УДК 629.7

# О плоских движениях деформируемого спутника в центральном гравитационном поле относительно центра масс

**Скоробогатых И.В.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*e-mail: igorsko@rambler.ru*

**Аннотация**

Изучается задача о движении относительно центра масс спутника, состоящего из осесимметричных твёрдой и деформируемой частей, в случае, когда его центр масс обращается по круговой орбите вокруг притягивающего центра. В работе показано, что происходит захват системы в положение устойчивого равновесия, в котором ось симметрии спутника направлена по радиусу–вектору центра масс.

**Ключевые слова:** притягивающий центр, осесимметричный спутник, линейная теория вязкоупругости, эволюция вращательного движения.

## Введение

Динамика спутника в гравитационном поле сил изучалась во многих работах, например [1-5]. В данной статье рассматривается спутник, состоящий из упругой и твёрдой частей. Изучается движение спутника относительно его центра масс в предположении, что сам центр масс обращается по круговой орбите вокруг притягивающего центра $O$ с угловой скоростью $\omega_0$ и деформации тела не влияют на это движение. Предполагается, что спутник имеет форму динамически симметричного вытянутого тела, эллипсоид инерции которого в недеформированном состоянии близок к шаровому. Ниже изучаются плоские движения деформируемого тела, когда величина $\omega$ порядка $\omega_0$. Показано, что в конечном итоге наблюдается гравитационный захват системы, при котором она находится в положении устойчивого равновесия в орбитальной системе координат.

## Уравнения движения

Введем систему координат $Cx_1x_2x_3$, жёстко связанную с твёрдой частью тела, в которой точка $C$ – центр масс недеформированной системы, а оси $Cx_i$ ($i$=1,2,3) направлены по её главным центральным осям инерции. Ось $Cx_3$ является осью динамической симметрии и совпадает с осью симметрии упругой части (однородной и изотропной) в недеформированном состоянии. Координаты частицы тела относительно точки $C$ будут **r+u**, где **r** – ее радиус-вектор в отсутствие деформаций, **u** – вектор упругого смещения при деформациях.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ - проекции абсолютной угловой скорости системы координат $C'x_1'x_2'x_3'$, начало которой совпадает с центром масс $C'$ деформированной системы, а оси параллельны осям $Cx_i$ ($i$=1,2,3) на собственные оси.

Уравнения движения системы относительно центра масс (вращение как целого и упругие колебания) можно получить из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа:

$$\int_{\Omega}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u})\times\{O^{-1}\ddot{\boldsymbol{R}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)+\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)]+2\boldsymbol{\omega}\times(\dot{\boldsymbol{u}}-\dot{\boldsymbol{u}}_C)+\ddot{\boldsymbol{u}}-\ddot{\boldsymbol{u}}_C-\boldsymbol{f}\}\rho\delta\boldsymbol{a}dx=0,$$

$$\int_{\Omega}\{O^{-1}\ddot{\boldsymbol{R}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)+\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)]+2\boldsymbol{\omega}\times(\dot{\boldsymbol{u}}-\dot{\boldsymbol{u}}_C)+\ddot{\boldsymbol{u}}-\ddot{\boldsymbol{u}}_C-\boldsymbol{f}\}\rho_2\delta\boldsymbol{u}dx+$$

$$+(\nabla E[\boldsymbol{u}]+\nabla D[\dot{\boldsymbol{u}}],\delta\boldsymbol{u})=0,$$

$$\boldsymbol{f}=-\mu R^{-2}[O^{-1}\boldsymbol{R}^0+(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)R^{-1}-3R^{-1}(\boldsymbol{R}^0,\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)O^{-1}\boldsymbol{R}^0],$$

$$\boldsymbol{R}=R\boldsymbol{R}^0,\quad \mu R^{-3}=\omega_0^2=const,\quad \Omega=\Omega_1+\Omega_2.$$

Здесь **R** - абсолютное ускорение центра масс деформированной системы; **f** – удельная плотность гравитационных сил, действующих на частицы системы со стороны притягивающего центра; $E$**[u]** и $D[\dot{\boldsymbol{u}}]$- функционалы потенциальной энергии упругих деформаций и диссипативный функционал соответственно. Матрица $O^{-1}(t)$ задаёт переход от системы осей Кёнига $C\xi_1'\xi_2'\xi_3'$, двигающейся поступательно, к связанной системе координат $C'x_1'x_2'x_3'$. Вариации δ**a** и δ**u** независимы, причем на области $\Omega_1$ (занимаемой твёрдой частью спутника) имеет место δ**u**=0; μ – гравитационный параметр.

Уравнения движения системы как целого относительно центра масс записываются в виде:

$$(A_1+J_{11})\tilde{\omega}_1'+J_{31}\tilde{\omega}_3'+J_{12}\tilde{\omega}_2'+J_{31}'\tilde{\omega}_3+J_{11}'\tilde{\omega}_1+J_{12}'\tilde{\omega}_2+(A_1-A_2+J_{33}-J_{22})\tilde{\omega}_3\tilde{\omega}_2+$$

$$+J_{32}(\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_3^2)+J_{31}\tilde\omega_1\tilde\omega_2-J_{12}\tilde\omega_3\tilde\omega_1=[M_1-(\boldsymbol{e}_1,d\boldsymbol{G}_u/dt)]\omega_0^{-2},$$

$$(A_2+J_{22})\tilde\omega_2{}'+J_{12}\tilde\omega_1{}'+J_{23}\tilde\omega_3{}'+J_{12}{}'\tilde\omega_1+J_{22}{}'\tilde\omega_2+J_{23}{}'\tilde\omega_3+(A_2-A_3+J_{11}-J_{33})\tilde\omega_1\tilde\omega_3+$$

$$+J_{13}(\tilde\omega_3^2-\tilde\omega_1^2)+J_{12}\tilde\omega_2\tilde\omega_3-J_{23}\tilde\omega_1\tilde\omega_2=[M_2-(\boldsymbol{e}_2,d\boldsymbol{G}_u/dt)]\omega_0^{-2}, \tag{1}$$

$$(A_3+J_{33})\tilde\omega_3{}'+J_{23}\tilde\omega_2{}'+J_{31}\tilde\omega_1{}'+J_{23}{}'\tilde\omega_2+J_{33}{}'\tilde\omega_3+J_{31}{}'\tilde\omega_1+(A_3-A_1+J_{22}-J_{11})\tilde\omega_2\tilde\omega_1+$$

$$+J_{21}(\tilde\omega_1^2-\tilde\omega_2^2)+J_{23}\tilde\omega_3\tilde\omega_1-J_{31}\tilde\omega_2\tilde\omega_3=[M_3-(\boldsymbol{e}_3,d\boldsymbol{G}_u/dt)]\omega_0^{-2},$$

$$\boldsymbol{G}_u=\int\limits_{\Omega}\rho[\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C]dx,\quad A_1=A_2=A,\quad A_2=C,\quad \tilde\omega_i=\omega_i/\omega_0,(i=1,2,3),$$

$$\boldsymbol{u}_C=m^{-1}\int\limits_{\Omega_2}\rho_2\boldsymbol{u}dx,\quad dx=dx_1dx_2dx_3\,.$$

В (1) приняты следующие обозначения: $A$ и $C$ - экваториальный и осевой моменты инерции недеформированной системы соответственно, причем $A>C$; $J_{ij}=J_{ij}[\boldsymbol{u}]$ - зависящие от **u** компоненты тензора инерции деформированного спутника в системе координат $C'x_1'x_2'x_3'$; $\boldsymbol{u}_C$ - радиус-вектор, проведенный из точки $C$ в $C'$ (смещение центра масс при деформациях); $\boldsymbol{e}_i$ и $M_i$ ($i$=1,2,3) – орт по оси $Cx_i$ и проекция гравитационного момента на эту ось соответственно; $\Omega$, $\Omega_1$ и $\Omega_2$ - объёмы, занимаемые всем спутником, его твёрдой и его упругой частью; $\rho, \rho_1, \rho_2$ - плотности всего спутника, его твёрдой и упругой частей, $m$ – масса всего спутника. Штрихом обозначено дифференцирование по безразмерной переменной $\tau=\omega_0 t$.

Пусть $\boldsymbol{R}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ - орт вектора $OC$, заданный своими проекциями на оси связанной системы координат. Тогда имеет место

$$M_1 = 3\omega_0^2\{\gamma_2[(A_3 + J_{33})\gamma_{33} + J_{31}\gamma_1 + J_{32}\gamma_2] - \gamma_3[J_{23}\gamma_3 + J_{21}\gamma_1 + (A_2 + J_{22})\gamma_2]\}$$

$$M_2 = 3\omega_0^2\{\gamma_3[(A_1 + J_{11})\gamma_1 + J_{12}\gamma_2 + J_{13}\gamma_3] - \gamma_1[J_{31}\gamma_1 + J_{32}\gamma_2 + (A_3 + J_{33})\gamma_3]\}. \qquad (2)$$

$$M_3 = 3\omega_0^2\{\gamma_1[(A_2 + J_{22})\gamma_2 + J_{23}\gamma_3 + J_{21}\gamma_1] - \gamma_2[J_{12}\gamma_2 + J_{13}\gamma_3 + (A_1 + J_{11})\gamma_1]\}$$

Для описания деформированного состояния тела используется модель линейной теории вязкоупругости малых деформаций. Вектор упругого смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ в случае осесимметричных граничных условий представляется в виде ряда по ортонормированным собственным формам $\boldsymbol{V}_{km}$ и $\boldsymbol{W}_{km}$ свободных колебаний упругой части, соответствующих собственной частоте $\nu_{km}$:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{k,m=0}^{\infty}[q_{km}\boldsymbol{V}_{km} + p_{km}\boldsymbol{W}_{km}],$$

где $q_{km}$, $p_{km}$ - нормальные координаты, подлежащие определению, а собственные формы в цилиндрической системе координат представляются как

$$\boldsymbol{V}_{km} = (U_{km}\sin k\theta, V_{km}\cos k\theta, W_{km}\sin k\theta),$$

$$\boldsymbol{W}_{km} = (U_{km}\cos k\theta, -V_{km}\sin k\theta, W_{km}\cos k\theta).$$

Для дальнейших вычислений потребуются также выражения координат форм в декартовых осях, имеющие вид

$$\boldsymbol{V}_{km} = (U_{km}\sin k\theta\cos\theta - V_{km}\cos k\theta\sin\theta, U_{km}\sin k\theta\sin\theta + V_{km}\cos k\theta\cos\theta, W_{km}\sin k\theta),$$

$$\boldsymbol{W}_{km} = (U_{km}\cos k\theta\cos\theta + V_{km}\sin k\theta\sin\theta, U_{km}\cos k\theta\sin\theta - V_{km}\sin k\theta\cos\theta, W_{km}\cos k\theta).$$

Уравнения упругих деформаций имеют вид:

$$\varepsilon^2 q''_{km} + \kappa\varepsilon\sigma^2_{km} q'_{km} + \varepsilon^2 \{\omega_0^{-2}(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)],\boldsymbol{V}_{km}) + \omega_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}'\times[\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C],\boldsymbol{V}_{km}) +$$

$$+2\omega_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}'_C),\boldsymbol{V}_{km}) - (\boldsymbol{u}''_{km},\boldsymbol{V}_{km})\} - 2\varepsilon^2(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C,\boldsymbol{V}_{km}) - 3\varepsilon^2(O^{-1}\boldsymbol{R}^0\times[O^{-1}\boldsymbol{R}^0\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C),\boldsymbol{V}_{km}) = 0\,,$$

$$\varepsilon^2 p''_{km} + \kappa\varepsilon\sigma^2_{km} p'_{km} + \varepsilon^2 \{\omega_0^{-2}(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C)],\boldsymbol{W}_{km}) + \omega_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}'\times[\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C],\boldsymbol{W}_{km}) +$$

$$+2\omega_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}'_C),\boldsymbol{W}_{km}) - (\boldsymbol{u}''_{km},\boldsymbol{W}_{km})\} - 2\varepsilon^2(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C,\boldsymbol{W}_{km}) - 3\varepsilon^2(O^{-1}\boldsymbol{R}^0\times[O^{-1}\boldsymbol{R}^0\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_C),\boldsymbol{W}_{km}) = 0$$

$$((\cdot),\boldsymbol{V}_{km}) = \int_{\Omega_2} (\cdot,\boldsymbol{V}_{km})dx\,.$$

Отметим, что в случае, когда деформации происходят с частотами, много меньшими собственных частот свободных упругих колебаний, целесообразно использовать квазистатический подход к определению деформаций.

В дальнейшем предполагаем, что величина ω порядка $\omega_0$ и справедливы следующие неравенства:

$$0 < \varepsilon \ll \kappa \ll 1, \quad \kappa = \chi b \nu, \quad \varepsilon = \omega_0 / \nu\,. \qquad (3)$$

которые означают, что характерное время затухания собственных колебаний с наинизшей частотой $\nu$ существенно превосходит период этих колебаний, но намного меньше характерного времени $T_0 \sim \omega_0^{-1}$ движения механической системы как целого (параметр $\chi$ характеризует диссипацию энергии в материале, $b$>0 – размерная константа). Выполнение допущений (3), имеющих физическое обоснование, позволяет упростить задачу определения деформаций и перейти к её квазистатической постановке. Движение системы рассматривается на интервалах времени порядка и больших. При этом колебания с собственными (высокими) частотами затухают, а деформации носят вынужденный характер и происходят с частотами движения системы как целого.

Система уравнений Эйлера (1) и уравнений для модальных переменных $q_{km}, p_{km}$ (которые для краткости не приводятся), допускает частное решение вида

$$\gamma_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad q_{km} = 0 \quad (\forall k, m),$$

соответствующее плоским движениям деформируемого тела. При таком движении ось симметрии $Cx_3$ все время расположена в плоскости орбиты центра масс, а уравнения движения без учета членов порядка $O(\varepsilon^4)$ и выше представятся так:

$$\tilde{\omega}_2{}' + A^{-1}J_{22}{}'\tilde{\omega}_2 = 3\{[\beta(1-J_{22}A^{-1}) + A^{-1}(J_{11}-J_{33})\gamma_1\gamma_3 + A^{-1}J_{13}(\omega_3^2-\omega_1^2)\} - A^{-1}\rho_2\sum_{m=0}^{\infty} a_{1m}p'_{1m}, \tag{4}$$

$$\sigma_{0m}^2 p_{0m} + \kappa\varepsilon p'_{0m} = \varepsilon^2[\tilde{\omega}_0^2 c_{0m} + (1-3\gamma_3^2)a_{0m}],$$

$$\sigma_{1m}^2 p_{1m} + \kappa\varepsilon p'_{1m} = \varepsilon^2[-\tilde{\omega}'_2 a_{1m} + 3\gamma_1\gamma_3 b_{1m}], \tag{5}$$

$$\sigma_{2m}^2 p_{2m} + \kappa\varepsilon p'_{2m} = \varepsilon^2(\tilde{\omega}_2^2 + 3\gamma_1^2)b_{2m12},$$

$$a_{1m} = b_{1m23} - b_{1m32}, \quad b_{1m} = b_{1m23} - b_{1m32}, \quad \beta = (A-C)/A, \quad a_{0m} = c_{0m11} - c_{0m33},$$

$$c_{0m} = c_{0m11} + c_{0m33}, \quad \sigma_{km} = \nu_{km}/\nu \ \ (\forall k, m), \quad b_{kmij} = \int_{\Omega_2} V_{kmi}k_j dx,$$

$$c_{kmij} = \int_{\Omega_2} W_{kmi}k_j dx, (i, j = 1, 2, 3)$$

где $V_{kmi}$ и $W_{kmi}$ - проекции векторов $\boldsymbol{V}_{km}$ и $\boldsymbol{W}_{km}$ на ось $x_3$ соответственно. Из (5) следует, что деформации имеют порядок $O(\varepsilon^2)$ и происходят по собственным формам $\mathbf{w}_{km}$ с номерами $k$=0,1,2. Линейные по **u** компоненты тензора инерции записываются следующим образом:

$$J_{11} = 2\rho_2 \sum_{m=0}^{\infty} (c_{0m} p_{0m} - b_{2m12} p_{2m}), \qquad J_{12} = 4\rho_2 \sum_{m=0}^{\infty} c_{0m11} p_{0m}, \tag{6}$$

$$J_{22} = 2\rho_2 \sum_{m=0}^{\infty} (c_{0m} p_{0m} + b_{2m12} p_{2m}), \qquad J_{13} = -\rho_2 \sum_{m=0}^{\infty} b_{1m} p_{1m}$$

В (6) учтено, что вектор не зависит от **r** и при вычислении $J_{ij}$ можно перейти от интегрирования по **Ω** к интегрированию по $\Omega_2$. Далее ограничимся случаем, когда эллипсоид инерции недеформированного тела близок к шаровому, так что величина β мала: $\varepsilon^2 \ll \beta \ll 1$. Решение уравнений (5) представляется в виде ряда по степеням параметра κ, в котором учитываются лишь первые два члена разложения. В выражении для функций $p_{km}$ выделим слагаемые, не зависящие от β (слагаемые, пропорциональные $\beta^2$, опускаются). Имеем

$$p_{km} = p_{km0} + \beta p_{km1} + O(\varepsilon^4) + O(\varepsilon^3 \kappa \beta^2), \; (k = 0,1,2)$$

$$p_{0m0} = \varepsilon^2 \sigma_{0m}^{-2} [\tilde{\omega}_2^2 c_{0m} + (1 - 3\gamma_3^2 + 6\kappa\varepsilon\gamma_3\gamma_3') a_{0m}], \tag{7}$$

$$p_{0m1} = -6\kappa\varepsilon^3 \sigma_{0m}^{-2} c_{0m} \gamma_1 \gamma_3 \tilde{\omega}_2,$$

$$p_{1m0} = 3\varepsilon^2 \sigma_{1m}^{-2} [\gamma_1\gamma_3 - \kappa\varepsilon(\gamma_1\gamma_3)'] b_{1m},$$

$$p_{1m1} = 3\varepsilon^2 \sigma_{1m}^{-2} [-\gamma_1\gamma_3 + \kappa\varepsilon(\gamma_1\gamma_3)'] a_{1m},$$

$$p_{2m0} = \varepsilon^2 \sigma_{2m}^{-2} [\tilde{\omega}_2^2 + 3(\gamma_1^2 - 2\kappa\varepsilon\gamma_1\gamma_1')] b_{2m12},$$

$$p_{2m1} = -6\kappa\varepsilon^3 \sigma_{2m}^{-2} \gamma_1 \gamma_3 \tilde{\omega}_2 b_{2m12}.$$

Подстановкой формул (6), (7) в (4) из уравнений движения системы как целого модальные переменные исключаются.

## Положения равновесия в орбитальной системе координат

Для определения положения оси симметрии в орбитальной системе координат введем в рассмотрение угол $\varphi = \tau - \varphi_2 + \pi/2$, где $\varphi_2 -$ угол поворота спутника вокруг оси $Cx_2$, ортогональной плоскости орбиты центра масс. При этом направляющие косинусы будут: $\gamma_1 = \sin\varphi,\ \gamma_3 = \cos\varphi$. Уравнение для переменной φ запишется в виде

$$\varphi'' + 3\beta\gamma_1\gamma_2 + \varphi_0 + \beta\varphi_1 = 0, \qquad (8)$$

$$\varphi_0 = -3\varepsilon^2 A^{-1}\rho_2\{2\gamma_1\gamma_2[(\lambda_{02}+\lambda_2)(1-\varphi')^2 + (1-3\gamma_3^2 - 6\kappa\varepsilon\varphi'\gamma_1\gamma_3)(\lambda_{01}+\lambda_2) + 2\lambda_2] +$$

$$+3(\gamma_3^2-\gamma_1^2)[\gamma_1\gamma_3 - \kappa\varepsilon\varphi'(\gamma_3^2-\gamma_1^2)]\lambda_{11}\} - 12\varepsilon^2 A^{-1}\rho_2[\gamma_1\gamma_3 - \kappa\varepsilon\varphi'(\gamma_3^2-\gamma_1^2)]\varphi'[\varphi'\lambda_{12} + (1-\varphi')(\lambda_{02}+\lambda_2)],$$

$$\varphi_1 = 12\kappa\varepsilon^3 A^{-1}\rho_2\varphi'(1-\varphi')^2(\gamma_3^2-\gamma_1^2)(\lambda_{03}+\lambda_2) + 6\varepsilon^2 A^{-1}\rho_2\gamma_1\gamma_3\{[6\kappa\varepsilon\gamma_1\gamma_3 - (1-3\gamma_3^2)](\lambda_{02}+\lambda_2) -$$

$$-(1-\varphi')^2(\lambda_{03}+\lambda_2) - 2\lambda_2\} + 3\varepsilon^2 A^{-1}\rho_2[-\gamma_1\gamma_3 + \kappa\varepsilon\varphi'(\gamma_3^2-\gamma_1^2)][3(\gamma_3^2-\gamma_1^2)\lambda_{12} + 4\varphi'^2\lambda_{13}].$$

Здесь введены обозначения

$$\lambda_{01} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{0m}^{-2}(c_{0m11} - c_{0m33})^2, \qquad \lambda_{02} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{0m}^{-2}(c_{0m11}^2 - c_{0m33}^2),$$

$$\lambda_{03} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{0m}^{-2}(c_{0m11} + c_{0m33})^2, \qquad \lambda_{11} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{1m}^{-2}(b_{1m23} + b_{1m32})^2,$$

$$\lambda_{12} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{1m}^{-2}(b_{1m32}^2 - b_{1m23}^2), \qquad \lambda_{13} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{1m}^{-2}(b_{1m23} - b_{1m32})^2,$$

$$\lambda_{13} = \sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{2m}^{-2}b_{2m12}^2.$$

Из (8) следует, что существуют две серии положений равновесия спутника в орбитальной системе координат:

1) $\varphi = \{\pi n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$, 2) $\varphi = \{\pi / 2 + \pi n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$

Уравнения в вариациях для первой серии положений равновесия будут:

$$\varphi'' + a_1\varphi' + a_2\varphi = 0, \quad (\varphi \sim \varphi' \sim O(1)), \tag{9}$$

$$a_1 = 3\varepsilon^2\kappa A^{-1}\rho_2[3\lambda_{11} + \beta[4(\lambda_{03} + \lambda_2) + 3\lambda_{12}]],$$

$$a_2 = 3\{\beta - \varepsilon^2 A^{-1}\rho_2[2(\lambda_{02} + \lambda_2 - 2\lambda_{01}) + 3\lambda_{11} + \beta[3\lambda_{12} - 2(2\lambda_{02} - \lambda_{03} - \lambda_2)]]\}.$$

Из (9) следует, что это положение равновесия асимптотически устойчиво. В таком положении ось симметрии $Cx_3$ коллинеарна радиус-вектору **R** центра масс, а тело деформировано по формам с номерами *k*=2 под действием центробежных сил инерции и и по формам с номерами *k*=0 (продольно-поперечные деформации) под действием центробежных и гравитационных сил. Вторая серия положений равновесия, при которой ось симметрии ортогональна **R**, неустойчива. При такой ориентации в орбитальной системе координат спутник деформирован под действием центробежных сил инерции и сил тяготения по формам с номерами *k*=0,2.

## Эволюция угловой скорости и гравитационный захват

Для выделения эффекта уменьшения угловой скорости вращения спутника $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$ до значения $\omega_0$ и гравитационного захвата системы перепишем уравнение (8) в следующей форме:

$$\varphi'' + 3\beta \sin\varphi \cos\varphi + \tilde{\varphi}_0 + \beta\tilde{\varphi}_1 = 0; \qquad (10)$$

$$\tilde{\varphi}_0(\varphi,\varphi') = k\varphi'\{3[\sin^2 2\varphi(\lambda_{01} + \lambda_2) + \cos^2 2\varphi\,\lambda_{11}] + 4\varphi'\cos 2\varphi[(1-\varphi')(\lambda_{02} + \lambda_2) + \varphi'\lambda_{12}]\},$$

$$k = 3\kappa\varepsilon^3 A^{-1}\rho_2 > 0,$$

$$\tilde{\varphi}_1(\varphi,\varphi') = k[4\varphi'(1-\varphi')^2 \cos 2\varphi(\lambda_{03} + \lambda_2) + 3\sin^2 2\varphi(\lambda_{02} + \lambda_2) + \varphi'\cos 2\varphi(3\cos 2\varphi\,\lambda_{12} + 4\varphi'^2\,\lambda_{13})].$$

Здесь $\tilde{\varphi}_0$ и $\tilde{\varphi}_1$ диссипативные составляющие, пропорциональные коэффициенту κ в $\varphi_0$ и $\varphi_1$ соответственно. Заметим, что в (10) опущены члены порядка $O(\varepsilon^4\kappa^2)$ и $O(\varepsilon^3\kappa\beta^2)$, поэтому это уравнение описывает эволюцию плоских движений вязкоупругого спутника с ошибкой порядка $O(\beta^2 + \kappa\varepsilon)$. При ε=0 движение абсолютно твёрдого спутника удовлетворяет уравнению

$$\varphi'' + 3\beta \sin\varphi \cos\varphi = 0,$$

которое имеет первый интеграл

$$\alpha = \varphi'^2 + 3\beta \sin^2\varphi = const. \qquad (11)$$

Величина α характеризует энергию в относительном движении. В невозмущённом движении [2] можно выделить три случая движения спутника: вращательное (при выполнении условия α>3β), колебательное (при α<3β) и лимитационное (при α=3β). При ε≠0, в случае возмущённого движения, функция α=α($t$) удовлетворяет уравнению

$$\alpha' = -2/T(\alpha)\int_0^{T(\alpha)} \varphi'(\tilde{\varphi}_0 + \beta\tilde{\varphi}_1)d\tau, \quad \psi' = \tfrac{1}{2}\alpha'/\alpha^{1/2}, \qquad (12)$$

где ψ – максимальное значение угловой скорости $\varphi'$. Уравнение (12) описывает изменение величины α в среднем за время Т, где Т(α) – либо период вращения спутника по углу $\varphi$ (в случае вращательного движения), либо период колебаний около положения устойчивого равновесия.

Рассмотрим эволюцию плоских вращений деформируемого спутника. В этом случае, не ограничивая общности, можно полагать, что за время Т=τ угол φ изменяется от 0 до 2π. Из равенства (11) следует

$$d\tau = \varphi_*^{-1} d\varphi, \quad \varphi_*(\alpha,\varphi) = (\alpha - 3\beta \sin^2 \varphi)^{1/2} > 0. \qquad (13)$$

Если величина ψ порядка $O(1)$, то α также порядка $O(1)$. Тогда, подставляя в уравнение (12) для $\alpha'$:

$$\varphi' = \varphi_*, \quad \varphi_* \approx \alpha^{1/2}[1 - (3\beta/2\alpha)\sin^2 \varphi + O(\beta^2)$$

и осуществляя замену переменной интегрирования согласно (13), с принятой точностью порядка $O(\beta^2)$ получим:

$$\alpha' = -2k\alpha^{1/2} T(\alpha) \int_0^{2\pi} \{3(1 - (3\beta/2\alpha)\sin^2 2\psi)[\sin^2 \varphi \cdot (\lambda_{01} + \lambda_2) + \cos^2 2\varphi \cdot \lambda_{11}] + \qquad (14)$$

$$+4\alpha^{1/2}\cos 2\varphi[(1 - \alpha^{1/2} + (3\beta/2\alpha)\sin^2 \varphi)\tilde{\lambda}_{02} + \lambda_{12}\alpha^{1/2}(1 - (3\beta/2\alpha)\sin^2 \varphi) - 3\beta/\alpha \sin^2 \varphi \cdot [(1 - \alpha^{1/2})\tilde{\lambda}_{02} +$$

$$+\lambda_{12}\alpha^{1/2}]] + \beta[3\alpha^{-1/2}\sin^2 2\varphi \cdot \tilde{\lambda}_{02} + \cos 2\varphi[4(1 - \alpha^{1/2})^2(\lambda_{03} + \lambda_2) + 3\lambda_{12}\cos 2\varphi + 4\lambda_{13}\alpha]]\} d\varphi,$$

$$T(\alpha) = \int_0^{2\pi} \varphi_*^{-1} d\varphi \approx 2\pi\alpha^{-1/2}(1 + (3\beta/4\alpha)), \quad \tilde{\lambda}_{02} = \lambda_{02} + \lambda_2 \cdot$$

Выполняя необходимые вычисления, приведем уравнение (14) к виду

$$\alpha' = -2k\alpha(1-(3\beta/2\alpha))\lambda + \beta[3(\alpha^{-1/2}-1)\tilde{\lambda}_{02} + 4\lambda_{12}]\}, \tag{15}$$

$$\lambda = \lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_2 \quad (\lambda_{01}, \lambda_{11}, \lambda_2 > 0).$$

Усредненное уравнение (15) описывает эволюцию вращения системы с угловой скоростью $\omega_0$, с учётом малой неравномерности вращения под влиянием вязкоупругих деформаций.

Так как, по предположению, β<<1, то в нулевом приближении имеем

$$\alpha' = -2k_1\alpha, \quad \alpha(\tau) = \alpha_0 \exp(-k_1\tau), \quad k_1 = 3k\lambda > 0, \tag{16}$$

где $\alpha_0$ - значение α в начальный момент времени τ=0.

Из формул (16) и второго равенства (12) следует, что величина ψ монотонно убывает (вращение спутника замедляется), а период T соответственно увеличивается. За промежуток времени порядка $\tau_1 = -\frac{1}{k_1}\ln(3\beta/\alpha_0) >> 1$ величина α уменьшится до значения α<3β и вращательное движение переходит в колебательное. Заметим, что в конце интервала $\tau_1$, когда α~β, приближенные уравнения (15),(16) не применимы.

Рассмотрим преобразование уравнений (12) в случае плоских колебаний. Будем предполагать, что за первую половину периода, когда $\tau \in [0, T/2]$, угол φ изменяется в пределах от –φ до φ, где φ – максимальное отклонение оси от положения устойчивого равновесия (φ<π/2). На этом интервале времени в (12) справедлива замена переменной интегрирования $d\tau = \varphi_*^{-1} d\varphi$. За вторую половину периода, когда $\tau \in [T/2, T]$ - угол φ изменяется в пределах от φ до -φ и справедливо равенство $d\tau = -\varphi_*^{-1} d\varphi$. Имеем

$$\alpha' = -2/T(\alpha)\int_{-\varphi}^{\varphi} \{\tilde{\varphi}_0(\varphi,\varphi_*) - \tilde{\varphi}_0(\varphi,-\varphi_*) + \beta[\tilde{\varphi}_1(\varphi,\varphi_*) - \tilde{\varphi}_1(\varphi,-\varphi_*)]\} d\varphi. \qquad (17)$$

Подстановкой в уравнения (17) выражений $\tilde{\varphi}_0$ и $\tilde{\varphi}_1$ из (10) преобразуем его к виду

$$\alpha' = -(8k/T)F, \quad F = F_1 + F_2 + F_3, \quad F_i = \int_0^{\varphi} \varphi_*^{-1} f_i d\varphi, \quad (i = 1,2,3), \qquad (18)$$

где

$$f_1 = 3\varphi_*^2[\sin^2 2\varphi \cdot (\lambda_{01} + \lambda_2) + \cos^2 2\varphi \cdot \lambda_{11}],$$

$$f_2 = \varphi_*^2 \cos^2 2\varphi\{4\varphi_*^2 \cdot (\lambda_{12} - \lambda_{02} - \lambda_2) + \beta[4(\lambda_{03} + \lambda_2) + 3\lambda_{12}\cos 2\varphi]\},$$

$$f_3 = 4\beta\varphi_*^4 \cos 2\varphi(\lambda_{03} + \lambda_2 + \lambda_{13}).$$

Отметим, что при колебательных движениях тела имеют место соотношения $\varphi_*^2 \sim \alpha \sim \beta$, из которых следует, что функция $f_1$- порядка $O$(β), функция $f_2 \sim O(\beta^2)$, а $f_3 \sim O(\beta^3)$. Подынтегральная функция в $F_1$ положительна (так как $f_1 > 0$) и интегрируема, причем нижний предел 0 меньше верхнего φ>0. По известной теореме математического анализа отсюда следует, что интеграл $F_1 > 0$. Тогда из уравнения (17) в первом приближении по β имеем

$$\alpha' = -(8k/T)F_1 < 0, \quad (F_1 \gg F_2, F_3). \qquad (19)$$

Неравенство (19) совместно с (12) означает, что, как и во вращательном движении вязкоупругого спутника, величина ψ монотонно убывает, при этом колебания затухают. В конечном итоге наблюдается гравитационный захват системы, при котором спутник находится в положении устойчивого равновесия в орбитальной системе координат.

## Библиографический список


1. Маркеев А.П. К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космические исследования. 1989. Т. 27. № 2. С. 163-165.
2. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд-во МГУ, 1975. - 308 с.
3. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ, 2016, № 85: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=65212
4. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Параметрическое управление плоскими движениями спутника-гантели // Труды МАИ, 2015, №82: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=58455
5. Марков Ю.Г. Пространственное движение деформируемого тела в центральном поле сил // Космические исследования. 1988. Т. 24. № 2. С.236-246.