

Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа

Горелов С.Л.^{1,2*}, Нгуен Ван Лам^{2}**

¹ *Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, ЦАГИ, ул. Жуковского, 1, Жуковский, Московская область, 140180, Россия*

² *Московский физико-технический институт, МФТИ, Институтский переулок, 9, Долгопрудный, Московская область, 141701, Россия*

*e-mail: gorelovsl@yandex.ru

**e-mail: lamvqtc1990@gmail.ru

Статья поступила 05.07.2020

Аннотация

Для тела вращения со степенной образующей вычисляется сила сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей.

Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: гиперзвуковой поток, локальные модели, аэродинамическая сопротивление тела вращения, вариационная задача.

Введение

Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе широкое распространение получили формулы, найденные из

локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует с потоком газа независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Примером такой зависимости является формула Ньютона, широко используемая в гиперзвуковой аэродинамике для оценочных расчетов распределения давления на поверхности тела. Такое представление сил, действующих на тела в гиперзвуковом потоке позволяет достаточно просто решать задачу вариационную задачу о поиске форм тел минимального сопротивления. Такая задача решалась многими авторами (например, [1-14]). В данной работе решается аналогичная задача с использованием приближенной локальной модели [15, 16]. Найдены тела вращения минимального сопротивления (образующая – степенная функция) произвольного удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

1. Тело вращения минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке (большое удлинение)

Задано тело вращения длиной L и радиусом основания R . Требуется определить форму образующей $y(x)$ такую при которой это тело имеет минимальное сопротивление в гиперзвуковом потоке газа. Причем, давление на элемент поверхности определяется формулой Ньютона.

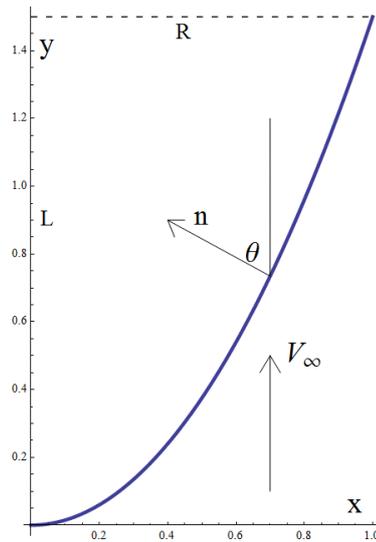


Рис. 1. Схема обтекания тела вращения. Ось вращения OY .
Радиус основания R , длина L .

Длина тела равна L , радиус основания R ($0 < x < R$, $y(R) = L$),

удлинение $\lambda = L/R$. Сила давления, действующая на элемент поверхности, отнесенная к скоростному напору и площади элемента в гиперзвуковом потоке равна по Ньютону [1 - 5]

$$C_p = 2 \cos^2 \theta, \quad C_\tau = 0 \quad (1.1)$$

θ - угол между внутренней нормалью к поверхности и направлением скорости газа.

Площадь элемента поверхности равна

$$ds = x d\varphi \sqrt{dx^2 + dy^2} = x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx d\varphi, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} \quad (1.2)$$

Коэффициент сопротивления равен (отнесен к площади основания)

$$C_{xa} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R C_p \cos \theta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{4}{R^2} \int_0^R \cos^3 \theta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1.3)$$

Имея в виду $\cos^3 \theta = \left[1 + (dy/dx)^2 \right]^{3/2}$, получаем

$$Cxa = \frac{4}{R^2} \int_0^R \frac{x}{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (1.4)$$

Или в безразмерном виде (линейные размеры отнесены к R)

$$Cxa = 4 \int_0^1 \frac{x}{1 + \lambda^2 (dy/dx)^2} dx, \quad \lambda = \frac{L}{R} \quad (1.5)$$

Когда удлинение λ велико, то есть $\lambda \gg 1$ уравнение (1.5) упрощается

$$Cxa = \frac{4}{\lambda^2} \int_0^1 \frac{x}{(dy/dx)^2} dx \quad (1.6)$$

Уравнение Эйлера [3] в этом случае запишется

$$\frac{2x}{y'^3} = const \quad (1.7)$$

Это уравнение имеет решение при $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

$$y(x) = x^{4/3} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.6), получаем

$$Cxa = \frac{27}{16\lambda^2} \quad (1.9)$$

2. Произвольное удлинение

Поскольку в случае больших удлинений образующая тела вращения минимального сопротивления есть степенная функция (1.8), то естественно искать эту образующую в классе степенных функций и в случае произвольных значений

величины λ . В такой же постановке, как и в пункте 1 будем искать образующую в виде: $y = Lz^\beta$, $z = x/R$, $\lambda = L/r$. Тогда уравнение (1.5) запишется

$$Cxa = 4 \int_0^1 \frac{z}{1 + (\lambda\beta z^{\beta-1})^2} dz \quad (2.1)$$

Интеграл (2.1) выражается через гипергеометрическую функцию

$$Cxa = 2 \cdot F\left(1, \frac{1}{\beta-1}; \frac{\beta}{\beta-1}; -(\lambda\beta)^2\right) \quad (2.2)$$

Задавая различные величины λ , не трудно вычислить значения β , исходя из уравнения (2.2), , при которых функция $Cxa(\beta)$ минимальна.

Эта задача решалась в системе координат такой же как и в классической задаче Ньютона [1], то есть ось вращения тела это ось OY и скорость газа направлена вдоль этой оси. В более поздних работах [2 - 5] такая же задача решается в системе координат X_1OY_1 повернутой на 90^0 , то есть ось тела вращения направлена вдоль оси OX_1 . В этом случае уравнение образующей имеет вид

$$y_1 = R(x_1/L)^\alpha \quad (2.3)$$

Не трудно заметить, что в этом случае $\alpha = \beta^{-1}$, то есть для тела с большим удлинением $\alpha = 3/4$, что соответствует известным решениям [2 - 5].

На Рис. 2 нанесены величины степени α в уравнении образующей (2.3) в зависимости от λ в случае формулы Ньютона силы давления на элемент поверхности тела вращения при которых сопротивление тела в гиперзвуковом потоке минимальна.

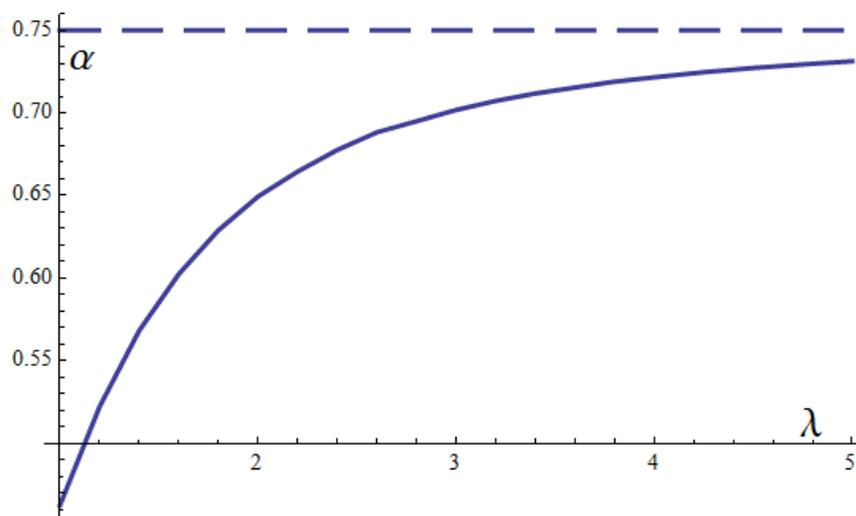


Рис. 2. Зависимость степени α от удлинения тела λ (точки), пунктир - $\alpha = 3/4$ -приближение тела большого удлинения ($\lambda \gg 1$)

3. Свободномолекулярная модель

В случае свободномолекулярного приближения в гиперзвуковом потоке газа можно записать [17 - 20]

$$Cp = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma}, \quad C\tau = 2 \cos \theta \sin \theta \quad (3.1)$$

Здесь t_w - температурный фактор, γ - показатель адиабаты, θ - угол между внутренней нормалью к поверхности и направлением скорости газа.

Задача ставится также как и в п. 1. Используя формулу (1.2), коэффициент сопротивления равен (отнесен к площади основания)

$$\begin{aligned}
Cxa &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (Cp \cos \theta + C\tau \sin \theta) \cdot ds = \\
&= \frac{4}{R^2} \int_0^R \cos^3 \theta \cdot x \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx + \\
&+ \frac{2}{R^2} \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma} \int_0^R \cos^2 \theta \cdot x \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx + \\
&\quad + \frac{4}{R^2} \int_0^R \cos \theta \sin^2 \theta \cdot x \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \\
&= 2 + \frac{2}{R^2} \sqrt{\pi t_w \frac{\gamma - 1}{\gamma}} \int_0^R \frac{x}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} dx
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть образующая – степенная функция: $y = Lz^\beta$, $z = x/R$, $\lambda = L/r$

Тогда уравнение (3.2) запишется

$$Cxa = 2 + 2\sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma} \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1 + (\lambda \beta z^{\beta-1})^2}} dz \tag{3.3}$$

Для тела большого удлинения $\lambda \gg 1$ интеграл в (2.3) равен

$$\int_0^1 \frac{z}{\lambda \beta z^{\beta-1}} dz = \frac{1}{\lambda \beta (3 - \beta)}$$

Эта функция имеет минимум при $\beta = 3/2$ и образующая равна $y = Lz^{3/2}$

При произвольном удлинении можно записать

$$Cxa = 2 + \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta - 1}; \frac{\beta}{\beta - 1}; -\lambda^2 \beta^2\right) \tag{3.4}$$

Степень β вычисляется так же как и в п.1 при $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$. На Рис. 3

нанесена зависимость $\alpha(\lambda) = \beta^{-1}$ в свободномолекулярном случае.

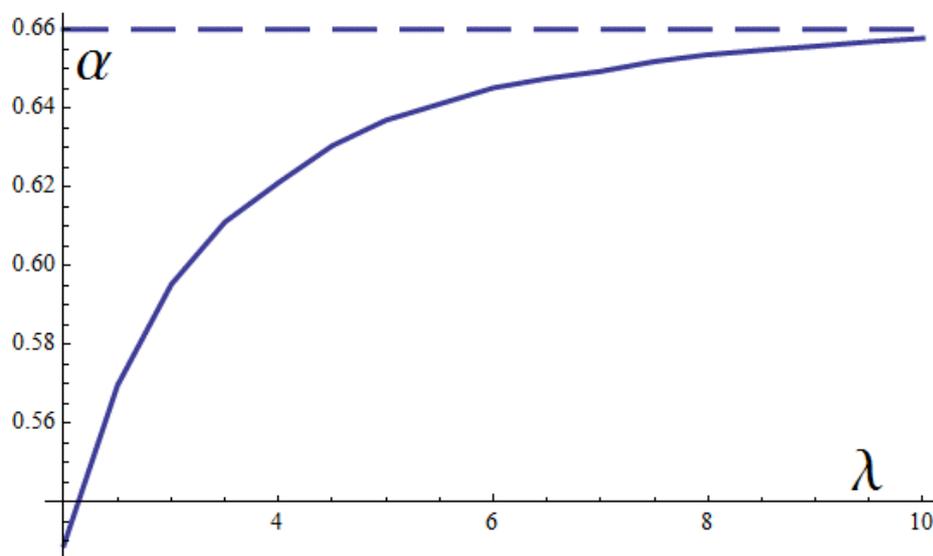


Рис. 3. Зависимость степени α от удлинения тела λ (точки) в свободномолекулярном случае, пунктир - $\alpha = 2/3$ - приближение тела большого удлинения ($\lambda \gg 1$)

Величина α меняется от $\alpha = 0.535$ при $\lambda = 1$ до $\alpha = 2/3$ при $\lambda \gg 1$, что соответствует известному решению [5].

4. Локальная модель

Не смотря на то что в вычислительной гиперзвуковой аэродинамике разреженного газа широко используются как статистические методы (Монте-Карло), так и методы, основанные на сплошнородных моделях [20 - 26] для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения.

Эта зависимость может включать в себя скорость движения и характеристики среды (величина плотности, температура и др.), которые считаются постоянными. Наибольшего распространения получила локальная модель из [15 - 16], в которой коэффициенты давления и трения равны

$$Cp = p_0 \cos^2 \theta + p_1 \cos \theta; \quad C\tau = \tau_0 \cos \theta \sin \theta \quad (4.1)$$

Функции p_0, p_1, τ_0 зависят от числа Re_0 , температурного фактора t_w и показателя степени адиабаты γ .

$$p_0 = 2, \quad p_1 = \sqrt{\pi t_w \frac{\gamma - 1}{\gamma}} \exp[-(0.125 + 0.078 t_w) Re_0],$$

$$\tau_0 = \frac{5.23}{\left[R + 6.88 \exp(0.0072 R - 0.000016 R^2) \right]^{1/2}}, \quad R = Re_0 \left(\frac{3}{4} t_w + \frac{1}{4} \right)^{-2/3} \quad (4.2)$$

Задача ставится также, как и в п. 1. Используя формулы (1.2) и (3.1), коэффициент сопротивления равен (отнесен к площади основания)

$$Cxa = \frac{2}{R^2} (p_0 - \tau_0) \int_0^R \frac{x}{1 + (dy/dx)^2} dx +$$

$$+ \frac{2}{R^2} p_1 \int_0^R \frac{x_1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} dx + \frac{2}{R^2} \tau_0 \int_0^R x dx \quad (4.3)$$

В случае, когда образующая тела вращения – степенная функция, имеем

$$Cxa = 2(p_0 - \tau_0) \int_0^1 \frac{z dz}{1 + (\lambda \beta z^{\beta-1})^2} + 2p_1 \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{1 + (\lambda \beta z^{\beta-1})^2}} + \tau_0$$

$$y = Lz^\beta, \quad z = x/R, \quad \lambda = L/r \quad (4.4)$$

Интегралы, входящие в это выражение – суть гипергеометрические функции, тогда

$$C_{\text{ха}} = (p_0 - \tau_0) \cdot \left\{ F \left(1, \frac{1}{\beta-1}; \frac{\beta}{\beta-1}; -\lambda^2 \beta^2 \right) \right\} + \quad (4.5)$$

$$+ p_1 \cdot \left\{ F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}; \frac{\beta}{\beta-1}; -\lambda^2 \beta^2 \right) \right\} + \tau_0$$

На Рис.4. представлены зависимости показателей степеней α тел вращения минимального сопротивления от удлинения λ для разных чисел Re_0

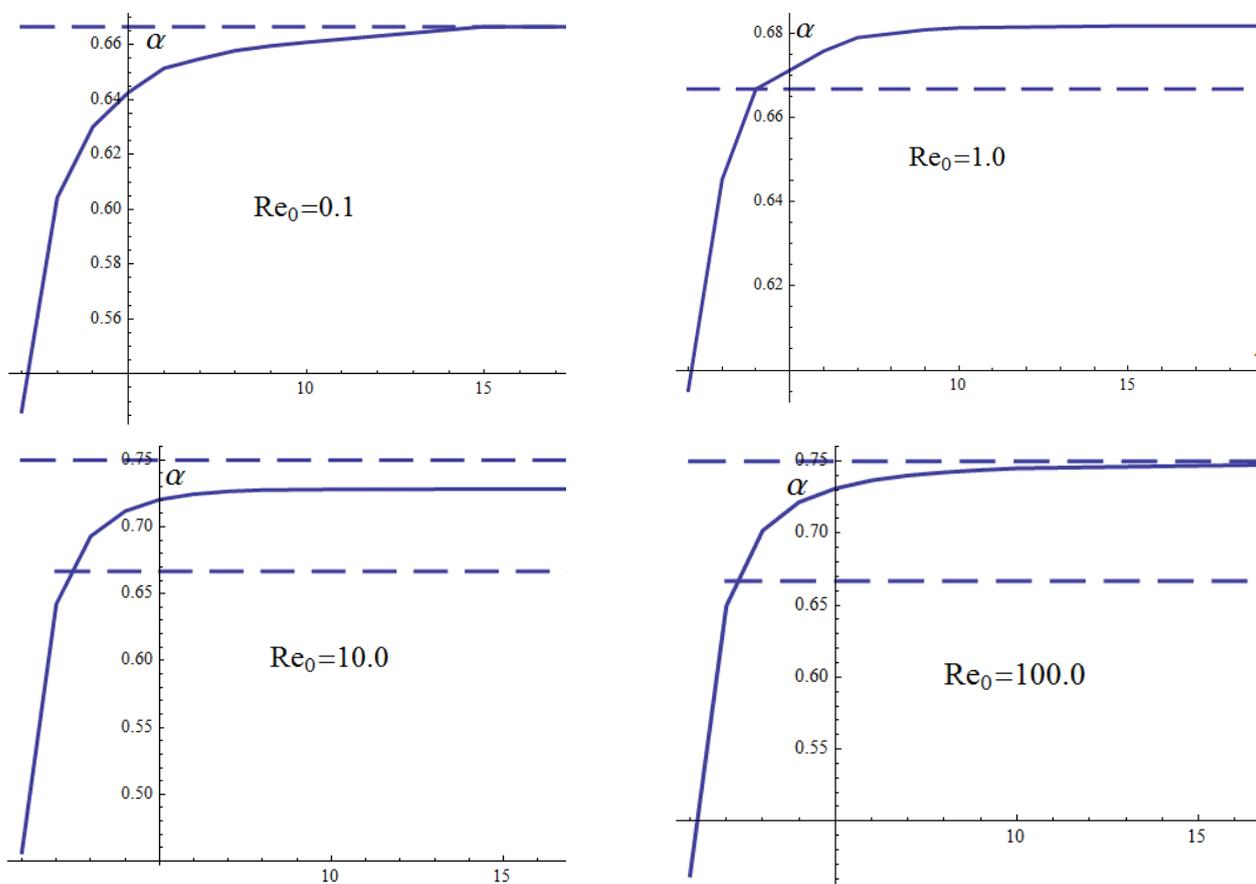


Рис. 4. Зависимость показателей степеней α тел вращения минимального сопротивления от удлинения λ для разных чисел Re_0 , $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$.

Пунктиром обозначены значения $\alpha = 2/3$ и $\alpha = 3/4$.

Отметим, что при больших удлинениях (больших λ) показатели степеней стремятся к своим классическим значениям, либо $\alpha = 2/3$ при малых числах Re_0 , либо к $\alpha = 3/4$ при больших числах Re_0 . Отметим также, что начиная с $Re_0 = 100$ результаты не меняются.

На Рис.5. нанесены значения показателей степеней степенных тел вращения минимального сопротивления в зависимости от чисел Re_0 при больших значениях λ

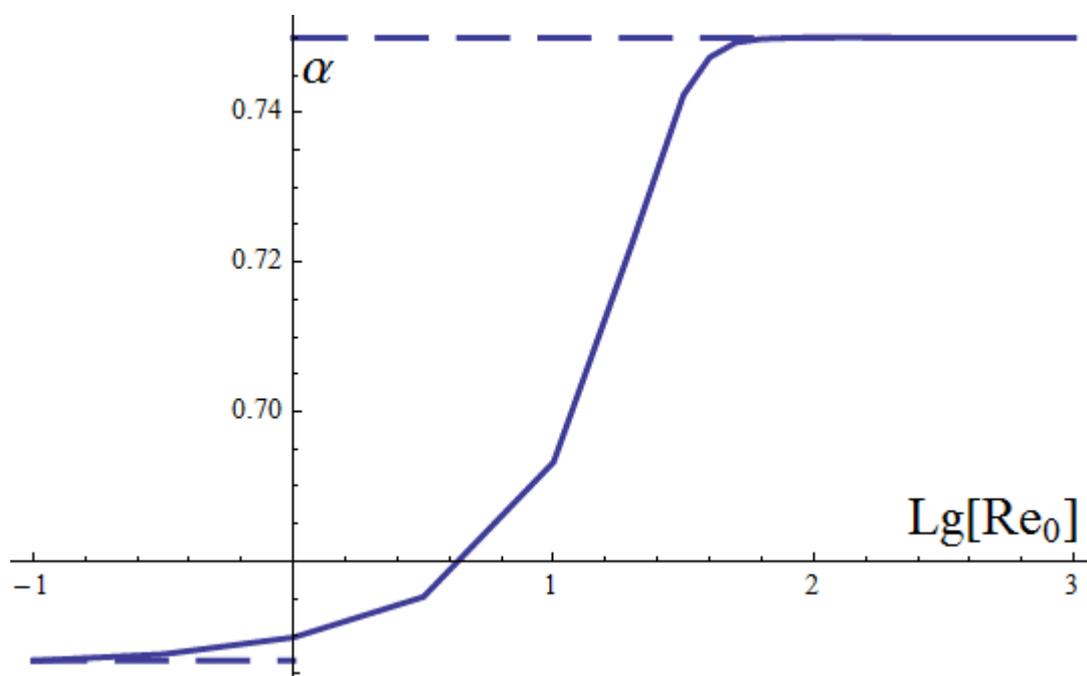


Рис. 5. Значения показателей степени в зависимости от чисел Re_0 при больших λ , $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$. Пунктиром обозначены предельные значения α : $\alpha = 2/3$ при $Re_0 \rightarrow 0$ и $\alpha = 3/4$ при $Re_0 \rightarrow \infty$.

Заключение

Для тела вращения со степенной образующей вычислена сила сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа на основе трех локальных моделей: ньютоновская модель, свободномолекулярная модель, локальная гиперзвуковая модель.

Для всех этих моделей решение представлено в виде гипергеометрической функции.

Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

При числах Рейнольдса стремящихся к нулю и для больших удлинений степень в образующей тела вращения минимального сопротивления стремится к $2/3$, а при числах Рейнольдса стремящихся к бесконечности – к $3/4$, что соответствует свободномолекулярному режиму течения и режиму сплошной среды, соответственно.

Работа поддержана РФФИ, Грант № 20-08-00790

Библиографический список

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. - М: Наука, 1989. – 688 с.
2. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. - М: Физматгиз, 1959. - 220 с.
3. Крайко А.Н., Пудовкин Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. - М: Янус-К, 2001. - 132 с.
4. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. - М: Изд-во МГТУ, 2006. - 488 с.
5. Миеле А. Теория оптимальных аэродинамических форм. - М: Мир, 1969. - 508 с.

6. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. – М.: Машиностроение, 1975. - 328 с.
7. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О телах наименьшего сопротивления, двигающихся в средах при наличии закона локальности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 1. С. 95 - 106.
8. Бунимович А.И., Якунина Г.Е. Исследование форм поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 112 - 117.
9. Благодосклон В.И., Гродзовский Г.Л. Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. V. № 6. С. 6 - 22.
10. Таковицкий С.А. Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Механика жидкости и газа. 2006. № 2. С. 157 - 162.
11. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. № 2. С. 199 - 310.
12. Голубкин В.Н., Сысоев В.В. Влияние затупления передней кромки на оптимальные параметры крыла при гиперзвуковых скоростях // Ученые записки ЦАГИ. 2003. Т. XXXIV. № 3-4. С. 15 - 24.
13. Голубкин В.Н., Сысоев В.В. Оптимальные по сопротивлению формы носовых частей профилей и тел вращения в гиперзвуковом потоке под углом атаки // Ученые записки ЦАГИ. 2008. Т. XXXIX. № 3. С. 14 - 20.

14. Таковицкий С.А. Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 6. С. 775 - 782.
15. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6 - 10.
16. Николаев В.С. Аппроксимационные формулы для локальных аэродинамических характеристик тел типа крыла в вязком гиперзвуковом потоке в широком диапазоне параметров подобия // Ученые записки ЦАГИ. 1981. Т. XII. № 4. С. 143 - 150.
17. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. - М: Наука, 1967. - 440 с.
18. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. - М.: Машиностроение, 1977. - 184 с.
19. Гусев В.Н., Ерофеев А.И., Климова Т.В., Перепухов В.А., Рябов В.В., Толстых А.И. Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1855. С. 43.
20. Егоров И.В., Ерофеев А.И. Исследование гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе сплошнородного и кинетического подходов // Ученые записки ЦАГИ. 1997. Т. XXVIII. № 2. С. 23 - 40.
21. Вьонг Ван Тьен, Горелов С.Л. Нелинейные явления в разреженном газе в задаче Куэтта // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93327>

22. Березко М.Э., Никитченко Ю.А., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80922>
23. Рыжов Ю.А., Никитченко Ю.А., Парамонов И.В. Численное исследование гиперзвукового обтекания острой кромки на основе модели Навье – Стокса – Фурье // Труды МАИ. 2012. № 55. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=30027>
24. Быков Л.В., Никитин П.В., Пашков О.А. Математическое моделирование процессов обтекания затупленного тела высокоскоростным потоком // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53445>
25. Никитченко Ю.А. Модели первого приближения для неравновесных течений многоатомных газов // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=52938>
26. Вьонг Ван Тьен, Горелов С.Л., Русаков С.В. Эффекты немонотонности аэродинамических характеристик пластины в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112844>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-9](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-9)