Научная статья
УДК 620.18
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189684
EDN: https://www.elibrary.ru/MVIMNQ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО РАСШИРЕНИЯ ДИСПЕРСНО-АРМИРОВАННОГО ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

К.В. Файзуллин, И.Н. Сидоров, М.П. Данилаев✉

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия

✉ MPDanilaev@kai.ru

Цитирование: Файзуллин К.В., Сидоров И.Н., Данилаев М.П. Вычисление эффективных коэффициентов линейного температурного расширения дисперсно-армированного полимерного композиционного материала // Труды МАИ: электрон. журнал. № 150. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189684

Аннотация. В авиационной технике к функциональным дисперсно-армированным полимерным композиционным материалам предъявляются жесткие требования, в том числе, к воспроизводимости их физико-механических свойств. Один подходов к повышению воспроизводимости комплекса физико-технических свойств таких материалов основан на формировании полимерной оболочки на поверхностях дисперсных частиц наполнителя. С одной стороны, такая оболочка позволяет обеспечить адгезию частиц наполнителя к полимерной матрице. С другой стороны – она влияет на механические характеристики материала, в том числе, на его коэффициент линейного температурного расширения. В работе представлена математическая модель вычисления эффективных коэффициентов линейного температурного расширения дисперсно-армированных полимерных композиционных материалов при малом относительном объёме дисперсных субмикронных частиц наполнителя, капсулированных полимером. Использован метод асимптотического осреднения для периодических сред с введением «быстрых» и «медленных» переменных. В

рамках представительной ячейки периодичности, содержащей изотропное упругое ядро (частица наполнителя), покрытое внешней изотропной оболочкой постоянной толщины, сформулированы уравнения равновесия, условия сопряжения на межфазных границах и условия периодичности. Получено выражение для эффективного коэффициента линейного температурного расширения композита через эффективный модуль объёмной деформации, объёмные доли компонентов и их упругие и температурные характеристики. Разработан алгоритм вычисления эффективного коэффициента линейного температурного расширения с использованием эффективного модуля объемной деформации. Показано снижение коэффициента линейного температурного расширения композиции с ростом толщины полимерной оболочки, что обусловлено низкими значениями модуля полимера оболочки, по сравнению с материалом матрицы.

Ключевые слова: дисперсно-армированный полимерный композиционный материал; эффективный коэффициент линейного температурного расширения.

Финансирование: работа выполнена за счет гранта, предоставленного Академией наук Республики Татарстан образовательным организациям высшего образования, научным и иным организациям на поддержку планов развития кадрового потенциала в части стимулирования их научных и научно-педагогических работников к защите докторских диссертаций и выполнению научно-исследовательских работ (Соглашение №15/2025-ПД-КАИ от22.12.2025).

CALCULATION OF DISPERSED REINFORCED POLYMER COMPOSITE MATERIAL LINEAR TEMPERATURE EXPANSION EFFECTIVE COEFFICIENTS

K.V. Fayzullin, I.N. Sidorov, M.P. Danilaev✉

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, Russia

✉ MPDanilaev@kai.ru

Citation: Fayzullin K.V., Sidorov I.N., Danilaev M.P. Calculation of dispersed reinforced polymer composite material linear temperature expansion effective coefficients // Trudy MAI. 2026. No. 150. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189684

Abstract. Stringent requirements for the reproducibility of physical and mechanical properties are imposed on dispersion-reinforced polymer composite materials (DRPCMs) used in aerospace engineering. One of the approaches to improving the reproducibility of the complex of physical and mechanical properties of dispersion-reinforced polymer composite materials (DRPCMs) consists in forming a polymer shell on the surface of dispersed filler particles, i.e., their encapsulation. Such a shell enhances the adhesion of the particles to the polymer matrix and, at the same time, affects the mechanical behaviour of the DRPCM, including its coefficient of linear thermal expansion (CLTE). This paper presents a mathematical model for calculating the effective CLTE of DRPCMs with a small relative volume fraction of submicron filler particles encapsulated by a polymer. The asymptotic homogenization method for periodic media is employed, introducing "fast" and "slow" variables. Within a representative periodicity cell consisting of an isotropic elastic core (filler particle) coated with an outer isotropic shell of constant thickness, the equilibrium equations, interface continuity conditions, and periodicity conditions are formulated. An explicit expression for the effective CLTE of the composite is derived in terms of the effective bulk modulus, the volume fractions of the constituents, and their respective elastic and thermal expansion properties. An algorithm for computing the effective CLTE based on the effective bulk modulus is developed. It is shown that the CLTE of the composition decreases with increasing shell thickness, which is attributed to the lower elastic modulus of the shell polymer relative to those of the matrix material and fillers particles.

Keywords: dispersion-reinforced polymer composite material; effective coefficient of linear thermal expansion

Funding: this work was supported by a grant provided by the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan to higher education institutions, research and other organizations to support human resource development plans in terms of encouraging their research and academic staff to defend doctoral dissertations and carry out research work (Agreement No. 15/2025-PD-KAI dated 22.12.2025).

Введение

Дисперсно-армированные полимерные композиционные материалы (ДАПКМ) нашли применение в авиационной технике, как в качестве функциональных материалов, в которых требуемые функциональные свойства обеспечивают за счет выбора частиц наполнителя [1-2], так и в качестве композиционных материалов, предназначенных для ремонтных работ [3]. Причем, использование в качестве наполнителей наноразмерных частиц (углерод, металл, керамика) позволяет существенно повысить некоторые механические характеристики композита, что делает их перспективным конструкционным материалом для авиационной техники [4]. Следует отметить, что к функциональным ДАПКМ предъявляются требования, в том числе, и к их физико-механическим характеристикам. Так, например, дождевая каплеударная эрозия вследствие недостаточной прочности материалов может повлиять на функциональные свойства полимерных композиционных материалов авиационной техники [5].

Одной из основных проблем при формировании функциональных ДАПКМ является обеспечение воспроизводимости комплекса физико-технических свойств таких материалов. Так, в работе [6] показано, что агломерация частиц наполнителя приводит к существенному снижению воспроизводимости прочностных характеристик ДАПКМ, используемых в авиационной технике. Повышение воспроизводимости комплекса требуемых физико-технических свойств таких материалов возможно при предварительной обработке наполнителя. Так, в работе [7] показано, что капсулирование полимером дисперсных частиц позволяет повысить их адгезию к полимеру матрицы. Это способствует снижению агломератов и вакуолей, которые, как правило, образуются вокруг агломератов и существенно снижают все механические характеристики композиционного материала [8]. Материал полимерной оболочки на поверхностях дисперсных частиц и ее толщина влияет на механические характеристик композиции [7]. В литературе отмечается, что даже при нанометровой толщине полимерной оболочки на границе с полимерной матрицей могут возникать как растягивающие, так и сжимающие напряженные состояния.

Это может привести к существенному изменению предела прочности таких ДАПМК [9].

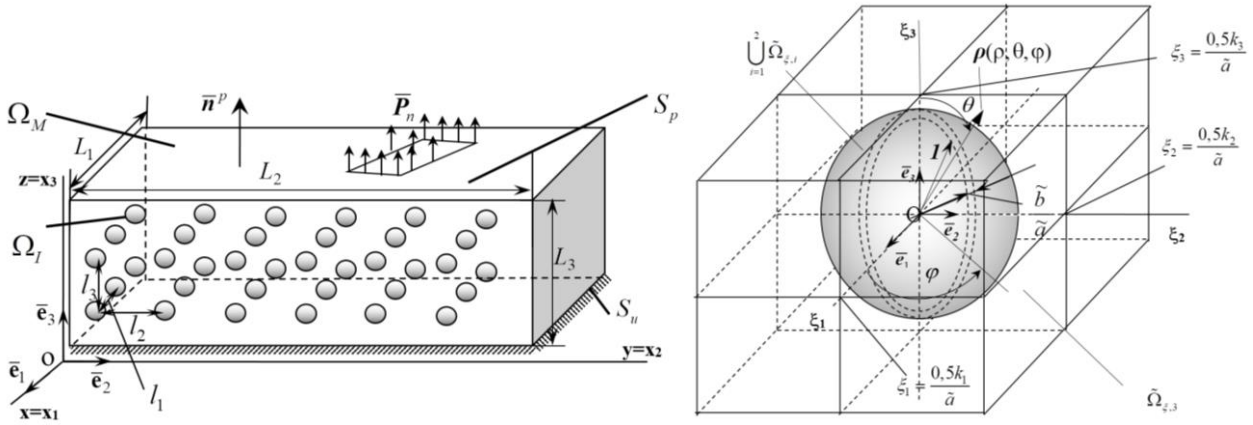
Несмотря на многочисленные исследования механических характеристик ДАПКМ с капсулированными частицами наполнителя, в литературе отсутствуют математические модели, на основании которых возможно оценить влияние оболочки на коэффициент линейного температурного расширения (КЛТР) таких материалов. Разработка соответствующих адекватных моделей позволит решить не только задачу анализа, но и задачу синтеза: выбор материала и технологии формирования полимерной оболочки дисперсных частиц наполнителя, обеспечивающей требуемое значение КЛТР. На наш взгляд, для функциональных материалов, обеспечение заданного значения КЛТР является принципиально важной задачей. Так, например, в работе [10] подчеркивается необходимость минимизации КЛТР антенн из композиционных полимерных материалов? как для наземных станций, так и для спутников.

Целью данной работы является разработка математической модели вычисления эффективных коэффициентов линейного температурного расширения дисперсно-армированного полимерного композиционного материала (ДАПКМ) с капсулированными частицами наполнителя при малом относительном объёме дисперсных субмикронных частиц в матрице.

Формализация и исследование математической модели

Представительный объем гетерогенного ДАПКМ по аналогии с работой [11] будем рассматривать в виде регулярной периодической вдоль координат x_1, x_2, x_3 структурой (рисунок 1а), где $\bar{\mathbf{x}}$ – безразмерный вектор координат, отнесенный к характерному размеру представительного объема $L = L_1$. При этом поперечные размеры ячейки l_1, l_2, l_3 (рисунок 1а) много меньше общих размеров представительного объема L_1, L_2, L_3 вдоль соответствующих осей координат. В соответствии с методологией работы [8] введем «быстрые» переменные ξ_1 , ξ_2 , ξ_3, которые определяют локальное изменение параметров напряженно – деформированного состояния ДАПКМ при внешнем нагружении.

Связь «быстрых» и «медленных» переменных будем представлять как $\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$, $\xi_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$, $\xi_3 = \frac{x_3}{\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{l_1}{L_1}$, $k_i = \frac{l_i}{l_1}$ $i = \overline{1,3}$.



а) б)

Рисунок 1 – Структурная схема ДАПКМ:
а – общий вид ДАПКМ; Ω_M – полимерная матрица, Ω_I –включение; $S_{u(p)}$ – поверхности задания кинематических (статических) граничных условий, $\overline{\boldsymbol{P}_n}$ –вектор напряжений на S_p, $\overline{\boldsymbol{n}}^p$ – вектор единичной нормали к поверхности S_p;
б – ячейка периодичности $\tilde{\Omega}_\xi$ (размеры отнесены к радиусу включения $\tilde{a}$)

Частица наполнителя ДАПКМ (рисунок 1б), состоит из следующих элементов: изотропная полимерная матрица; включение в виде изотропного ядра с заданными механическими характеристиками, покрытое внешней изотропной оболочкой постоянной толщины (рисунок 1б). В работе [11] задачи на ячейки периодичности (ЗЯП) для определения эффективных механических характеристик ДАПКМ рассмотрены в общей постановке. В реальных ДАПКМ относительный объём дисперсных субмикронных частиц обычно удовлетворяет условию $\frac{4}{3}\pi\left(\tilde{a}+\tilde{b}\right)^3 \Big/ k_1k_2k_3 << 1$ (рисунок 1б) ($\tilde{a} = a / l_1$, a – радиус ядра включения (частицы), $\tilde{b} = b / l_1$, b –толщина оболочки). Далее будем рассматривать именно такой случай при расчете эффективных механических характеристик ДАПКМ. В этой связи далее размеры ячейки периодичности (ЯП) отнесем к радиусу ядра включения $\tilde{a}$. При этом получим ЯП с размерами, представленными на рисунке 1б и задаваемую как:

$$\tilde{\Omega}_{\xi,1}=\left[\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)\le 1\right],\ \tilde{\Omega}_{\xi,2}=\left[1\le\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)\le\left(1+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^2\right],$$

$$\tilde{\Omega}_{\xi,incl}=\left[\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)\le\left(1+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^2\right],\ \tilde{\Omega}_{\xi,4}=[|\xi_1|\le\frac{k_1}{2\tilde{a}}]\times[|\xi_2|\le\frac{1}{2}\frac{k_2}{\tilde{a}}]\times[|\xi_3|\le\frac{1}{2}\frac{k_3}{\tilde{a}}], \quad (1)$$

$$\Omega_{\xi,M}=\Omega_{\xi,4}\setminus\tilde{\Omega}_{\xi,incl},\ \tilde{\Omega}_{\xi}=\bigcup_{i=1}^{3}\tilde{\Omega}_{\xi,i}.$$

В работе [12] предложены алгоритмы аналитического вычисления эффективных модуля объемной деформации, модуля сдвига и на их основе модуля Юнга, коэффициента Пуассона ДАПКМ в виде периодической структуры расположения капсулированных частиц наполнителя в матрице при их малом относительном объёме. Уравнения равновесия представительного объема гетерогенного ДАПКМ (рисунок 1) с граничными условиями в безразмерном виде (по повторяющимся индексам проводится суммирование):

$$\frac{\partial\left(\sigma^{kq}\overline{\mathbf{e}}_k\right)}{\partial x_q}=0,\ \overline{\mathbf{x}}\in\Omega_M\bigcup\sum_I\left(\Omega_{I,1}\bigcup\Omega_{I,2}\right),\ \overline{\mathbf{x}}=x_i\overline{\mathbf{e}}_i,$$

$$\sigma^{qk}=C^{qkij}(\overline{\mathbf{x}})\left(\varepsilon_{ij}(\overline{\mathbf{x}})-\delta_{ij}\bar{\alpha}(\overline{\mathbf{x}})\Delta T\right),\ \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (2)$$

где $C^{qkij}(\overline{\mathbf{x}})$ - безразмерный тензор модулей упругости (λ,μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера) отнесенный к параметру Ламе матрицы λ_M, задаваемый как:

$$C^{qkij}(\overline{\mathbf{x}})=\tilde{\lambda}(\overline{\mathbf{x}})\delta_{qk}\delta_{ij}+\tilde{\mu}(\overline{\mathbf{x}})(\delta_{qi}\delta_{kj}+\delta_{qj}\delta_{ki}),$$

$$\tilde{\lambda}(\overline{\mathbf{x}})=\begin{cases}1,\ \overline{\mathbf{x}}\in\Omega_M,\\ \lambda_{1(2)}/\lambda_M,\ \overline{\mathbf{x}}\in\Omega_{I,1(2)},\end{cases}\quad \tilde{\mu}(\overline{\mathbf{x}})=\begin{cases}\mu_M/\lambda_M,\ \overline{\mathbf{x}}\in\Omega_M,\\ \mu_{1(2)}/\lambda_M,\ \overline{\mathbf{x}}\in\Omega_{I,1(2)},\end{cases}$$

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

$$\varepsilon_t=\left(\alpha_M\cdot T_0\right),\ \tilde{\alpha}(\overline{\mathbf{x}})=\begin{cases}1, & \overline{\mathbf{x}}\in\Omega_M,\\ \alpha_{1(2)}/\alpha_M,\ \overline{\mathbf{x}}\in\Omega_{I,1(2)},\end{cases}$$

где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материалов; $\varepsilon_{i,j}$ – компоненты тензора малых деформаций; u_i – компоненты вектора перемещений,

отнесенные к характерному размеру представительного объема $L = L_1$ (рисунок 1а), σ^{qk} – безразмерные компоненты тензора напряжений, отнесенные к параметру Ламе матрицы λ_M, $\bar{x}$ – безразмерный вектор координат, отнесенный к характерному размеру представительного объема L, $\tilde{\alpha}(\bar{\mathbf{x}})$ – безразмерный КЛТР, отнесенный к КЛТР матрицы α_M, (в данной работе в отличии от работы [13] , безразмерная температура ДАПКМ $T(\bar{\mathbf{x}})$ представляется как $\Delta\tilde{T} = (\Delta T/T_0)\varepsilon_t$ и отсчитывается от некоторого начального состояния), T_0 – характерная температура ДАПКМ. К уравнениям (2) добавим граничные условия и условия сопряжения вида:

$$\sigma^{qk}\bar{\mathbf{e}}_k n_q^p = \bar{\mathbf{P}}_n\ ,\ \bar{\mathbf{x}} \in S_p\ ,\quad \bar{\mathbf{u}} = 0\ ,\ \bar{\mathbf{x}} \in S_u\ , \tag{4}$$

$$\left[\sigma^{qk}\bar{\mathbf{e}}_k n_q^I\right]\Big|_{S_{I,1(2)}} = 0\ ,\ \left[\bar{\mathbf{u}}\right]\Big|_{S_{I,1(2)}} = 0,\ \bar{\mathbf{x}} \in S_{I,1(2)}$$

$$\tilde{S}_{I,1} = \left[\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right) = 1\ \right],\quad \tilde{S}_{I,2} = \left[\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right) = \left(1 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^2\ \right]. \tag{5}$$

где операция $[\cdot]_{S_{I,1(2)}}$ – означает разность односторонних пределов вектор - функции на границе раздела $S_{I,1(2)}, n_q^I$ – компоненты единичной внешней нормали на поверхности $S_{I,1(2)}$.

Уравнения равновесия (2) с учетом симметрии тензора модулей упругости $C^{qkij} = C^{qkji}$, его периодичности и периодичности КЛТР $\tilde{\alpha}(\bar{\mathbf{x}})$ преобразуем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x_q}\left(C^{qkij}(\bar{\xi})\left(\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}},\bar{\xi})}{\partial x_j} - \delta_{ij}\tilde{\alpha}(\bar{\xi})\Delta\tilde{T}\right)\bar{\mathbf{e}}_k\right) = 0\ ,\ \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_M \bigcup \sum_I \left(\Omega_{I,1} \bigcup \Omega_{I,2}\right) \tag{6}$$

Решение системы (2) - (6) в соответствии с методологией [12] будем искать в виде:

$$u_i\left(\bar{\mathbf{x}},\bar{\xi}\right) = u_i^{(0)}\left(\bar{\mathbf{x}}\right) + \varepsilon\left(N_{rm}^i\left(\bar{\xi}\right)\frac{\partial u_m^{(0)}\left(\bar{\mathbf{x}}\right)}{\partial x_r} - m_i\left(\bar{\xi}\right)\Delta\tilde{T}\right) + O'\left(\varepsilon^2\right), \tag{7}$$

где матрица - функция $N_{rm}^i\left(\bar{\xi}\right)$ и вектор – функция $m_i\left(\bar{\xi}\right)$ – периодические вдоль координат ξ_1, ξ_2, ξ_3. После подстановки представления (7) в (6), в граничные

условия (4)-(5) формулу для компонент напряжений σ^{qk}, наложения на функции $N_{rm}^{i}\left(\overline{\xi}\right)$, $m_i\left(\overline{\xi}\right)$ условий удовлетворения системе уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_q}\left(C^{qkmr}(\overline{\xi})+C^{qkij}(\overline{\xi})\frac{\partial N_{rm}^{i}\left(\overline{\xi}\right)}{\partial\xi_j}\right)=0\,,\ \overline{\xi}\in\Omega_\xi\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_q}\left(C^{qkij}(\overline{\xi})\left(\frac{\partial m_i\left(\overline{\xi}\right)}{\partial\xi_j}+\delta_{ij}\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\right)\right)=0\,,\ \overline{\xi}\in\Omega_\xi \tag{9}$$

условий сопряжения

$$\left[\left(C^{qkij}(\overline{\xi})\left(\frac{\partial m_i\left(\overline{\xi}\right)}{\partial\xi_j}+\delta_{ij}\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\right)\right)\overline{\mathbf{e}}_k n_q^I\right]\Big\|_{S_{I,1(2)}}=0\,,\quad \overline{\mathbf{x}}\in S_{I,1(2)}, \tag{10}$$

$$\left[\,N_{rm}^{i}\left(\overline{\xi}\right)\overline{\mathbf{e}}_i\,\right]\Big\|_{S_{I,1(2)}}=0\,,\quad \left[\,m_i\left(\overline{\xi}\right)\overline{\mathbf{e}}_i\,\right]\Big\|_{S_{I,1(2)}}=0 \tag{11}$$

условий периодичности

$$\left[\left[N_{rm}^{i}\right]\right]_j=N_{rm}^{i}\left(\overline{\xi}\,\middle|\,\xi_j=\frac{1}{2}\frac{k_j}{\tilde{a}}\right)-N_{rm}^{i}\left(\overline{\xi}\,\middle|\,\xi_j=-\frac{1}{2}\frac{k_j}{\tilde{a}}\right)=0\,,, \tag{12}$$

$$\left[\left[m_i\right]\right]_j=m_i\left(\overline{\xi}\,\middle|\,\xi_j=\frac{1}{2}\frac{k_j}{\tilde{a}}\right)-m_i\left(\overline{\xi}\,\middle|\,\xi_j=-\frac{1}{2}\frac{k_j}{\tilde{a}}\right)=0\,,\ j=\overline{1,3}\,, \tag{13}$$

и условий нормировки [11-12] ($V_\xi\left(\Omega_\xi\right)$– объем области Ω_ξ)

$$\left\langle N_{rm}^{i}\left(\overline{\xi}\right)\right\rangle_\xi=0\,,\left\langle m_i\left(\overline{\xi}\right)\right\rangle_\xi=0,\left\langle\cdot\right\rangle_\xi=\frac{1}{V_\xi\left(\Omega_\xi\right)}\int_{\Omega_\xi}(\cdot)\,d\Omega_\xi\ , \tag{14}$$

получим:

- локальные компоненты тензора напряжений:

$$\sigma^{qk}=\left(C^{qkmr}(\overline{\xi})+C^{qkij}(\overline{\xi})\frac{\partial N_{rm}^{i}\left(\overline{\xi}\right)}{\partial\xi_j}\right)\frac{\partial u_m^{(0)}\left(\overline{\mathbf{x}}\right)}{\partial x_r}-C^{qkij}(\overline{\xi})\left(\frac{\partial m_i\left(\overline{\xi}\right)}{\partial\xi_j}+\delta_{ij}\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\right)\Delta\tilde{T},$$

- осредненные компоненты этого тензора

$$\hat{\sigma}^{qk}=\hat{C}^{qkmr}\frac{\partial u_m^{(0)}\left(\overline{\mathbf{x}}\right)}{\partial x_r}-\hat{C}^{qkmr}\hat{\alpha}_{mr}\Delta\tilde{T}$$

- осредненное уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\hat{C}^{qkmr}\frac{\partial u_m^{(0)}(\overline{\mathbf{x}})}{\partial x_r}-\hat{C}^{qkmr}\hat{\alpha}_{mr}\Delta\tilde{T}\right)\mathbf{e}_k=0, \tag{15}$$

с осредненными граничными условиями

$$\left(\hat{C}^{qkmr}\frac{\partial u_m^{(0)}(\overline{\mathbf{x}})}{\partial x_r}-\hat{C}^{qkmr}\hat{\alpha}_{mr}\Delta\tilde{T}\right)n_q^p\mathbf{e}_k=\overline{\mathbf{P}}_n\ ,\ \overline{\mathbf{x}}\in S_p\quad u_i^{(0)}(\overline{\mathbf{x}})\overline{\mathbf{e}}_i=0\ ,\ \overline{\mathbf{x}}\in S_u. \tag{16}$$

Здесь $\hat{C}^{qkrm}=\left\langle C^{qkmr}(\overline{\xi})+C^{qkij}(\overline{\xi})\frac{\partial N_{rm}^i(\overline{\xi})}{\partial\xi_j}\right\rangle_\xi$, $\hat{C}^{qkmr}\hat{\alpha}_{mr}=\left\langle C^{qkij}(\overline{\xi})\left(\frac{\partial m_i(\overline{\xi})}{\partial\xi_j}+\delta_{ij}\tilde{\alpha}(\overline{\xi})\right)\right\rangle_\xi$,

α_{mr} – компоненты тензора модулей упругости и тензора КЛТР гомогенного ДАПКМ. Уравнения (8), (9) и соотношения (11) – (14) получены после нормировок $\xi_p=\tilde{a}\xi'_p$, $V_i(\overline{\xi})=\tilde{a}m'_i(\overline{\xi}')+\tilde{a}V'_{ii(\infty)}(\overline{\xi}')=\tilde{a}V'_i(\overline{\xi}')$, $V'_{ii(\infty)}(\overline{\xi}')=\varepsilon_t\xi'_i\,\tilde{\alpha}(\overline{\xi}')$ (далее штрихи опущены).В силу симметрии задачи (оси координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 являются осями ортотропии гомогенного ДАПКМ и при больших значениях величин $\frac{k_j}{\tilde{a}}$, $\left(j=\overline{1,3}\right)$ будем полагать $\frac{k_1}{\tilde{a}}=\frac{k_2}{\tilde{a}}=\frac{k_3}{\tilde{a}}$, а эффективные компоненты тензора КЛТР будем представлять как $\hat{\alpha}_{rm}=\hat{\alpha}\cdot\delta_{rm}$.

Для вычисления этих компонент необходимо решить задачу (9) – (14) для вектора «псевдоперемещений» $\mathbf{m}(\overline{\xi})$,

$$\mathbf{m}(\overline{\xi})=\left[m_1(\overline{\xi}),m_2(\overline{\xi}),m_3(\overline{\xi})\right]^T=\overline{\mathbf{e}}_i m_i(\overline{\xi})\ ,$$

удовлетворяющего уравнениям Ламе (функции $\tilde{\lambda}(\overline{\xi})$, $\tilde{\mu}(\overline{\xi})$, $\tilde{\alpha}(\overline{\xi})$ - кусочно – постоянные, Δ_ξ - оператор Лапласа):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left(\Sigma_m^{qk}(\overline{\xi})\overline{\mathbf{e}}_k\right)}{\partial\xi_q}=\left(\tilde{\lambda}(\overline{\xi})+\tilde{\mu}(\overline{\xi})\right)grad_\xi\left(div_\xi\left(\mathbf{m}(\overline{\xi})\right)\right)+\tilde{\mu}(\overline{\xi})\Delta_\xi\mathbf{m}(\overline{\xi})=0,\\&\Sigma_m^{qk}(\overline{\xi})=\tilde{\lambda}(\overline{\xi})\delta_{qk}div_\xi\left(\mathbf{m}(\overline{\xi})\right)+\tilde{\mu}(\overline{\xi})\left(\frac{\partial m_q(\overline{\xi})}{\partial\xi_k}+\frac{\partial m_k(\overline{\xi})}{\partial\xi_q}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим задачу одновременного растяжении вдоль координат ξ_1,ξ_2,ξ_3 с «псевдоперемещениями» на «бесконечности» (всестороннее растяжение) $\mathbf{V}_{11(\infty)}(\overline{\xi})=\overline{\mathbf{e}}_1\xi_1\tilde{\alpha}(\overline{\xi})$, $\mathbf{V}_{22(\infty)}(\overline{\xi})=\overline{\mathbf{e}}_2\xi_2\tilde{\alpha}(\overline{\xi})$, $\mathbf{V}_{33(\infty)}(\overline{\xi})=\overline{\mathbf{e}}_3\xi_3\tilde{\alpha}(\overline{\xi})$. При этом

необходимо решить задачу для вектора «псевдоперемещений» $\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)$. Для этого воспользуемся методом, предложенным в работе [14]. Вектор «псевдоперемещения» $\mathbf{V}_{(\infty)}\left(\overline{\xi}\right)=\mathbf{V}_{11(\infty)}\left(\overline{\xi}\right)+\mathbf{V}_{22(\infty)}\left(\overline{\xi}\right)+\mathbf{V}_{33(\infty)}\left(\overline{\xi}\right)=\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\boldsymbol{\rho}\left(\overline{\xi}\right)$ представим в виде разложения по базисным векторам $\boldsymbol{э}_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$, образованных векторами основного базиса сферической системы координат [15]:

$$\begin{aligned}&\mathbf{V}_{(\infty)}\left(\overline{\xi}\right)=V^{\rho}_{(\infty)}\boldsymbol{э}_1+V^{\theta}_{(\infty)}\boldsymbol{э}_2+V^{\phi}_{(\infty)}\boldsymbol{э}_3,\\&V^{\rho}_{(\infty)}=\left(\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\boldsymbol{\rho}\left(\overline{\xi}\right)\cdot\boldsymbol{э}_1\right)=\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\rho,\ \ V^{\theta}_{(\infty)}=\left(\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\boldsymbol{\rho}\left(\overline{\xi}\right)\cdot\boldsymbol{э}_2\right)=0,\\&V^{\phi}_{(\infty)}=\left(\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\boldsymbol{\rho}\left(\overline{\xi}\right)\cdot\boldsymbol{э}_3\right)=0\end{aligned}\qquad(18)$$

где векторы ортонормированного базиса $\boldsymbol{э}_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$, выражаются через углы сферической системы координат и единичные векторы $\overline{\mathbf{e}}_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ как показано на рис.1:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{э}_1(\theta,\phi)=\overline{\mathbf{e}}_3\cos\theta+\mathbf{e}(\phi)\sin\theta,\ \boldsymbol{э}_2(\theta,\phi)=-\overline{\mathbf{e}}_3\sin\theta+\mathbf{e}(\phi)\cos\theta,\\&\boldsymbol{э}_3(\theta,\phi)=\mathbf{g}(\phi),\ \mathbf{e}(\phi)=\overline{\mathbf{e}}_1\cos\phi+\overline{\mathbf{e}}_2\sin\phi,\ \ \mathbf{g}(\phi)=-\overline{\mathbf{e}}_1\sin\phi+\overline{\mathbf{e}}_2\cos\phi.\end{aligned}\qquad(19)$$

По аналогии с [13], определим структуру вектора $\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)$, как $\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)=m^{\rho}(\rho)\boldsymbol{э}_1$. Компоненты этого вектора в системе координат ξ_1,ξ_2,ξ_3 с учетом (18), (19) имеют вид:

$$\begin{aligned}&m_1\left(\overline{\xi}\right)=\left(\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{e}}_1\right)=m^{\rho}(\rho)\cos\phi\sin\theta=\frac{m^{\rho}(\rho)}{\rho}\xi_1,\\&m_2\left(\overline{\xi}\right)=\left(\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{e}}_2\right)=m^{\rho}(\rho)\sin\phi\sin\theta=\frac{m^{\rho}(\rho)}{\rho}\xi_2,\\&m_3\left(\overline{\xi}\right)=\left(\mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{e}}_3\right)=m^{\rho}(\rho)\cos\theta=\frac{m^{\rho}(\rho)}{\rho}\xi_3.\end{aligned}\qquad(20)$$

Здесь следует отметить, что компоненты $m_i\left(\overline{\xi}\right)\ ,\left(i=\overline{1,3}\right)$ удовлетворяют условию нормировки (14) $\left\langle m_i\left(\overline{\xi}\right)\right\rangle_{\xi}=0$. Вектор $\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)$ должен удовлетворять векторному уравнению (17), в которое с учетом (20) входят следующие составляющие:

$$grad_{\xi}\left(div_{\xi}\left(\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)\right)\right)=\left(\left(m^{\rho}(\rho)\right)''+2\frac{\left(m^{\rho}(\rho)\right)'}{\rho}-2\frac{m^{\rho}(\rho)}{\rho^{2}}\right)\frac{\xi_k\overline{\mathbf{e}}_k}{\rho},\tag{21}$$

$$\Delta_{\xi}\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)=\overline{\mathbf{e}}_i\Delta_{\xi}m_i\left(\overline{\xi}\right)=\left(\left(m^{\rho}(\rho)\right)''+2\frac{\left(m^{\rho}\right)'}{\rho}-2\frac{m^{\rho}(\rho)}{\rho^{2}}\right)\frac{\xi_i\overline{\mathbf{e}}_i}{\rho}\tag{22}$$

Соотношения (21), (22) получены с использованием операции дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\xi_k}(f(\rho))=\frac{d}{d\rho}(f(\rho))\cdot\frac{\xi_k}{\rho}=(f(\rho))'\cdot\frac{\xi_k}{\rho}$. После подстановки (21) и (22) в (17) получим:

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\lambda}(\overline{\xi})+\tilde{\mu}(\overline{\xi})\right)grad_{\xi}\left(div_{\xi}\left(\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)\right)\right)+\tilde{\mu}(\overline{\xi})\Delta_{\xi}\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)=\\&=\left(\tilde{\lambda}(\overline{\xi})+2\tilde{\mu}(\overline{\xi})\right)\left(\left(m^{\rho}(\rho)\right)''+2\frac{\left(m^{\rho}(\rho)\right)'}{\rho}-2\frac{m^{\rho}(\rho)}{\rho^{2}}\right)\frac{\overline{\boldsymbol{\rho}}}{\rho}=0,\ \overline{\boldsymbol{\xi}}\in\tilde{\Omega}_{\xi}.\end{aligned}\tag{23}$$

Решение уравнения (23) представляется как:

$$\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)=m^{\rho}(\rho)\frac{\overline{\mathbf{e}}_k\xi_k}{\rho}=\left(C\rho+\frac{D}{\rho^{2}}\right)\frac{\overline{\boldsymbol{\rho}}}{\rho}.\tag{24}$$

Для определения в (24) констант C, D в областях $\tilde{\Omega}_{\xi,1}$, $\tilde{\Omega}_{\xi,2}$, $\tilde{\Omega}_{\xi,M}$ удовлетворим условия сопряжения (10), (11) для вектора $\mathbf{m}\left(\overline{\xi}\right)$:

$$\begin{aligned}&\left[\left(\tilde{\Sigma}_{m}^{qk}(\overline{\xi})+\tilde{\Sigma}_{m(\infty)}^{qk}(\overline{\xi})\right)\overline{\mathbf{e}}_k n_q^I\right]\Big|_{\tilde{S}_{I,1(2)}}=\\&=\left[\left(C+\tilde{\alpha}\left(\overline{\xi}\right)\right)\left(3\tilde{\lambda}(\overline{\xi})+2\tilde{\mu}(\overline{\xi})\right)\right]\Big|_{\tilde{S}_{I,1(2)}}\cdot\mathbf{n}^{I,1(2)}-\left[\left(4\tilde{\mu}(\overline{\xi})\frac{D}{\rho^{3}}\right)\right]\Big|_{\tilde{S}_{I,1(2)}}\cdot\mathbf{n}^{I,1(2)}=0,\\&\left[\left(C\rho+\frac{D}{\rho^{2}}\right)\right]\Big|_{\tilde{S}_{I,1(2)}}\cdot\mathbf{n}^{I,1(2)}=0,\ \overline{\boldsymbol{\xi}}\in\tilde{S}_{I,1(2)},\end{aligned}\tag{25}$$

где $\boldsymbol{n}^{I,1(2)}$ – единичная нормаль на поверхности $\tilde{S}_{I,1(2)}$,

$$\tilde{\Sigma}_m^{qk}(\bar{\xi}) = \tilde{\lambda}(\bar{\xi})\delta_{qk} div_\xi\left(\mathbf{m}\ \left(\bar{\xi}\right)\right) + \tilde{\mu}(\bar{\xi})\left(\frac{\partial m_q\left(\bar{\xi}\right)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial m_k\left(\bar{\xi}\right)}{\partial \xi_q}\right) =$$

$$= C\left(3\tilde{\lambda}(\bar{\xi}) + 2\tilde{\mu}(\bar{\xi})\right)\delta_{qk} + 2\tilde{\mu}(\bar{\xi})\frac{D}{\rho^3}\left(-3\frac{\xi_k\xi_q}{\rho^2} + \delta_{qk}\right),$$

$$\tilde{\Sigma}_{m(\infty)}^{qk}(\bar{\xi}) = \tilde{\lambda}(\bar{\xi})\delta_{qk} div_\xi\left(\mathbf{V}_{(\infty)}\left(\bar{\xi}\right)\right) + \tilde{\mu}(\bar{\xi})\left(\frac{\partial V_{(\infty)}^q\left(\bar{\xi}\right)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial V_{(\infty)}^k\left(\bar{\xi}\right)}{\partial \xi_q}\right) =$$

$$= \tilde{\alpha}\left(\bar{\xi}\right)\left(3\tilde{\lambda}(\bar{\xi}) + 2\tilde{\mu}(\bar{\xi})\right)\delta_{qk}.$$

Введем представление вектора $\mathbf{m}\left(\bar{\xi}\right)$ в областях $\tilde{\Omega}_{\xi,1}$, $\tilde{\Omega}_{\xi,2}$, $\tilde{\Omega}_{\xi,M}$, обеспечивающего ограниченность его модуля в виде:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{m}_1\left(\bar{\xi}\right) = C_1\rho\frac{\bar{\mathbf{e}}_k\xi_k}{\rho}, \quad \bar{\xi} \in \tilde{\Omega}_{\xi,1},\\
&\mathbf{m}_2\left(\bar{\xi}\right) = \left(C_2\rho + \frac{D_2}{\rho^2}\right)\frac{\bar{\mathbf{e}}_k\xi_k}{\rho}, \quad \bar{\xi} \in \tilde{\Omega}_{\xi,2},\\
&\mathbf{m}_3\left(\bar{\xi}\right) = \frac{D_3}{\rho^2}\frac{\bar{\mathbf{e}}_k\xi_k}{\rho}, \quad \bar{\xi} \in \tilde{\Omega}_{\xi,M}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Подставив (26) в соотношения (25), получим систему уравнений для определения констант C_1, C_2, D_2, и D_3:

$$\begin{aligned}
&\left(C_1 + \tilde{\alpha}_1\right)\left(3\tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\mu}_1\right) = \left(C_2 + \tilde{\alpha}_2\right)\left(3\tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\mu}_2\right) - 4\tilde{\mu}_2 D_2, \quad C_1 = C_2 + D_2,\\
&\left(C_2 + \tilde{\alpha}_2\right)\left(3\tilde{\lambda}_2 + 2\tilde{\mu}_2\right) - 4\tilde{\mu}_2 D_2 \Big/ \left(1 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^3 = \tilde{\alpha}_3\left(3\tilde{\lambda}_3 + 2\tilde{\mu}_3\right) - 4\tilde{\mu}_3 D_3 \Big/ \left(1 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^3,\\
&C_2 + D_2 \Big/ \left(1 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^3 = D_3 \Big/ \left(1 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^3.
\end{aligned} \tag{27}$$

Следует отметить, что представление (24) обеспечивает условие периодичности (13) асимптотически $\left[\left[m_i \right]\right]_j\Big|_{|\bar{\xi}|\to\infty} = 0,\ j = \overline{1,3}.$

После решения системы (27) возможно вычислить эффективный КЛТР $\hat{\alpha}$, используя соотношение:

$$\hat{C}^{qkmr}\hat{\alpha}\cdot\delta_{mr} = \hat{\alpha}\left(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)\delta_{qk} = \left\langle \tilde{\Sigma}_m^{qk}(\bar{\xi}) + \tilde{\Sigma}_{m(\infty)}^{qk}(\bar{\xi})\right\rangle_\xi =$$

$$= \left\langle C\left(3\tilde{\lambda}(\bar{\xi}) + 2\tilde{\mu}(\bar{\xi})\right)\delta_{qk} + 2\tilde{\mu}(\bar{\xi})\frac{D}{\rho^3}\left(-3\frac{\xi_k\xi_q}{\rho^2} + \delta_{qk}\right) + \tilde{\alpha}\left(\bar{\xi}\right)\left(3\tilde{\lambda}(\bar{\xi}) + 2\tilde{\mu}(\bar{\xi})\right)\delta_{qk}\right\rangle_\xi,$$

из которого следует

$$\hat{\alpha}\left(3\hat{\lambda}+2\hat{\mu}\right)\delta_{qk}\delta_{qk}=9\hat{\alpha}\hat{K}=9\left\langle\tilde{K}(\bar{\xi})\left(C+\tilde{\alpha}\left(\bar{\xi}\right)\right)\right\rangle_{\xi}\Rightarrow$$

$$\frac{\hat{\alpha}}{\tilde{\alpha}_M}=\frac{1+\psi_1\left(\frac{\tilde{K}_1}{\tilde{K}_M}\left(\frac{C_1}{\tilde{\alpha}_M}+\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_M}\right)-1\right)+\psi_2\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_M}\left(\frac{C_2}{\tilde{\alpha}_M}+\frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_M}\right)-1\right)}{\hat{K}/\tilde{K}_M},\qquad(28)$$

$$\psi_1=4\pi\tilde{a}^3/\left(3k_1k_2k_3\right),\ \psi_2=4\pi\tilde{a}^3\left(\left(1+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^3-1\right)\Big/\left(3k_1k_2k_3\right),\ \psi_M=1-\psi_1-\psi_2,$$

где $\tilde{K}_{i(M)}=\tilde{\lambda}_{i(M)}+\frac{2}{3}\tilde{\mu}_{i(M)}\quad(i=1,2)$ – модуль объемной деформации включения в виде изотропного ядра с заданными механическими характеристиками - 1, покрытое внешней изотропной оболочкой постоянной толщины - 2 (рисунок 1б) (полимерной матрицы $\tilde{\lambda}_M=1$); $\hat{K}$ - модуль эффективной объемной деформации гомогенного ДАПКМ. Этот модуль согласно работе [13] представляется в виде:

$$\frac{\hat{K}}{\tilde{K}_M}=\frac{\tilde{K}_{mix\,\mathrm{mod}}}{\tilde{K}_M}+\psi_1A_1\frac{\tilde{K}_1}{\tilde{K}_M}+\psi_2A_2\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_M},\ \tilde{K}_{mix\,\mathrm{mod}}=\psi_1\tilde{K}_1+\psi_2\tilde{K}_2+\psi_M\tilde{K}_M,$$

и коэффициенты A_1, A_2 определяются после решения системы уравнений

$$\left(A_1+1\right)\left(3\tilde{\lambda}_1+2\tilde{\mu}_1\right)=\left(A_2+1\right)\left(3\tilde{\lambda}_2+2\tilde{\mu}_2\right)-4\tilde{\mu}_2B_2,\qquad A_1=A_2+B_2,$$

$$\left(A_2+1\right)\left(3\tilde{\lambda}_2+2\tilde{\mu}_2\right)-4\tilde{\mu}_2\frac{B_2}{\left(1+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^3}=3+2\tilde{\mu}_M-4\tilde{\mu}_M\frac{B_3}{\left(1+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^3},\qquad A_2+\frac{B_2}{\left(1+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^2}=\frac{B_3}{\left(1+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^2}.$$

На рисунке 2а представлены зависимость приведенного эффективного модуля объемной деформации $\hat{K}/\tilde{K}_M=K_{eff}/\tilde{K}_M$ от приведенного радиуса включения $\tilde{a}=a/l_1$ при различных относительных толщинах внешней изотропной оболочки $\tilde{b}/\tilde{a}$. Максимальная объемная доля включения $\psi_{1\max}$, соответствующая приведенному радиусу $\tilde{a}=a/l_1=0.2$ равна 0.03. Далее все расчеты выполнены при размерах ЯП $k_1=k_2=k_3=1$ (Рис. 1.б).

При расчетах использовались данные по механическим характеристикам материалов ПКМ, которые приведены в таблице 1.

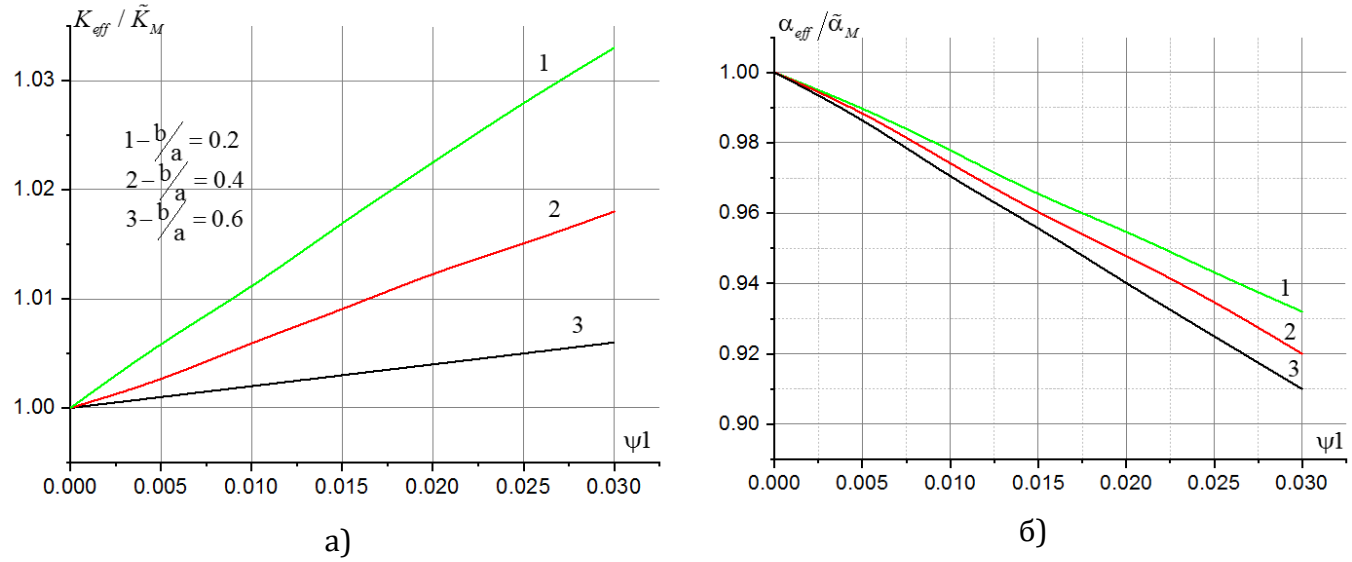
Таблица 1

Данные по материалам

$E_M^{(0)}$, ГПа	$\nu_M^{(0)}$	E_1, ГПа	ν_1	E_2, МПа	ν_2
3.1	0.33	370	0.21	290	0.35
K_1, ГПа	K_2, МПа	K_M, ГПа	α_1 $1/^\circ C$	α_2 $1/^\circ C$	α_M $1/^\circ C$
212.6	322	3.03	$7.26\cdot10^{-6}$	$\sim4\cdot10^{-5}$	$\sim8\cdot10^{-5}$

Данные таблицы 1 соответствуют типовым характеристикам частиц оксида алюминия (смесь δ и θ, диапазон размеров 40÷190 нм, распределение по размерам – нормальное, производитель «Plasmotherm», Product number: PL1344281), и полистирола с низким молекулярным весом [16-17], формируемом на поверхностях субмикронных частиц оксида алюминия по технологии, приведенной в работе [9]. В качестве матрицы в экспериментах использовали полиметилметакрилат (ПММА).

На рисунке 2б представлена зависимость приведенного эффективного КЛТР $\hat{\alpha}/\tilde{\alpha}_M = \alpha_{eff}/\tilde{\alpha}_M$ от приведенного радиуса включения $\tilde{a} = a/l_1$ при различных относительных толщинах внешней изотропной оболочки $\tilde{b}/\tilde{a}$. Все расчеты выполнены при размерах ЯП $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ (рисунок 1б), соответствующих изотропному гомогенному ДАПКМ.



а) б)

Рисунок 2 – Графики зависимостей механических параметров от объемной доли ядер капсулированных частиц наполнителя $\psi 1$: а – зависимость приведенного модуля объемной деформации; б – зависимость приведенного коэффициента температурного расширения.

Заключение

Авторами статьи предложена математическая модель вычисления эффективных коэффициентов линейного температурного расширения дисперсно-армированного полимерного композиционного материала в виде периодической структуры расположения капсулированных частиц наполнителя в матрице при малом относительном объёме дисперсных субмикронных частиц.

Разработан алгоритм аналитического вычисления коэффициента линейного температурного расширения с использованием эффективного модуля объемной деформации. Численные расчеты показали, что с увеличением толщины полимерной оболочки (при фиксированном размере частиц наполнителя) эффективное значение КЛТР ($\hat{\alpha}/\tilde{\alpha}_M$) снижается.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Благодарности

Авторы, Файзуллин К. В. и Данилаев М. П., выражают искреннюю благодарность своему коллеге и другу Сидорову Игорю Николаевичу — основному автору статьи, ушедшему из жизни в 2026 году

Acknowledgments

The authors, Fayzullin K. V. and Danilaev M. P., express their sincere gratitude to their colleague and friend Igor Nikolaevich Sidorov, the principal author of the article, who passed away in 2026.

Список источников

1. Kumar V., Alam M.N. Multifunctional polymer composite materials // Polymers. 2025. Vol.17, no.12. P.1636. DOI:10.3390/polym17121636.

2. Fionov A., Kraev I., Yurkov G., Solodilov V., Zhukov A., Surgay A., Kusnetsova I., Kolesov V. Radio-absorbing materials based on polymer composites and their application

to solving the problems of electromagnetic compatibility // Polymers. 2022. Vol.14, no.15. P.3026. DOI:10.3390/polym14153026.

3. Roy S., Shukla D. K. Optimization of CFRE Patch Parameters Bonded with Epoxy-Alumina Nanocomposite Adhesive for Repair of Al 7075-T6 Alloy // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2026. Vol.150. P.104401. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2026.104401

4. Смирнов М.М., Малюгин А.С. Разработка гибридных композитов на основе синтетических смол, модифицированных наночастицами металлов и керамики. Создание опытного производства // Труды МАИ. 2010. №38. С.20-32.

5. Мингун Ш., Ин С. Экспериментальное исследование повреждений конструкции из композитных материалов высокоскоростного летательного аппарата от дождевой каплеударной эрозии // Труды МАИ. 2022. №126. С.230-257. DOI: 10.34759/trd-2022-126-10.

6. Polydoropoulou P., Tserpes K., Pantelakis S., Katsiropoulos C. Multiscale modeling of polymers filled with MWCNTs: the effect of dispersion, waviness, interphase and agglomerations // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 2020. Vol.92. no.9. P.1429-1440. DOI: 10.1108/AEAT-11-2019-0230

7. Бобина Е.А., Данилаев М.П., Дебердеев Т.Р., Дробышев С.В., Карандашов С.А., Клабуков М.А., Куклин В.А., Файзуллин, К. В. Механические свойства полимерной композиции на основе эпоксидной смолы при вариации толщины оболочки полилактида на поверхностях дисперсных частиц оксида меди (I) // Пластические массы. 2024. №11-12. С.31-34. DOI: 10.35164/0554-2901-2023-11-12-31-34.

8. Данилаев М.П., Бобина Е.А., Куклин В.А., Файзуллин К.В. Влияние структуры полимерной композиции с дисперсным наполнением на ее тепловое расширение и упругость // Письма в Журнал технической физики. 2026. Т.52, №4. 3-7. DOI: 10.61011/PJTF.2026.04.62316.20370.

9. Сидоров И.Н., Куклин В.А., Энская А.И., Данилаев М.П. Влияние параметров включений с оболочкой на напряженно-деформированное состояние полимерной матрицы в дисперсно-армированном композиционном материале //

Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. №89. С. 135-146. DOI: 10.17223/19988621/89/10.

10. Власов А.Ю., Амельченко Н.А., Пасечник К.А., Титов М.А., Сержантова М.В. Статический и модальный анализ силовой конструкции прецизионного крупногабаритного антенного рефлектора из полимерных композиционных материалов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2017. Т.18, №4. С.897-901.

11. Сидоров И.Н., Энская А.И. Алгоритм гомогенизации упругих свойств дисперсно армированных полимерных композиционных материалов // Научно-технический вестник Поволжья. 2020. № 9. С. 60–66.

12. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.

13. Сидоров И.Н., Данилаев М.П., Куклин В.А. Энская А.И. Механические свойства дисперсно-армированных полимерных композиционных материалов: коллективная монография. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ. 2022. 160 с.

14. Christensen R.M. Mechanics of composite materials. Courier Corporation. 2012. 273 p.

15. Седов Л.И. Механика сплошной среды: учебник для вузов. МГУ им.М.В. Ломоносова. 6-е изд. СПб.: Лань. 2004. Т. 1. 528 с.

16. Mittal V. (ed.). Surface modification of nanoparticle and natural fiber fillers. John Wiley & Sons. 2015. 225 p. DOI:10.1002/9783527670260.

17. Martin John R., Johnson Julian F., Cooper Anthony R. Mechanical properties of polymers: the influence of molecular weight and molecular weight distribution // Journal of Macromolecular Science, Part C. 1972. Vol.8. №1. P. 57–199. DOI:10.1080/15321797208068169.

References

1. Kumar V., Alam M.N. Multifunctional polymer composite materials. *Polymers*, 2025, vol.17, no.12, p.1636, DOI:10.3390/polym17121636.

2. Fionov A., Kraev I., Yurkov G., Solodilov V., Zhukov A., Surgay A., Kusnetsova I., Kolesov V. Radio-absorbing materials based on polymer composites and their application

to solving the problems of electromagnetic compatibility. *Polymers,* 2022, vol.14, no.15, p.3026, DOI:10.3390/polym14153026.

3. Roy S., Shukla D. K. Optimization of CFRE Patch Parameters Bonded with Epoxy-Alumina Nanocomposite Adhesive for Repair of Al 7075-T6 Alloy // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2026. Vol.150. P.104401. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2026.104401

4. Smirnov M.M., Malyugin A.S. Development of hybrid composites based on synthetic resins, modified with nanoparticles of metals and ceramics. Creation of pilot production // TRUDY MAI. 2010. No 38. Pp.20-32.

5. Sha M., Sun Y. Experimental study of damage to the structure of composite materials of high-speed aircraft from raindrop impact erosion// TRUDY MAI. 2022. No 126. Pp.230-257. DOI: 10.34759/trd-2022-126-10.

6. Polydoropoulou P., Tserpes K., Pantelakis S., Katsiropoulos C. Multiscale modeling of polymers filled with MWCNTs: the effect of dispersion, waviness, interphase and agglomerations // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 2020. Vol.92. no.9. P.1429-1440. DOI: 10.1108/AEAT-11-2019-0230

7. Bobina E.A., Danilaev M.P., Deberdeev T.R., Drobyshev S.V., Karandashov S.A., Klabukov M.A., Kuklin V.A., Fayzullin K.V. Mechanical properties of polymer composition based on epoxy resin with variation of polylactide shell thickness on surfaces of dispersed copper(I) oxide particles. [Mekhanicheskie svoystva polimernoy kompozitsii na osnove epoksidnoy smoly pri variatsii tolshchiny obolochki polilaktida na poverkhnostyakh dispersnykh chastits oksida medi (I)]. Plasticheskie massy, 2024, no.11-12, p. 31-34. DOI: 10.35164/0554-2901-2023-11-12-31-34.

8. Danilaev M.P., Bobina E.A., Kuklin V.A., Fayzullin K.V. Influence of the structure of a polymer composition with dispersed filler on its thermal expansion and elasticity [Vliyanie struktury polimernoy kompozitsii s dispersnym napolneniem na ee teplovoe rasshirenie i uprugost']. Technical Physics Letters, 2026, vol.52, no.4, p.3-7. DOI: 10.61011/PJTF.2026.04.62316.20370.

9. Sidorov I.N., Kuklin V.A., Enskaya A.I., Danilaev M.P. Influence of inclusion parameters with a shell on the stress-strain state of the polymer matrix in a dispersion-reinforced composite material. [Vliyanie parametrov vklyucheniy s obolochkoy na

napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie polimernoy matritsy v dispersno-armirovannom kompozitsionnom materiale]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, 2024, no.89, p.135-146, DOI: 10.17223/19988621/89/10.

10. Vlasov A.Yu., Amelchenko N.A., Pasechnik K.A., Titov M.A., Serzhantova M.V. Static and modal analysis of a load-bearing structure of a precision large-sized antenna reflector made of polymer composite materials [Staticheskiy i modal'nyy analiz silovoy konstruktsii pretsizionnogo krupnogabaritnogo antennogo reflektora iz polimernykh kompozitsionnykh materialov]. Sibirskiy aerokosmicheskiy zhurnal, 2017, vol.18, no.4, p. 897-901.

11. Sidorov I.N., Enskaya A.I. Algorithm for homogenization of elastic properties of dispersion-reinforced polymer composite materials [Algoritm gomogenizatsii uprugikh svoystv dispersno armirovannykh polimernykh kompozitsionnykh materialov]. Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya, 2020, no.9, p.60–66.

12. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Homogenization of processes in periodic media [Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh], Moscow, Nauka, 1984. 352 p.

13. Sidorov I.N., Danilaev M.P., Kuklin V.A., Enskaya A.I. Mechanical properties of dispersion-reinforced polymer composite materials: collective monograph [Mekhanicheskie svoystva dispersno-armirovannykh polimernykh kompozitsionnykh materialov: kollektivnaya monografiya], Kazan, KNITU-KAI, 2022. 160 p.

14. Christensen R.M. Mechanics of composite materials, Courier Corporation, 2012, 273 p.

15. Sedov L.I. Continuum mechanics: textbook for universities [Mekhanika sploshnoy sredy: uchebnik dlya vuzov], Saint Petersburg, Lan', 2004, vol.1, 528 p.

16. Mittal V. (ed.). Surface modification of nanoparticle and natural fiber fillers. John Wiley & Sons. 2015. 225 p. DOI:10.1002/9783527670260.

17. Martin John R., Johnson Julian F., Cooper Anthony R. Mechanical properties of polymers: the influence of molecular weight and molecular weight distribution. Journal of Macromolecular Science, Part C., 1972, vol.8,. no.1, p.57–199, DOI:10.1080/15321797208068169.

Информация об авторах

Константин Владимирович Файзуллин, к.т.н., ведущий научный сотрудник, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, г. Казань, Россия; ORCID: https://orcid.org/0009-0003-4507-058X; e-mail: KVFayzullin@kai.ru

Игорь Николаевич Сидоров (1955-2026), д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики и математики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6246-7699.

Максим Петрович Данилаев, д.т.н., профессор, заведующий межвузовской междисциплинарной лабораторией, профессор кафедры электронных и квантовых средств передачи информации, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, КНИТУ-КАИ, г. Казань, Россия; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7733-9200; e-mail: MPDanilaev@kai.ru

Information about the authors

Konstantin V. Fayzullin, Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev–KAI, Kazan, Russia; ORCID: https://orcid.org/0009-0003-4507-058X; e-mail: KVFayzullin@kai.ru

Igor N. Sidorov (1955-2026), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics and Mathematics, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, Russia; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6246-7699.

Maxim P. Danilaev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Interuniversity Interdisciplinary Laboratory, Professor of the Department of Electronic and Quantum Information Transmission Facilities, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, Russia; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7733-9200; e-mail: MPDanilaev@kai.ru

Получено 08 сентября 2026 ● Принято к публикации 20 сентября 2026 ● Опубликовано 28 октября 2026
Received 08 September 2026 ● Accepted 20 September October 2026 ● Published 28 October 2026