

УДК 531+517.977

Динамика балки с двумя коньками и системы неявных дифференциальных уравнений

Закалюкин И.В.

Аннотация

Исследовано качественное поведение неголономной механической системы, используемой в робототехнике, в окрестности вырождений уравнений связей. Создан метод исследования особенностей первых интегралов неголономной системы, сводящейся к системе двух неявных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными обобщенными координатами.

Ключевые слова

Неголономные связи, вырождение системы уравнений, особенности, зонтик Уитни, первые интегралы, системы неявных дифференциальных уравнений

1. Введение

Динамика неголономных систем представляет собой один из наиболее сложных и красивых разделов механики. В практике в основном применяются линейные по скоростям неголономные связи, моделирующие качение твердых тел, движение тела с острым краем (конька). В последнее время с развитием сложных робототехнических и транспортных систем возрос интерес к исследованию систем с нелинейными связями, а также с линейными связями более общего вида. Начиная с работ классиков XIX века и отечественных основоположников неголономной механики С.А.Чаплыгина, П.В.Воронца др. (см. например[5]), всегда предполагалось, что система неголономных связей имеет полный ранг. В этом случае уравнения динамики систем, идеальных по Лагранжу, могут быть записаны в разрешенном относительно старших производных виде. Только отдельные работы в последние десятилетия рассматривали другие случаи, когда уравнения динамики приводили к неявным уравнениям. Среди них хорошо известны только работы Дирака об особых точках уравнений Эйлера-Лагранжа, для которых матрица вторых производных Лагранжиана по обобщенным

скоростям вырождена [18].

Нас интересует качественное поведение неголономных механических систем, в том числе, систем с управлением, при условии, что уравнения связей (которые мы считаем линейными однородными по скоростям) задаются в некоторых точках вырожденной матрицей. В наших работах [14],[15], было доказано, что нормальная форма уравнений Лагранжа с неопределенными множителями в окрестности множества вырождения неголономных линейных связей задает систему с быстрыми и медленными переменными.

В настоящей работе рассмотрен пример динамики двух коньков на плоскости, соединенных балкой, в окрестности вырождения системы уравнений связей. Он моделирует динамику в различных задачах управления робото-техническими устройствами (см., например [13]).

Изучено качественное поведение неголономной системы "балка с двумя коньками" вблизи множества вырождения. Показано, что система уравнений для особых движений сводится к одномерной системе на особой поверхности с двумя "зонтиками Уитни". Исследована структурная устойчивость особых точек на такой поверхности.

Рассмотрено поведение фазовых траекторий характеристического поля на зонтике Уитни. Отметим, что важный для нас случай, возникающий, как в примере балки с двумя коньками, в литературе отсутствует. Этот случай выделяется тем, что поверхность Пуанкаре, представляющая собой зонтик Уитни, имеет вертикальную (то есть параллельную оси производной) линию самопересечения (которую, часто называют "ручкой" зонтика Уитни). Другими словами, особые точки проекции на конфигурационное пространство неизолированы, а образуют целые линии. Такой случай характерен для уравнений Лагранжа вблизи вырождения неголономных связей.

Далее обсуждаются некоторые многомерные аналоги классической теории неявных дифференциальных уравнений [1],[16], а именно, свойства типичных первых интегралов систем неявных уравнений и быстро-медленных динамических систем, получаемых при редукции уравнений неголономных систем с неразрешимыми относительно производных нелинейными связями. Доказана теорема о том, что особенности таких систем совпадают с типичными особенностями первых интегралов систем общего вида [7]. Также показано, что неявные системы дифференциальных уравнений, которые получаются из уравнений Лагранжа при вырожденной кинетической энергии или при вырождении линейных связей - не являются общими. Приведены примеры типичных особенностей первых интегралов для таких систем.

2. Качественное исследование движения балки с коньками с помощью интеграла энергии

Рассмотрим механическую систему, совершающую движение в плоскости Oxy , и состоящую из твердого стержня длиной $2l$ и массой M , к концам K_1 и K_2 которого шарнирно прикреплены два одинаковых конька, представляющие собой малые прямолинейные отрезки с центрами в точках A и B соответственно, масса каждого из которых равна m . Момент инерции стержня, вместе с двумя точечными массами m на концах, относительно центра масс C , находящегося в середине стержня, равен J . Момент инерции конька относительно его центра равен J_1 . Предположим, что движение конька подчиняется стандартному "неголономному" условию: скорость в центре конька направлена вдоль его оси. Составим уравнения Лагранжа с неопределенными множителями для этой системы при отсутствии действия на нее каких-либо активных сил.

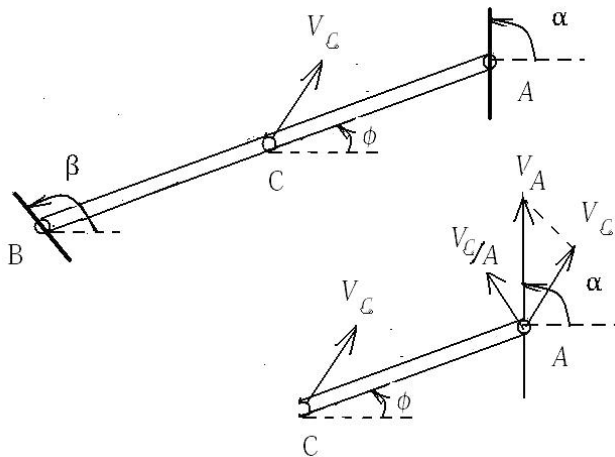


Рис 1. Балка с двумя коньками.

Введем обобщенные координаты: x, y - декартовы координаты центра стержня, φ - угол поворота оси стержня относительно неподвижной оси Ox , и углы α, β - поворотов осей коньков относительно той же оси Ox . Кинетическая энергия системы, как функция обобщенных координат и скоростей, в текущем положении системы имеет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_1(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2). \quad (1)$$

Уравнения неголономных связей получаются приравниванием нулю векторного произведения вектора скорости центра каждого конька и вектора его оси:

$$\begin{aligned} \dot{x}\sin\alpha - \dot{y}\cos\alpha - l\dot{\varphi}\cos(\alpha - \varphi) &= 0; \\ \dot{x}\sin\beta - \dot{y}\cos\beta + l\dot{\varphi}\cos(\beta - \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что эти уравнения становятся зависимыми, если: $\alpha = \beta = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \beta + \pi$, $\alpha = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$.

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями λ_1, λ_2 , отвечающими указанным связям принимают вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \lambda_1 \sin \alpha + \lambda_2 \sin \beta; \\ \ddot{y} &= \lambda_1 (-\cos \alpha) + \lambda_2 (-\cos \beta); \\ J\ddot{\varphi} &= -\lambda_1 l \cos(\alpha - \varphi) + \lambda_2 l \cos(\beta - \varphi); \\ \ddot{\alpha} &= 0; \\ \ddot{\beta} &= 0. \end{cases} \quad (3)$$

Исключая эти множители получаем систему дифференциальных уравнений, из которой, в частности следует, что $\dot{\alpha} = \text{const}_1$, $\dot{\beta} = \text{const}_2$. Эти уравнения движения на самом деле можно свести к более простому виду, используя уравнения связей и интеграл энергии. Из общей теории уравнений Лагранжа с множителями известно, что сумма работ всех реакций, включая реакции неголономных связей, равна 0. Таким образом, энергия системы (в данном случае только кинетическая) сохраняется. Кроме того, имеются два первых интеграла - угловые скорости коньков. С помощью этих интегралов интегрирование системы сводится к системе в трехмерном пространстве с координатами $\varphi, \dot{\varphi}, t$ следующим образом: Из уравнений связи имеем $\dot{x} = -l\dot{\varphi} \frac{\cos(\alpha + \beta - \varphi) + \cos \varphi \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$ $\dot{y} = -l\dot{\varphi} \frac{\sin(\alpha + \beta - \varphi) + \sin \varphi \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$.

Пусть $\dot{\alpha} = \omega_1$, $\dot{\beta} = \omega_2$, где ω_1, ω_2 - постоянные. Заметим, что кинетическая энергия системы имеет вид: $T = l^2 \frac{\cos^2(\varphi - \beta) + \cos^2(\varphi - \alpha) + s \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)} \dot{\varphi}^2 + e$, где $s = \frac{1}{2}(J - Ml^2)l^{-2}$, $e = \frac{1}{2}J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)$. По-прежнему полагаем $M + 2m = 1$. В самом деле, эту формулу легко получить, выражая \dot{x}, \dot{y} через $\dot{\varphi}$ и используя уравнения связей и основную формулу для T . Другое, геометрическое доказательство основано на кинематике плоского движения. Перпендикуляры к скоростям V_A, V_B пересекаются в мгновенном центре скоростей K .

$$\text{Углы } \theta = \beta - \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad \gamma = -\alpha + \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \text{УГОЛ } \Delta = \pi - \theta - \gamma = \pi - \alpha - \beta.$$

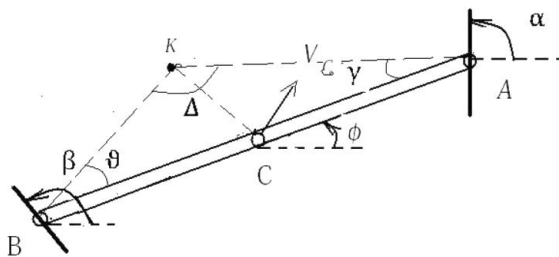


Рис 2. Скорости в плоском движении.

Медиана KC в треугольнике ABK равна по теореме синусов.

$$(KC)^2 = \frac{1}{4}(2(AK)^2 + 2(BK)^2 - AB^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin^2\theta}{\sin^2\Delta} + \frac{2\sin^2\gamma}{\sin^2\Delta} - 1\right)4l^2$$

Таким образом, скорость в центре C балки равна $V_C^2 = (\dot{\varphi})^2(KC)^2$, то есть

$$V_C^2 = \dot{\varphi}^2 l^2 \left(\frac{2\cos^2(\beta - \varphi) + 2\cos^2(\alpha - \varphi) - \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)} \right).$$

Итак, кинетическая энергия системы равна (учитывая $M + 2m = 1$) $T = \frac{1}{2}V_C^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_1(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) = \dot{\varphi}^2 l^2 \frac{\cos^2(\beta - \varphi) + \cos^2(\alpha - \varphi) + s\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)} + \frac{1}{2}J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)$, что и требовалось.

Заметим, что набор уравнений связей и известных интегралов задает в фазовом пространстве движение по некоторому (зависящему от времени) заданному расслоению пространства на кривые. В самом деле, множество допустимых скоростей в каждой точке одномерное (при условии $\omega_1 = \text{const}$, $\omega_2 = \text{const}$). Поэтому движение системы можно исследовать с помощью теории неявных дифференциальных уравнений методом поверхностей Пуанкаре (см. [8],[9]).

Итак, в пространстве с координатами $\varphi, \dot{\varphi} = p, t$ рассмотрим поверхность S заданную уравнением:

$$p^2[\cos^2(\beta - \varphi) + \cos^2(\alpha - \varphi) + s\sin^2(\alpha - \beta)] = (h - e)l^{-2}\sin^2(\alpha - \beta), \quad (4)$$

где $\alpha = \omega_1 t; \beta = \omega_2 t$, и h - постоянная уровня кинетической энергии. Заметим, что эта поверхность уровня энергии и интегралов не произвольная - она содержит точки вырождения.

Нас интересует часть поверхности S в окрестности точек особого множества I , отвечающих точкам вырождения связей, то есть точек, в которых $t = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$. Обозначим через $H = (h - e)l^{-2}$.

Утверждения. Само множество I представляет собой отрезок $|p| \leq l\sqrt{\frac{2H}{J+2ml^2}}$.

Росток S в окрестности I имеет две линии двойного само-пересечения: ось φ и отрезок I параллельный оси p . Поверхность S имеет две особенности, диффеоморфные зонтикам Уитни, у которых линия само-пересечения совпадает с осью p .

Замечания. Поверхность S в окрестности отрезка I представлена на рис. 3. Отдельные части этой поверхности показаны также на последующих рисунках.

Отметим, что особой является всякая поверхность уровня энергии $T = h$ в окрестности оси p , если предполагать, что при $t = 0$ наблюдается попадание на множество вырождения связей. Все эти поверхности образуют особое слоение трехмерного пространства. Полное же фазовое пространство, в которое входят значения углов α, β имеет размерность 5.

Доказательство утверждений. Положим $\varphi = \frac{\pi}{2} + \xi$, где ξ мало. Вблизи оси $\varphi = \frac{\pi}{2}, t = 0$ формулу (4) заменим ее приближенным выражением. $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \xi - \omega_2 t\right) = \sin^2(\xi - \omega_2 t) = (\xi - \omega_2 t)^2 + o(\xi - \omega_2 t)^4$; $\cos^2(\varphi - \alpha) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \xi - \omega_1 t\right) = (\xi - \omega_1 t)^2 + o(\xi - \omega_1 t)^4$, а также, положив $W = \omega_1 - \omega_2$, запишем $\sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2(Wt) = (Wt)^2 + o(Wt)^4$.

Получаем вблизи множества I асимптотическое уравнение: $p^2[(\xi - \omega_1 t)^2 + (\xi - \omega_2 t)^2 + s(Wt)^2] = H(Wt)^2 + o(Wt)^4$

Поскольку кинетическая энергия частей системы всегда неотрицательна, то $H \geq 0$ и $\cos^2(\varphi - \omega_1 t) + \cos^2(\varphi - \omega_2 t) + s \sin^2(Wt) \geq \frac{J+2ml^2}{2I^2} \sin^2(Wt) \geq 0$ (для непустого множества возможных движений). В частности, из соотношения (4), записанного в форме $p^2 = H \sin^2(Wt) [\cos^2(\varphi - \omega_1 t) + \cos^2(\varphi - \omega_2 t) + s \sin^2(Wt)]^{-1} + o(Wt^2)$, получаем $p^2 \leq \frac{2I^2 E \sin^2(Wt)}{(J+2ml^2) \sin^2(Wt) + o(Wt^4)} + o(Wt^2)$.

Отсюда получаем указанные ограничения на p . При $t = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ указанные значения достигаются.

Отбрасывая члены высших порядков, получаем приближенное выражение:

$$p^2 = H \frac{W^2 t^2}{2\xi^2 - 2\xi(\omega_1 + \omega_2)t + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + sW^2)t^2}. \quad (5)$$

Поделив все члены дроби на t^2 и обозначив $\frac{\xi}{t} = r, \omega_1 + \omega_2 = 2\mu, -\frac{(\omega_1\omega_2)}{2} + \frac{3}{4}\omega_1^2 + \frac{3}{4}\omega_2^2 + sW^2 = n^2$, получим: $p^2(r^2 - 2\mu r + \mu^2 + n^2) = E$, или $p^2[\rho^2 + n^2] = E$, при некоторых константах $\mu, n, E = HW^2$ и $\rho = r - \mu = \frac{2\varphi - \pi}{2t} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Последняя формула позволяет легко построить график поверхности S . При каждом фиксированном значении $p = p_0$ имеется не более двух значений $\rho_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{E}{p_0^2} - n^2}$. На поверхности, заданной уравнением (5), лежат точки двух прямых $p = p_0, \frac{\xi}{t} = \mu \pm \sqrt{\frac{E}{p_0^2} - n^2}$.

Таким образом, часть оси ξ - является линией пересечения двух гладких линейчатых поверхностей изоморфных двум пересекающимся плоскостям, однако, углы между прямыми образующими меняются. В точках $p_{max}: \rho_+ = \rho_-$ корни квадратных уравнений совпадают - линии сливаются. При $p \rightarrow 0, \rho_{\pm} \rightarrow \infty$, поэтому прямая $\frac{\xi}{t} = \rho_{\pm} + \mu$ стремится к оси ξ .

Величина $|pp| \rightarrow const$ при $t \rightarrow 0$. Это означает, что листы поверхности S на оси ξ пересекаются под ненулевым углом. Осталось показать, что при $p = \pm p_{max}$ на поверхности

S возникает особенность, называемая зонтиком Уитни.

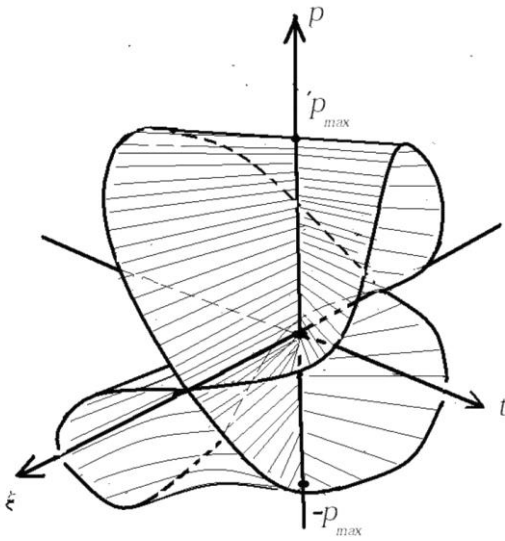


Рис. 3 Особая поверхность уровня энергии S .

Напомним, что зонтиком Уитни [2] называется поверхность заданная в некоторых координатах x, y, z уравнением $x^2z = y^2$. По-другому, зонтик определяется как образ отображения $\rho: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ $\rho: (u, v) \mapsto (x, y, z)$, где $x = u, y = uv, z = v^2$.

Покажем, что в точке $\pm p_{max}$, действительно поверхность S имеет зонтик, в силу структурной устойчивости этой особенности [2] достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. Уравнение $p^2((\xi - \mu t)^2 + n^2 t^2) = Et^2$ в точке $\xi = 0, t = 0, p_{max} = \sqrt{\frac{E}{n^2}}$ эквивалентно (относительно гладкой замены координат), уравнению зонтика Уитни.

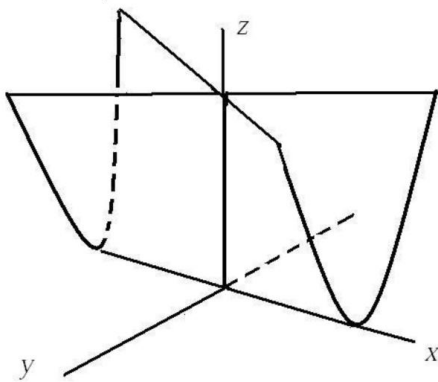


Рис. 4 Особая поверхность - зонтик Уитни.

Доказательство. Подставляя $p = p_{max} + y$, где y - мало, в это уравнение получим:

$(p_{max}^2 + 2p_{max}y + y^2)((\xi - \mu t)^2 + n^2 t^2) = Et^2$. Отсюда, учитывая формулу для p_{max} , получим, оставляя только члены наименьшей квази-однородной степени, поделенные на t^2 , в точности уравнение зонтика Уитни $p_{max}^2 \left(\frac{\xi - \mu t}{t}\right)^2 + 2p_{max} y n^2 = 0$.

Дописывание членов высших степеней, как известно (см., например [2]), не меняет

дифференцируемый тип поверхности.

Согласно теории неявных дифференциальных уравнений [2], на поверхности S возникает естественное поле направлений, как пересечение касательной плоскости к S и контактных распределений $d\xi - pdt = 0$. В точках $p = p_0$ оси p (при $\xi = 0, t = 0$) имеется две касательные плоскости к поверхности S , базисом в каждой из которых являются векторы: вертикальный $v_1 = \frac{d}{dp}$ и v_2 - направленный по соответствующему лучу $p = const$. Особым точкам поля направлений отвечают точки, где плоскость касается S . Условием этого является условие $p_0 = r = \frac{\xi}{t}$. Рассматриваемое уравнение всегда имеет при любых значениях параметров μ, E, n не менее двух решений. В самом деле, особые точки - это корни уравнения $p^2((p - \mu)^2 + n^2) = E$.

Всегда найдутся две точки p_+, p_- точки по разные нуля. Для доказательства достаточно построить графики функций $y = p^2$ и $y = E(p - \mu)^2 + n^2$. При достаточно большой величине E появляются еще два корня по разные стороны луча $\frac{\xi}{t} = \mu$. Характер этих особых точек определяется линейной частью поля направлений. Рассмотрим случай, когда корней два.

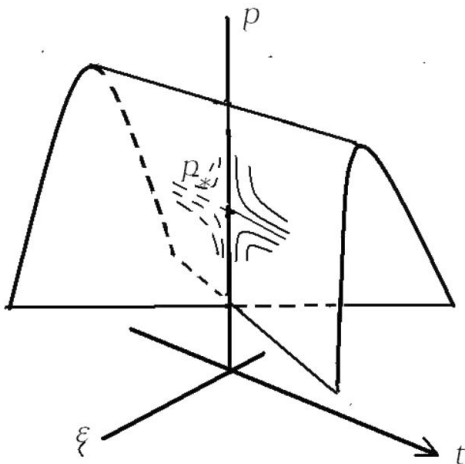


Рис. 5 Седловая точка на ручке зонтика.

Утверждение. В точках p_+, p_- в случае общего положения поле направлений на поверхности имеет - в одной особую точку типа "седло", а в другой - особую точку типа "узел", если μ лежит вне промежутка между корнями, и имеет два "седла", если μ разделяет корни.

Доказательство. Продифференцируем по времени уравнение $p^2((\xi - t\mu)^2 + n^2t^2) = Et^2$, получим уравнение в полных дифференциалах $-t^3Edp = p^3(\xi - \mu t)(pt - \xi)dt$.

Заметим, что в точках p_{\pm} последняя скобка обращается в нуль, причем ее производная

по p отлична от нуля. При этом первая скобка в этих точках, соответственно, имеет одинаковые или разные знаки. Итак, последнее уравнение задает одну гиперболическую особую точку при p_+ и другую узловую p_- в первом случае, или гиперболическую - во втором, на соответствующей гладкой части поверхности S в точках оси p , где она имеет само-пересечения.

Заметим также, что вертикальная ось p всегда состоит из отрезков интегральных линий. Движение вблизи этой линии качественно похоже на "удар" - скорости меняются много быстрее, чем координаты. Другими словами, время почти не меняется, но угловая скорость p меняется на конечную величину. Простейший тип поведения интегральной кривой на поверхности вблизи особой оси указан на рис.5: фазовая траектория почти вертикальна, затем, подходя к седлу она меняет направление и уходит от особого множества (не пересекая его). Возможны и другие, более оригинальные типы поведения (вблизи узлов). Заметим, что характер движения сильно неустойчив вблизи особой оси.

3. Классификация локальных особенностей первых интегралов неявных систем двух уравнений

В этом разделе рассматриваются типичные особенности первых интегралов систем неявных дифференциальных уравнений общего нелинейного вида. Такие особенности возникают и в уравнениях Лагранжа с неопределенными множителями для лагранжианов общего вида и для нелинейных неголономных связей. Мы рассматриваем системы, сводящиеся к неавтономным системам двух неявных уравнений первого порядка с двумя степенями свободы.

Примером подобной системы может служить, например, система уравнений, описывающая движение балки с двумя коньками на наклонной плоскости. Если, с учетом постоянства угловых скоростей коньков, понижать размерность системы, то получается система на трехмерной особой поверхности в пятимерном пространстве. Надо рассмотреть совместную поверхность уровня механической энергии (суммы кинетической энергии и потенциальной энергии силы тяжести, пропорциональной некоторой линейной координате x_C центра масс) и (неголономного) уравнения связи, задающему зависимость проекции \dot{x}_C скорости центра масс через угловую координату φ , и угловую скорость балки $\dot{\varphi}$, в пятимерном пространстве с координатами $\varphi, \dot{\varphi}, t, x_C, \dot{x}_C$.

На указанной трехмерной поверхности возникает векторное поле с особенностями там, где поверхность не имеет регулярной проекции на конфигурационное пространство (φ, t, x_C) .

Таким образом, мы приходим к задаче изучения особенностей систем неявных дифференциальных уравнений.

Мы начинаем с более обозримого с точки зрения теории особенностей общего нелинейного случая.

Еще недавно можно было сказать, что исследование нелинейных связей - задача далекая от практики. Имеется очень мало классических кинематических конструкций с такими связями [11]. Однако в современных робототехнических гибридных системах (в которых кинематика зависит от логического управляющего блока) набор примеров, представляющих практический интерес, неограниченно возрастает см. например, исследования по задаче программного движения робота [12]. Нелинейные неголономные связи встречаются в системах с автоматическим регулированием, в системах с обратной связью, различными блоками управления, реагирующими и меняющими кинематику системы в зависимости от текущих (угловых) скоростей и ускорений отдельных узлов. В этом плане, представляются перспективными качественные исследования особенностей таких связей и соответствующей динамики в отдельных классах технических систем (например систем АБС современных автомобилей).

Итак, в фазовом пространстве \mathbb{R}^{2n+1} с координатами $t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ (где через p_i традиционно в теории неявных дифференциальных уравнений обозначаются соответствующие обобщенные скорости) рассмотрим подмногообразие $C = \{(t, x, p): f_j(t, x, p) = 0, j = 1, \dots, k\}$ допустимых связями состояний системы.

В общем положении C представляет собой гладкое подмногообразие размерности $2n - k + 1$, причем для нелинейных связей общего вида это подмногообразие будет расположено общим образом по отношению к подпространствам $t = const, x = const$, вдоль которых происходит отображение проектирования фазового пространства на конфигурационное (см., например, [2]).

В точках C , которые мы будем называть регулярными, и в которых матрица частных производных $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$ имеет полный ранг, неопределенные множители λ определяются однозначно, точно также как и для линейных связей. В точках, где ранг этой матрицы падает, что соответствует особенности проекции C на конфигурационное пространство, неопределенные множители, также как и в линейном случае, образуют вектор, некоторые компоненты которого стремятся к бесконечности (имеют особенность типа "полюс" на особом множестве). Однако, в отличие от линейного случая точки, где ранг падает, не образуют линейчатого расслоения. Поэтому не возникает, как в линейном случае, аналога

"ударной динамики": скорости остаются непрерывными.

Однако, эти рассуждения верны только в предположении, что система и связи являются типичными. Конечно, уследить за этим в реальной технической системе не просто. Поэтому особый интерес представляют различные варианты общей теории, адаптированные к конкретным видам связей и т.д.

Общая теория особенностей таких систем, по-видимому, еще не построена. Имеются только подходы к некоторым наиболее простым классам систем. В частности, если, подобно примеру балки с двумя коньками, система имеет дополнительные интегралы, то поведение системы на совместном множестве уровня таких интегралов приводит к рассмотрению пространства R^{2n+1} меньшей размерности, и подмногообразия (в случае вполне интегрируемости), имеющего такую же размерность как и размерность $n + 1$ редуцированного конфигурационного пространства. Таким образом, задание поверхности S полностью определяет фазовые траектории редуцированной системы на поверхности. В зависимости от особенностей проекции этой поверхности на t, x пространство, первые интегралы I , которые может иметь поле и которые являются однозначными функциями на поверхности, превращаются, вообще говоря, в многозначные функции от x, t .

Основной результат, полученный в этом разделе, как раз и состоит в классификации возможных особенностей этих многозначных функций в первом неизученном ранее случае, когда размерность x равна 2, то есть в пятимерном расширенном фазовом пространстве. Все топологически различные типы особенностей представлены на рисунках. Основной метод - применение производящих функций Лежандровых подмногообразий по В.И. Арнольду [3],[8].

Конечно, в системах, рассмотренных в разделе 2, особенности будут другими. Линейность по скоростям неголономных связей приводит к особенностям неявных дифференциальных уравнений, для решений которых использовались операции сигма-процессов.

Зададим подмногообразие S системой уравнений $S = \{(t, x, p): F = 0\}$, где вектор функция $F: R^{2n+1} \rightarrow R^n$ является C^∞ -гладкой и ранг ее дифференциала равен n . Тогда поле направлений $\chi = \dot{t}: \dot{x}_1: \dots: \dot{x}_n: \dot{p}_1: \dots: \dot{p}_n$ является решением системы линейных уравнений

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} p_j \right) \dot{t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \dot{p}_j = 0, \quad \dot{x}_i = p_i \dot{t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

которая задает пересечение распределения $dx - p dt = 0$ с пространством TS .

Регулярные и достаточно гладкие первые интегралы поля χ существуют во многих случаях. Таким образом, задача о приведении к нормальной форме пары, состоящей из ростка поверхности S в особой точке проекции ρ , имеющей коранг 1, и C^∞ или C^k -гладкого

первого интеграла I поля χ , представляется весьма естественной.

В классическом случае $n = 1$, пара S, I однозначно задает поле направлений χ , и такая задача эквивалентна нахождению нормальных форм поднятого поля χ

Однако, в больших размерностях, даже в простейших случаях, когда проекция ρ имеет особенность складки, поле χ имеет непрерывные инварианты. Тем не менее, классификация пар S, I представляет собой более простую задачу, доставляющую значительное число простых классов эквивалентности.

Замечание. Отметим **важнейшее свойство** дополнительного первого интеграла I поля χ : в точках кривизны Σ_1 производная I в направлении ядра проекции ρ обращается в нуль, поскольку это ядро как раз совпадает с поднятым полем.

Следующая теорема дает список особенностей общего положения для пар S, I в случае трехмерной базы \mathbb{R}^3 , то есть в случае системы двух неявных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x_1(t)$, и $x_2(t)$.

Теорема 1. *Рассмотрим систему двух неявных дифференциальных уравнений в \mathbb{R}^5 . Если проекция ρ имеет критические точки коранга не больше 1, то в случае общего положения всякий росток проекции ρ для пары S, I , где I - дополнительный регулярный первый интеграл поля χ , эквивалентен одной из следующих нормальных форм:*

1. Проекция ρ имеет A_1 (особенность складки), и пара S, I является сильно эквивалентной паре ростков в нуле проекции ρ заданной формулой $F_2 = t - y^2 = 0$, причем функция I эквивалентна одной из следующих нормальных форм $I_{1,0} = x_1 + y^3$, или $I_{1,0}^* = x_1 + y^3 x_2$, или $I_{1,1} = x_1 + y^3(t \pm x_2^2 + x_1)$.

2. Проекция ρ имеет особенность сборки A_2 , а пара S, I сильно эквивалентна паре ростков в нуле проекции ρ заданной формулой $F_3 = y^3 + x_1 y - t = 0$ и интеграла I , который равен $I_{2,0} = x_2 + t y - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{2} x_1 y^2$, либо паре, которая b - эквивалентна паре с той же проекцией и интегралом $I_{2,1} = \frac{1}{5} y^4 + \frac{1}{4} x_2 y^3 + \frac{1}{3} x_1 y^2 - \frac{1}{2} t y^2 \pm x_2 \pm x_1$, либо $I_{2,0}^* = \pm x_1 \pm x_2 + t y - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{2} x_1 y^2$.

3. Проекция ρ имеет особенность ласточкина хвоста A_3 , а пара S, I является b -эквивалентной паре ростков в нуле этой проекции ρ , заданной формулой $F_4 = -t + y^4 + x_2 y^2 + x_1 y = 0$ и интегралом I , имеющим вид $I_{3,0} = \frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{3} x_2 y^3 + \frac{1}{2} x_1 y^2 - t y + x_2$.

Геометрическое описание этих особенностей следующее.

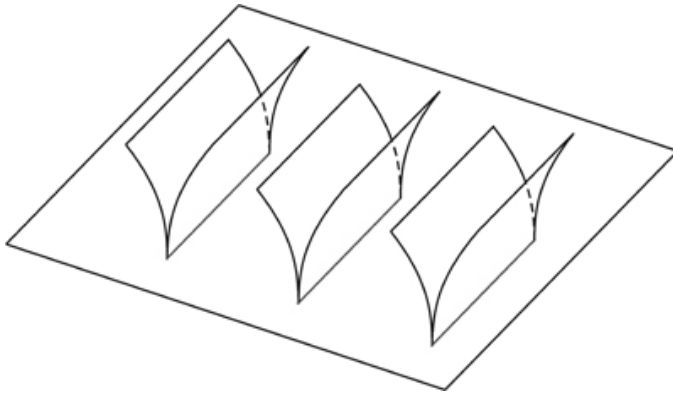


Рис. 8. Полукубические поверхности уровня интеграла $I_{1,0}$ на складке (A_1) .

1. На рисунке 8 изображено множество поверхностей уровня первого интеграла класса $I_{1,0}$ для особенности $F_2 = t - y^2 = 0$ проекция - складка (A_1) . Все поверхности уровня изоморфны полукубическим цилиндрам.

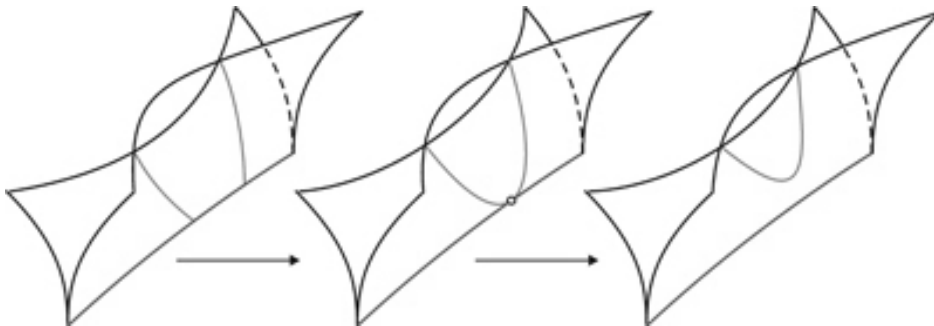


Рис. 9. Бифуркации поверхности, со сложенными зонтиками, уровня интеграла $I_{1,1(-)}$ на складке (A_1) при изменении значения интеграла.

2. На рисунке 9 изображены три поверхности уровня интеграла $I_{1,1(-)}: x_1 + y^3(t - x_2^2 + x_1)$ на складке F_2 отвечающие значениям C интеграла при $C < 0, C = 0$ и $C > 0$.

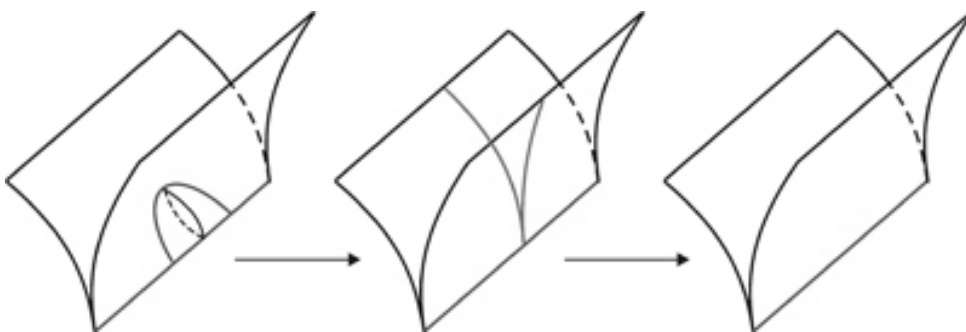


Рис. 10. Полукубические, со сложенными зонтиками поверхности уровня интеграла $I_{1,1+}$ на складке (A_1) .

3. Рисунок 10 аналогичен рисунку 11, только рассмотрен случай интеграла $I_{1,1}: x_1 + y^3(t + x_2^2 + x_1)$ на складке.

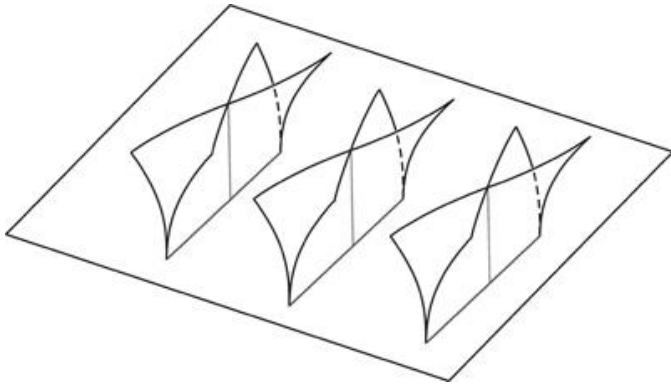


Рис.11. Полукубические поверхности уровня интеграла $I_{1,0}^*$ на складке (A_1) .

4. В случае $I_{1,0}^*$, изображенном на рисунке 11, поверхности уровня многозначного интеграла представляют собой, так называемые сложенные зонтики, имеющие острый край - ребро возврата (см. [3]).

Соответственно, их подмножества особых точек заметают неособую поверхность в трехмерном пространстве.

Случаи первых интегралов при особенности $A_2: F_3$ сборки изображены на следующих рисунках.

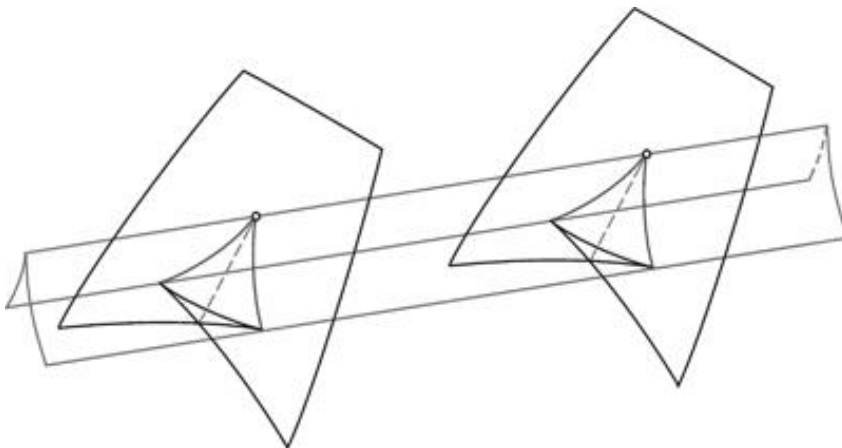


Рис. 12. Ласточкины хвосты - поверхности уровня интеграла $I_{1,0}$ на сборке (A_1) .

5. На рисунке 12 изображен случай $I_{1,0}$, при котором все поверхности уровня диффеоморфны между собой и диффеоморфны ласточкину хвосту.

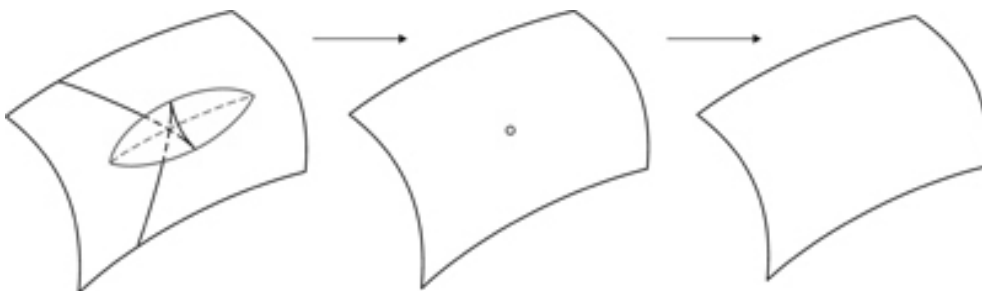


Рис. 13. Поверхности уровня интеграла $I_{1,1+}$ на сборке (A_2) .

6. В случае $I_{2,1+}$, изображенном на рисунке 13, поверхности уровня многозначного интеграла представляют собой поверхности, которые могут иметь либо два ласточкина хвоста, либо быть гладкими.

Соответственно, их подмножества особых точек заметают поверхность в трехмерном пространстве, диффеоморфную прообразу полукубического цилиндра, при отображении "складка".

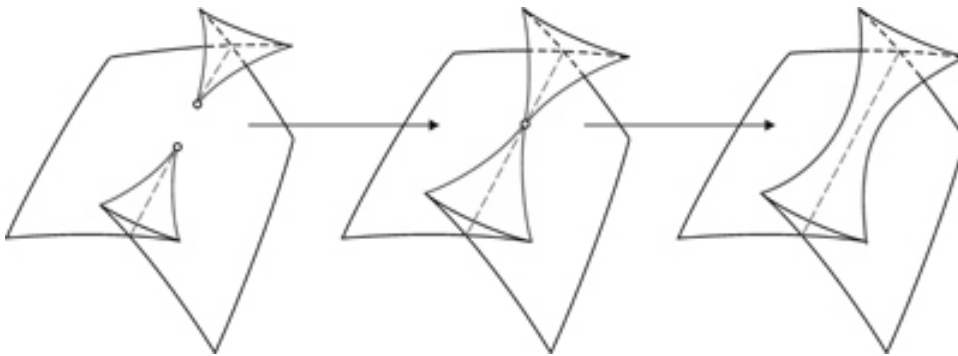


Рис. 14. Поверхности уровня интеграла $I_{1,1-}$ на сборке (A_2) .

7. В случае $I_{2,1-}$, изображенном на рисунке 14, поверхности уровня многозначного интеграла также представляют собой поверхности, на которых появляется или исчезает два ласточкина хвоста. Только линия точек возврата не является компактной, в отличие от предыдущего случая.

Соответственно, их подмножества особых точек заметают поверхность в трехмерном пространстве, также диффеоморфную прообразу полукубического цилиндра при отображении складка, однако знаки компонент отображения отличаются от предыдущего случая.

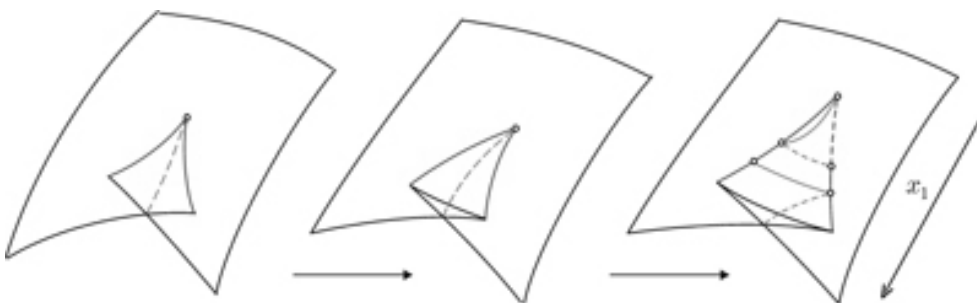


Рис. 15. Специальные поверхности уровня интеграла $I_{1,1+}$ на сборке (A_2) .

8. В случае $I_{2,0}^*$, изображенном на рисунке 15, поверхности уровня многозначного интеграла представляют собой поверхности, которые либо диффеоморфны ласточкину хвосту, либо поверхности (которая ранее не встречалась), имеющую два ласточкина хвоста и две точки самопересечения ребра возврата.

Соответственно, их подмножества особых точек заметают поверхность в трехмерном

пространстве, диффеоморфную полукубическому цилиндру.

9. В последнем возможном случае общего положения особенность проекции имеет тип A_3 - ласточкин хвост. Если поверхности уровня первого интеграла имеют тип $I_{3,0}$, то, как мы доказали выше, они слабо эквивалентны поверхностям, представленном на рисунке 16. Такая бифуркация встречалась и ранее в теории волновых фронтов и называлась бифуркацией "бабочка."

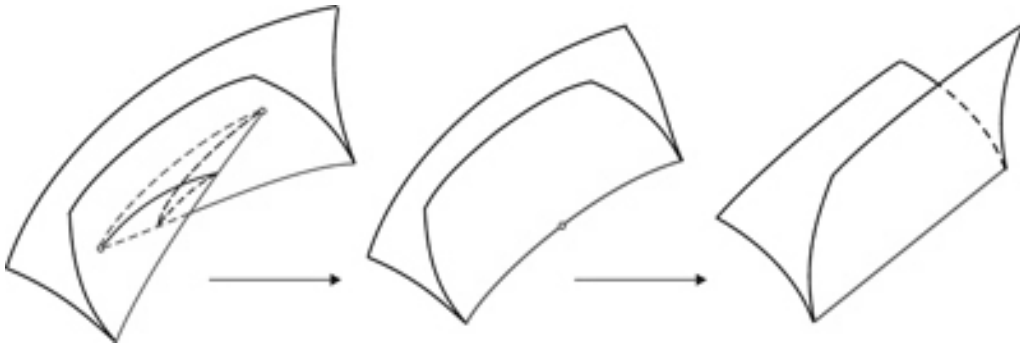


Рис. 16. Поверхности уровня интеграла $I_{3,0}$ "бабочка" на ласточкином хвосте (A_3).

Замечание. Интересно отметить, что все построенные поверхности и их бифуркации (по отношению к слабой эквивалентности) не имеют непрерывных инвариантов, то есть являются простыми в терминологии В.И.Арнольда [3]. В старших размерностях, а также в линейном случае неизолированных особенностей непрерывные инварианты появляются. Классификация в этих случаях гораздо более сложная.

Доказательство теоремы. По теореме трансверсальности для проектирования поверхности $S^3 \subset \mathbb{R}^5$ на \mathbb{R}^3 в общем положении возможны только особенности коранга 1. В самом деле первая устойчивая особенность коранга 2, называемая "платок", встречается при отображениях четырехмерных многообразий [2]. Типичные особенности отображений трехмерного пространства в трехмерное - это складки, наблюдаемые на поверхностях, сборки на гладких кривых и ласточкины хвосты в отдельных точках.

Итак, пусть базовая точка $0 \in S$ находится в начале координат, проекция ρ имеет особенность типа A_m , при $m = 1, 2$ или 3 . То есть отображение проектирования имеет вид $\rho: (y, x) \mapsto (t(y, x), x)$, $t = y^{m+1} + \sum_{i=1}^{m-1} x_i y^i$, $m \leq 3$ в некоторых локальных координатах на S и на E . Пусть $F_{m+1} = y^{m+1} + \sum_{i=1}^{m-1} x_i y^i - t$, $1 \leq m \leq 3$. Рассмотрим пространство $E_1 = \mathbb{R} \times B = (y, t, x)$. Проекция подмногообразия $S_1 \subset E_1$, являющегося множеством нулей F_{m+1} , на базу B эквивалентна проекции ρ . Интеграл $I(y, x)$ поднятого поля направлений является функцией на S . Продолжим I до функции E_1 . Итак, будем считать, что I - функция от y, t, x , и что сумма I с функцией $h(y, t, x)F$ из главного идеала, порожденного F_{m+1} , задает тот же первый интеграл на S , что и I .

Теорема 2. *Всякий типичный регулярный первый интеграл I поля χ образует пару S, I слабо эквивалентную паре S, I_r , образованной тем же ростком S типа A_m и стандартным интегралом $I_{m,r}$ для некоторого $r = 0, \dots, n + 2 - m$, заданного формулой $I_{m,r} = \int P_r(y, x) F_{m+1} dy$, где $P_r = y^r + \sum_{j=0}^{r-1} x_{m+j} y^j$.*

Функции $I_{m,r}$ известны как производящие семейства устойчивых лагранжевых подмногообразий с особенностями, описанных в работах [7]. В этих работах и приведено доказательство этой теоремы, равносильное доказательству лагранжевой устойчивости этих подмногообразий.

Из теоремы 2 следует, что для ростка с особенностью типа A_m проекции ρ пары общего положения S, I существует диффеоморфизм пространства E_1 вида $\Theta: (y, x) \mapsto Y(x, y), X(x)$, (здесь мы обозначаем t через x_0 и считаем, что $x \in \mathbb{R}^3$), который сохраняет подмногообразие $S_1 \subset E_1$, заданное уравнением $F_{m+1} = 0$ и приводит функцию I к нормальной форме $I_{m,r}(y, x) + a(x)$ с некоторой регулярной функцией a . Положим $\hat{I} = I_{m,r} + l$, где $l, c \in \mathbb{R}$ и $l = a(x) - c$. Функция \hat{I} определена на расширенном расслоении $E_1 = \{y, x, l\}$.

График W первого интеграла I в расширенной базе $B_1 = B \times \mathbb{R} = \{x, l\}$ задан уравнениями $\hat{I} = 0, F_{m+1} = 0$, из которых вытекают условия Лежандра $\hat{I} = 0, \frac{\partial}{\partial y} \hat{I} = 0$, поскольку $\frac{\partial}{\partial y} \hat{I} = F_{m+1} h$, для некоторого гладкого множителя h .

Гиперповерхность $I = c$ уровня в W задается дополнительным уравнением $c = a(x) - l = const$. Следовательно, действие b -эквивалентностей на пары F_{m+1}, \hat{I} совпадает с действием диффеоморфизмов пространства B_1 , сохраняющих разбиение графика W , на поверхности уровня функции $c(x, l) = a(x) - l$. Известно, что алгебра Ли группы диффеоморфизмов, сохраняющих устойчивый график W , порождена логарифмическими векторными полями, касающимися этого графика [4].

Для $r = 0$ график совпадает со стандартным волновым фронтом особенности типа A_{m+1} : $I_{m,0} = \frac{1}{m+2} y^{m+2} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} x_{i-1} y^i + l$. Его логарифмические векторные поля хорошо известны, и их действие на регулярные функции общего положения c дают следующие нормальные формы [3]: $c = x_m$, если $m < 3$, и $\frac{\partial c}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого $j: m \leq j \leq n$, и $c = x_{m-1} + \sum_{i=m}^n \pm x_i^2$, если c имеет Морсовскую критическую точку при сужении на страт особенности A_{m+1} , заданный уравнениями $l = x_0 = \dots = x_{m-1} = 0$.

В первом случае гиперповерхности разных уровней интеграла диффеоморфны между

собой, и эквивалентность в этом случае является сильной.

При $r = 1$ имеется другая нормальная форма пары $F_{m+1}, I_{m,1}$, а именно: $\hat{I} = y^{m+3} + x_m y^{m+2} + x_{m-1} y^{m+1} \dots + x_0 y^2 + l$, и $F = \frac{1}{x} \frac{\partial \hat{I}}{\partial y}$.

Аналогично предыдущему случаю, особенности общего положения регулярных функций с точностью до действия логарифмических полей следующие: либо $c = x_{m+1}$, если ограничение функции c на страт старшей особенности типа A_{m+2} регулярно, либо $c = x_m \pm x_{m-1} + \sum_{i=m+1}^3 x_i^2$ в невырожденной критической точке этого ограничения.

Начиная с $m = 3, r = 2$ возникают непростые классы орбит b -эквивалентности, однако этот случай не встречается из-за его высокой коразмерности.

Когда проекция ρ имеет простейшую особенность A_1 (складку), регулярные интегралы общего положения задают сильно устойчивые пары. [6]. Теорема доказана.

Графики поверхностей уровня первых интегралов I , заданных полиномиальными формулами из теоремы 1, можно построить на основе стандартных волновых фронтов особенностей A_3, A_4 , и сложенного зонтика Уитни с помощью отображений замены параметров.

Теорема 1 доказана для поверхности S общего положения. Однако априори не ясно, насколько общей может быть эта поверхность для механических систем с неголономными связями или даже для самих систем двух неявных дифференциальных уравнений первого порядка. Этому вопросу и посвящен настоящий раздел.

Невырожденность Пфаффа распределения Δ накладывает некоторые ограничения на возможные особенности поднятого поля χ .

Однако, если мы интересуемся возможными особенностями не полного набора первых интегралов для поля направлений, а только одним первым интегралом, то, как доказано в работе [10], не возникает никаких ограничений. Верна следующая

Теорема 3. Пусть росток гладкого отображения $\rho: S \rightarrow B$ пространств одинаковой размерности $n > 2$ имеет коранг 1 и множество критических точек - гладкое. Пусть χ^* - произвольное гладкое поле направлений на S , которое в критических точках ρ совпадает с направлением ядер дифференциала проекции ρ_* . Пусть функция g - является первым интегралом поля χ^* . Тогда существует вложение i многообразия S в E такое, что $\rho = \pi \circ i$, и функция $g \circ i^{-1}$ является первым интегралом χ .

Таким образом, малым возмущением произвольной системы двух неявных дифференциальных уравнений и возмущением некоторого первого интеграла системы можно добиться чтобы его поверхности уровня имели только особенности, перечисленные в

теореме 1.

Покажем, что аналог теоремы 3 справедлив для неявной системы в \mathbb{R}^5 , полученной для неголономной системы с одной нелинейной связью общего положения и фиксированной неособой 4-мерной поверхностью уровня интеграла энергии системы.

Теорема 4. Пусть росток гладкого отображения $\rho: S \rightarrow B$ трехмерных пространств размерности имеет коранг 1 и множество критических точек - гладкое. Пусть χ^* - произвольное гладкое поле направлений на S , которое в критических точках ρ совпадает с направлением ядер дифференциала проекции ρ_* . Пусть функция g - является первым интегралом поля χ^* . Тогда существует вложение i многообразия S в E^5 такое, что $\rho = \pi \circ i$, и существует функция \tilde{g} сколь угодно близкая к g и такая, что $\tilde{g} \circ i^{-1}$ является первым интегралом χ , причем одна из компонент P_i отображения i является заданной регулярной функцией на S .

Таким образом, малым возмущением только одного нелинейного уравнения связей, включающего обобщенные скорости \dot{x}_1, \dot{x}_2 и сохранением другого уравнения, например, явно выражающего одну из обобщенных скоростей через остальные переменные, или уравнения поверхности уровня механической энергии можно добиться чтобы всякий дополнительный первый интеграл общего положения имел поверхности уровня только с особенностями, перечисленными в теореме 1.

Доказательство теоремы 4. Пользуясь обозначениями раздела 5, отдельно разберем трансверсальный и нетрансверсальный случаи.

1. В локальных координатах $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$ на S для трансверсального случая критическое множество задано уравнением $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ и направление ядра суть $\frac{\partial}{\partial y}$. Функция I является первым интегралом некоторого векторного поля χ^* , удовлетворяющего условиям теоремы, если $\frac{\partial I}{\partial y} = a(x, y) \frac{\partial T}{\partial y}$ для некоторого гладкого множителя $a(x, y)$.

Вложение $i: S \rightarrow E$, удовлетворяющее условию $\rho = \pi \circ i$, задается компонентами $p_j = P_j(x, y)$, $j = 1, 2$. Функция I является первым интегралом поля направлений χ , порожденного вложением i , если и только если $\frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial I}{\partial x_j} P_j \dot{t} = 0$, где $\dot{t}: \dot{y} = \frac{\partial T}{\partial y} : \left(1 - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial T}{\partial x_j} P_j\right)$. Чтобы найти вложение с требуемыми свойствами нужно найти функции P_1, P_2 , удовлетворяющие системе уравнений $\frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial I}{\partial x_j} P_j \dot{t} = 0$ и неравенству $\frac{\partial P_j}{\partial y} \neq 0$ по крайней мере для одного значения j . Учитывая предыдущие соотношения,

запишем уравнение в следующем эквивалентном виде: $a_l(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} \left(1 - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial T}{\partial x_j} P_j\right) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial I}{\partial x_j} P_j \frac{\partial T}{\partial y} = 0$, сокращая общий множитель $\frac{\partial T}{\partial y}$ и группируя члены, содержащие одинаковые P_j , получим следующее линейное уравнение для P_j : $\sum_{j=1}^2 c_j P_j = -a$, где коэффициенты задаются выражениями $c_j = \frac{\partial I}{\partial x_j} - a \frac{\partial T}{\partial x_j}$. Поскольку функция I регулярная, то хотя бы один из коэффициентов c_j отличен от нуля. Теперь искомое вложение можно получить, выбирая произвольно некоторую из функций P_j , так чтобы только выполнялось неравенство $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$, и, затем, решая уравнение, найти оставшуюся компоненту $P_s, s \neq j$. Если же функцию $a(x, y)$ заменить на сколь угодно близкую, то можно добиться, чтобы оба коэффициента c_j , были ненулевыми. В этом случае любую из компонент P можно предполагать произвольной, наперед заданной функцией.

2. Рассмотрим теперь нетрансверсальный случай, пользуясь локальными координатами $t, \bar{x} = x_1, y$ на S . Как и выше, если функция I является первым интегралом поля χ_* , то $\frac{\partial I}{\partial y} = a(t, \bar{x}, y) \frac{\partial X}{\partial y}$. Функция I является первым интегралом поля χ , заданного вложением i , если и только если $\frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} + \left(\frac{\partial I}{\partial x_1} P_1 + \frac{\partial I}{\partial t}\right) \dot{t} = 0$ для $\dot{t}: \dot{y} = \frac{\partial I}{\partial y}: G$. Итак, чтобы найти i , достаточно решить уравнение $a_l G + \frac{\partial I_l}{\partial x_1} P_1 + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$, или, что эквивалентно,

$$P_1 \left(\frac{\partial I}{\partial x_1} - a \frac{\partial X}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial I}{\partial t} - a \frac{\partial X}{\partial t} + a_2 P_2 = 0.$$

Полагая, что базовая точка находится в начале координат E , получаем, что все значения $P_j(0)$ нулевые и функция X имеет в начале координат нулевой дифференциал. Следовательно, компонента $c_1 = \frac{\partial I}{\partial x_1} - a \frac{\partial X}{\partial x_1}$ отлична от нуля. В действительности, условие $\frac{\partial I}{\partial t} \Big|_0 = 0$ является необходимым для существования решения. Поэтому из невырожденности первого интеграла следует, что его производная по x_1 ненулевая. Выбирая P_2 так, чтобы $\frac{\partial P_2}{\partial y} \neq 0$, и решая уравнение относительно функции P_1 , получим искомое вложение.

Как и выше, заменяя функцию $a(t, x_1, y)$ на сколь угодно близкую, можно получить требуемое вложение при произвольном выборе P_2 . Теорема доказана.

Как видно из рисунков 8-16, а также из основного свойства поднятого векторного поля χ , типичная фазовая траектория при пересечении кривинанты проектируется в полу-кубическую параболу (точку возврата). Множества точек возврата отдельных траекторий, которые замечают поверхности уровня интегралов, как видно из рисунков,

образуют особые хорошо заметные страты (особые подмножества). В физическом пространстве-времени наличие точки возврата фазовой траектории означает остановку системы. На одной из ветвей полукубической параболы время должно идти вспять (проекция типичной полукубической параболы на ось времени общего положения имеет параметризацию, начинающуюся с квадратичных членов, как видно, например из решения модельного уравнения трансверсального случая для складки $\dot{x}^2 = t$ в \mathbb{R}^3 . Решения этого уравнения имеют вид $x = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + const$ и определены только при $t \geq 0$.

Как известно, в подобном случае для быстро-медленных систем происходит в типичном случае срыв и быстрое перемещение на другую ветвь медленной поверхности.

Таким образом, физический смысл рисунков 10-18 типичных особенностей поверхностей уровня дополнительных первых интегралов нелинейных вырождений неголономных связей состоит в следующем: в такой механической системе может реализовываться не вся поверхность, а только ее часть, ограниченная особой линией точек возврата. При изменении значения первого интеграла может возникать (или, соответственно, исчезать) область возможного движения. Для быстро-медленных систем и систем, сводящихся к ним, такие части поверхностей показывают возможные особенности областей движения до срыва на другую ветвь медленного движения.

Системы уравнений Лагранжа для обычных невырожденных голономных или неголономных систем, для которых имеется интеграл энергии $H = T(q, \dot{q}) + \Pi(q)$, тоже, конечно, можно исследовать как систему дифференциальных уравнений на гипер-поверхности уровня энергии. Эта поверхность имеет особенности при проекции на конфигурационное пространство q в точках границы области возможного движения, то есть при обращении в нуль кинетической энергии, то есть при обращении в нуль всех скоростей \dot{q} независимых координат. Интересно, что эти особенности совершенно не типичны, они имеют бесконечный порядок вырождения по сравнению с особенностями проектирования произвольной поверхности. Во-первых - это особенности всегда представляют собой обобщенные складки (Морсовские) так как кинетическая энергия - невырожденная квадратичная форма скоростей. Во-вторых, как уже было сказано, они отвечают нулевым скоростям. И, в-третьих, что самое важное, Пфаффово распределение Δ в особых точках обязательно имеет не менее, чем 2-мерное пересечение с касательной плоскостью с поверхностью S . Такое условие называют условием Клеро, так как оно выполняется для известного уравнения Клеро и ряда его обобщений. Последнее вытекает из того, что дифференциал как кинетической, так и полной энергии обращается в нуль на нулевых

обобщенных скоростях. Таким образом, для типичных траекторий механических систем поднятое поле не совпадает с ядром проекции, проекция поля на расширенное фазовое пространство не обращается в нуль и решения продолжаются по t неограниченно.

4. Системы с двумерным конфигурационным пространством и линейными связями

Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+1} = \{(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)\}$ задана система уравнений Лагранжа с неопределенными множителями, отвечающими линейным неголономным связям. Пусть число этих связей равно $n - 1$. Тогда в случае общего положения, на подмногообразии Σ_1 коразмерности 2 в конфигурационном пространстве связи могут вырождаться. Пусть у системы имеется интеграл энергии и еще $n - 2$ дополнительных первых интеграла, также находящиеся в общем положении. Предположим, что с помощью редукции конфигурационного пространства систему можно привести к системе на четырех мерной N поверхности в пятимерном пространстве $\mathbb{R}^5 = \{(t, x_1, x_2, p_1, p_2)\}$, имеющей интеграл энергии. Пример такой редукции описан ниже. Для такой системы множество Σ_1 представляет в общем случае кривую. Пусть $S = N \cap \{h = \text{const}\}$ - трехмерное пересечение N с поверхностью уровня энергии.

Утверждение. Над общей точкой из Σ_1 имеется гладкое одномерное множество диффеоморфное эллипсу, являющееся пересечением S и слоя расслоения $\pi: (t, x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto (t, x_1, x_2)$.

Доказательство вытекает из того факта, что механическая энергия является положительно определенной квадратичной формой скоростей, а многообразие N - линейчатое.

Таким образом, отображение ρ на S не собственное. Прообраз $\Sigma = \pi^{-1}(\Sigma_1)$ представляет собой гладкую поверхность, проектирующуюся в кривую. На этой поверхности имеются линии, задающие расслоение Σ на овалы, в которых поднятое поле имеет особые точки. Эти точки не изолированные. К такому полю применима теория нормальных форм работ [8],[9]. В частности, трансверсальная такой линии нормальная форма векторного поля - седло с одним резонансом, отвечающей нулевой сумме собственных значений.

Начало классификации особенностей дополнительных первых интегралов в этом случае определяется простейшей нормальной формой отображения ρ . Поскольку это отображение эквивалентно отображению сжатия овала в точку, и имеет ранг 2, то верно следующее

Утверждение. В окрестности общей точки $t \in \Sigma$ отображение ρ многообразия S подходящими заменами координат в образе и прообразе можно привести к виду $(t, x_1, p) \mapsto (t, x_1, x_2)$, где $x_2 = tg(t, x_1, p) + x_1p$ и $g(t, x_1, p)$ - некоторая регулярная гладкая функция, отличная от нуля в начале координат.

Отсюда вытекает, что в окрестности общей точки кривой Σ_1 типичные первые интегралы либо регулярные поверхности, трансверсальные этой кривой, либо приводятся заменой класса гладкости C^2 к виду $f = x_1t$. Поверхности уровня такого интеграла являются цилиндрами, с образующей, параллельной оси x_2 , и направляющими гиперболами $x_1t = const$.

Такая особенность не содержится в списке теоремы 1, таким образом, даже простейшая особенность в системах с линейными связями, отличается от особенностей с типичными нелинейными связями.

В качестве примера такой системы, рассмотрим движение балки с двумя коньками из раздела 1.6 на наклонной плоскости. Пусть ось x направлена в сторону скатывания, а ось y горизонтальна. Подобно тому как в разделе 2 динамика балки свелась к одному неявному уравнению в \mathbb{R}^3 , динамика балки на наклонной плоскости сводится к системе двух неявных уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^5 = \{(x, \varphi, t, \dot{x}, \dot{\varphi})\}$.

Для этого, используя формулы для кинетической энергии T из раздела 2, запишем интеграл энергии в виде $h = T + \Pi = K \frac{\cos^2(\varphi - \beta) + \cos^2(\varphi - \alpha) + S \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)} \dot{\varphi}^2 + e - k_*x$, где $k_* = g \sin \mu$, угол μ - это угол, образованный наклонной плоскостью с горизонтом, g - ускорение свободного падения. Компонента \dot{x} скорости центра масс определяется как $\dot{x} = \cos \varphi \dot{\varphi} |KC|$

Именно эти два уравнения и определяют в \mathbb{R}^5 трехмерную поверхность S , на которой Пфаффово распределение высекает поднятое поле χ . Непосредственным вычислением проверяется следующее

Утверждение. Особыми значениями проекции $\rho: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ являются точки $t = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ причем, прообраз каждой не изолирован.

В окрестности каждой из таких точек поведение системы похоже на поведение конька на горизонтальной плоскости, поскольку вблизи особых значений координата x меняется существенно медленнее, чем быстрая переменная $\dot{\varphi}$. В окрестности типичной точки особого множества интегралы поднятого поля такие же как указано в предыдущем утверждении, что согласуется с результатами раздела 2.

5. Заключение

Изучено качественное поведение неавтономной системы "балка с двумя коньками" вблизи множества вырождения. Показано, что система уравнений для особых движений сводится к одномерной системе на особой поверхности с двумя "зонтиками Уитни." Исследована устойчивость особых точек на такой поверхности.

Исследован новый, важный для приложений, возникающий, в примере балки с двумя коньками, случай неявного дифференциального уравнения. Этот случай выделяется тем, что поверхность Пуанкаре, представляющая собой зонтик Уитни, имеет вертикальную (то есть параллельную оси производной) линию самопересечения. Другими словами, особые точки проекции на конфигурационное пространство неизолированы, а образуют целые линии.

Исследуемые в первых разделах уравнения на самом деле являются частным случаем системы дифференциальных уравнений неразрешенных относительно старших производных. Поэтому далее мы рассматриваем классификацию и геометрическое описание всех типичных локальных особенностей первых интегралов систем, сводящихся к, вообще говоря, неавтономным системам двух неявных уравнений первого порядка относительно двух обобщенных координат. Показано, что неявные системы дифференциальных уравнений которые получаются из уравнений Лагранжа при вырожденной кинетической энергии или как в 1 главе, при вырождении линейных связей - не являются общими.

Наши результаты будут полезны в робототехнике и механике управляемых систем.

Библиографический список

[1] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 2000.

[3] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.

[4] V.I.Arnold, D.V.Anosov, Dynamical Systems 1, Springer-Verlag, New-York, 1985.

[5] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И., Математические аспекты классической и небесной механики, Динамические системы -3, Итоги науки и техники, М. ВИНТИ, 1985, 320 с.

[6] Davydov A.A., Normal form of the slow motion of relaxation type equations and foliation

of bynomial surfaces, *Matem.Sbornik*, v.132 (1987), n.1, 131-139.

[7] G. Ishikawa, Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas, *Invent. math.*, 126 (1996), 2, 215-234.

[8] Ремизов А.О. Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений. *Совр. матем. Фунд. направления. Том 19 (2006)*, с. 131-170.

[9] A.O. Remizov, Singularities in relaxation oscillations and geometric control theory from the common view point, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 12 (2006),n.4, 1-19.

[10] А.О.Ремизов, В.М.Закалюкин, Лежандровы особенности в системах неявных дифференциальных уравнений и быстро-медленных системах, *Труды Математического Ин-та РАН им. В.А.Стеклова*, т.261(2008),140-153.

[11] Неголономные динамические системы, Интегрируемость, Хаос, Странные аттракторы, А.В. Борисов, И.С.Мамаев ред.,Сборник статей, Москва-Ижевск, 2002, 324с.

[12] J.P.Gauthier, F.Monroy-Perez, C.Romero-Melendez, On complexity and motion planning for corank one SR metrics, *COCV*, v.10, 2004, 634-655.

[13] Голубев Ю.Ф., Коряков В.В., Управление инсектоморфным роботом при залезании на вершину вертикального угла и при движении по приставной лестнице, *Изв. РАН, Теория и Системы Управления*, 2008, 1, 231-245.

[14] Zakalyukin I.V., Degenerations of non-holonomic constraints and Ferrer's equations, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Springer, Vol. 16, 3 (July 2010), 439-452.

[15] Закалюкин И.В., Особенности управляемых систем при вырождении неголономных связей, *Успехи математических наук*, т. 65 (2010), вып 4, 193-194.

[16] *Davydov A.A. Qualitative Theory of Control Systems. Mathematical Monographs*, vol. 141. AMS, Providence, Rhode Islans, 1994, 147 p.

[17] *Davydov A.A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z. Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane// ArXiv: math.DS/0302134*, v. 1, 2003.

[18] *Dirac P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva University, New York, 1964.* Русс. перевод: Дирак П.А.М. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.

Сведения об авторе

Закалюкин Иван Владимирович, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета).
Волоколамское ш 4.,Москва, 125993; тел.: (495) 958-04-14; e-mail: zakalyukin@gmail.com