS.2016.09.008](https://doi.org/10.1016/J.TWS.2016.09.008)
3. Wagner H.N.R., Huhne C., Niemann S., Tian K., Wang B., Hao P. Robust knockdown factors for the design of cylindrical shells under axial compression: Analysis and modeling of stiffened and unstiffened cylinders, *Thin-Walled Structures*, 2018, no. 127, pp. 629-645. DOI: [10.1016/j.tws.2018.01.041](https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.01.041)
4. Tian K., Wang B., Hao P., Waas A.M. A high-fidelity approximate model for determining lower-bound buckling loads for stiffened shells, *International Journal of Solids and Structures*, 2018, no. 148-149, pp. 14–23. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2017.10.034](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.10.034)
5. Egorov I.A. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=164103>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-04)
6. Malinin G.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. URL: <https://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=162655>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)
7. Firsanov V.V., Vo A.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 104. URL: <https://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=102130>
8. Petrov I.I., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. URL: <https://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=167066>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-11)

9. Kabanov V.V., Zheleznov L.P. *Voprosy prochnosti i dolgovechnosti elementov aviatsionnykh konstruksyi* (Questions of strength and durability of elements of aviation designs), Kuibyshev, KuAI, 1990, pp. 3-12.
10. Yudin A.S., Ponomarev S.E., Yudin S.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2002, no. 1, pp. 45-49.
11. Petrokovskii S.A. *Nauchno-tekhnicheskie razrabotki OKB-23 – KB «Salyut»* (Scientific and technical developments OKB-23 – KB «Salyut»), Moscow, Vozdushnyi transport, 2006, pp. 204-240.
12. Petrokovskii S.A. *Nauchno-tekhnicheskie razrabotki KB «Salyut» 2012-2013 gg* (Scientific and technical developments KB «Salyut» 2012-2013 years), Moscow, Mashinostroenie, 2014, pp. 90-97.
13. Hilburger M.W., Lovejoy A.E., Thornburgh R.P., Rankin C. Design and analysis of subscale and full-scale buckling-critical cylinders for launch vehicle technology development, *AIAA Paper*, 2012. DOI: [10.2514/6.2012-1865](https://doi.org/10.2514/6.2012-1865)
14. Hilburger M.W., Haynie W.T., Lovejoy A.E., Roberts M.G., Norris J.P., Waters W.A., Herring H.M. Subscale and full-scale testing of buckling-critical launch vehicle shell structures, *AIAA Paper*, 2012. URL: [https://archive.org/details/NASA\\_NTRS\\_Archive\\_20120008177/page/n2/mode/1up](https://archive.org/details/NASA_NTRS_Archive_20120008177/page/n2/mode/1up)
15. Hilburger M.W., Waters W.A.J., Haynie W.T. Buckling Test Results from the 8-Foot-Diameter Orthogrid-Stiffened Cylinder Test Article TA01. [Test Dates: 19-21 November 2008], *NASA/TP-2015-218785*, L-20490, NF1676L-20067 - 2015.
16. Hilburger M.W., Waters W.A.J., Haynie W.T., Thornburgh R.P. Buckling Test Results and Preliminary Test and Analysis Correlation from the 8-Foot-Diameter Orthogrid-

Stiffened Cylinder Test Article TA02, *NASA/TP-2017-219587*, L-20801, NF1676L-26704 - 2017.

17. Vasyukov E.V., Vladimirov S.A., Ezhov S.A. et al. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2022, no. 5 (128), pp. 54-66.

18. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolochechnykh konstruksii* (Statics and dynamics of thin-walled shell designs), Moscow, Mashinostroenie, 1975, 376 p.

19. Godunov S.K. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1961, vol. XVI, no. 3, pp. 171-174.

20. Lans Dzh.N. *Chislennye metody dlya bystrodeistvuyushchikh vychislitel'nykh mashin* (Numerical methods for high-speed computers), Moscow, IL, 1962, 208 p.

21. Sukhinin S.N. *Prikladnye zadachi ustoychivosti mnogosloinykh kompozitnykh obolochek* (Applied problems of buckling of multilayer composite shells), Moscow, Fizmatlit, 2010, 248 p.

22. Stepkin V.I., Sukhinin S.N. *Raketno-kosmicheskaya tekhnika*, 1995, no. 1, pp. 89-101.

23. Hilburger M.W. Developing the next generation shell buckling design factors and technologies, *Proceedings of the 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics and materials conference*, 2012. DOI: [10.2514/6.2012-1686](https://doi.org/10.2514/6.2012-1686)

Статья поступила в редакцию 02.02.2024

Одобрена после рецензирования 12.02.2024

Принята к публикации 27.02.2024

The article was submitted on 02.02.2024; approved after reviewing on 12.02.2024; accepted for publication on 27.02.2024