

Труды МАИ. 2023. № 133
Trudy MAI, 2023, no. 133

Научная статья
УДК 531.391:521.93
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177657>

ДЕФОРМАЦИИ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ ЗЕМЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ЛУНЫ И СОЛНЦА

Мьо Зо Аунг

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ, Москва, Россия
myozawaung53@gmail.com

Аннотация. В работе изучается задача о деформациях вязкоупругого слоя Земли под действием сил притяжения Луны и Солнца. Земля представляется как вязкоупругое твердое тело, состоящее из твердой части и вязкоупругой оболочки. На основе уравнений деформаций получены приближенные выражения для частот приливных деформаций.

Ключевые слова: деформации, вязкоупругая Земля, приливы, гравитационное возмущение

Для цитирования: Мьо З.А. Деформации вязкоупругого слоя Земли под действием сил притяжения Луны и Солнца // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177657>

Original article

DEFORMATIONS OF THE VISCOELASTIC LAYER OF THE EARTH UNDER THE INFLUENCE OF THE GRAVITATIONAL FORCES OF THE MOON AND SUN

Myo Zaw Aung

Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI,

Moscow, Russia

myozawaung53@gmail.com

Abstract. The presented article is studying the problem of the viscoelastic layer of the Earth deformations under the action of the forces of attraction of the Moon and the Sun through the modal approach. A viscoelastic solid consisting of an axisymmetric solid core and a viscoelastic axisymmetric (in an undeformed state) shell subject to deformation according to the Kelvin–Voigt model was considered as the Earth model. There are no displacements on the inner boundary of the shell, and the outer boundary is free. The process of the Earth deformation is assumed to be considered as quasi-stationary.

Based on the deformation equations derived from the D'Alembert-Lagrange variation principle, approximate expressions for the frequencies of solid-state tides are obtained in the work. A modal approach is used for this purpose. The author demonstrates that oscillations will occur only on the forms with 0, 1 and 2 indices. The frequencies of the forced tidal oscillations of the Earth mantle deformable layer are approximately determined for these

forms The resulting set of harmonics includes not only the basic tidal harmonics, but the minor small-scale components with combinational frequencies as well. The results of the observation variations approximation in gravity acceleration in the city of Membach on a superconducting SG-gravimeter, built using the developed tidal model are presented as an example.

The models of tidal deformations of the viscoelastic Earth are employed in the problems that require a highly accurate description of the gravitational field, such as, in the problems of the spacecraft orbital motion. Thus, the lunar-solar tides in the of satellites motion lead to quite noticeable disturbing accelerations. For example, for high-orbit satellites with an orbit altitude of about 20,000 km (GLONASS, GPS), the disturbing acceleration is of the order of $2 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$, and for low-orbit satellites with an orbit altitude of about 350-400 km (ISS), the acceleration value is already much greater, namely of the order of $1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$. For example, neglecting the perturbing acceleration of the order of $2 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$ for GLONASS leads to a daily orbital drift of about 2-3 meters.

However, the issues related to the description of tides turn out to be important not only in the tasks of clarifying coordinate-time and navigation support, but in the tasks of the tidal evolution of the planets motion and their satellites in celestial mechanics and astrodynamics.

Keywords: deformations, viscoelastic Earth, tides, gravitational perturbation.

For citation: Myo Z.A Deformations of the viscoelastic layer of the Earth under the influence of the gravitational forces of the Moon and Sun. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177657>

Введение

Существует большое число задач, важных для науки и техники, в которых существенно влияние деформируемости на движение системы в целом и наоборот, когда движение тела в целом играет важную роль в характере процесса колебаний деформируемой среды. Область приложений задач первого типа связана, например, с динамикой крупногабаритных космических конструкций или с задачами приливной эволюции движения планет в небесной механике. Однако, вопросы, связанные с описанием приливов [1-5] оказываются важными не только в эволюционных задачах, но и в задачах, требующих высокоточное описание гравитационного поля [6-9], например, в задачах орбитального движения космических аппаратов [10-12]. К другому типу задач относится задача о полюсном приливе деформируемой Земли, модель которого оказывает существенное влияние на идентификацию возмущений движения мгновенной оси вращения Земли [1, 2, 13-18]. Эта задача рассматривалась в предыдущей работе [3].

Деформации Земли, обусловленные полюсным приливом, учитываются в задаче построения высокоточного прогноза орбиты космического аппарата, т.к. в

этом случае в уравнениях движения спутника необходим учёт различных малых возмущающих факторов. Как отмечалось в работах [11, 19], влияние вариаций центробежных моментов инерции из-за смещения полюса на движение спутника невелико и приводит к возмущающему ускорению порядка 10^{-11} м/с² для высокоорбитальных спутников с высотой орбиты около 20000 км (ГЛОНАСС, GPS) и порядка $2 \cdot 10^{-9}$ м/с² для низкоорбитальных спутников с высотой орбиты около 350-400 км (МКС). Однако, в отличие от малого влияния полюсного прилива на орбиту спутников лунно-солнечные приливы уже приводят к существенно более заметным возмущающим ускорениям - порядка $2 \cdot 10^{-9}$ м/с² для высокоорбитальных спутников с высотой орбиты около 20000 км (ГЛОНАСС, GPS) и порядка $1.5 \cdot 10^{-7}$ м/с² для низкоорбитальных спутников с высотой орбиты около 350-400 км (МКС). Например, неучет возмущающего ускорения порядка $2 \cdot 10^{-9}$ м/с² для ГЛОНАСС приводит к суточному уходу орбиты около 2-3 метров [12].

В данной работе изучается задача о деформациях вязкоупругого слоя Земли под действием сил притяжения Луны и Солнца с помощью модального подхода. На основе уравнений деформаций получены приближенные выражения для частот приливных деформаций.

Постановка задачи

В данной постановке задачи Луна и Солнце рассматриваются как материальные точки, Земля – как тело, состоящее из осесимметричного твердого ядра и

вязкоупругой оболочки, подчиняющейся модели Кельвина – Фойгта[20, 21]. Оболочка предполагается осесимметричной (в недеформированном состоянии). На внутренней границе оболочки перемещения отсутствуют, а внешняя граница свободна. Предполагается, что процесс деформаций Земли можно считать квазистационарным. Начало инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ помещается в притягивающий центр (Солнце), с центром масс системы Земля-Луна C связываем оси Кёнига $C\xi'_1\xi'_2\xi'_3$. С ядром Земли жестко связываются оси $C_1x_1x_2x_3$, направленные по главным центральным осям инерции планеты в недеформированном состоянии, а также принимается, что точка C_1 совпадает с центром масс Земли в недеформированном состоянии. Далее, пусть $\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_c^0 R_c$, $R_c = p(1 + e \cos \nu)^{-1}$ - радиус-вектор центра масс C , \mathbf{R}_c^0 - единичный вектор центра масс C ; p - фокальный параметр и эксцентриситет орбиты, ν - истинная аномалия. Аналогично представим вектор $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}^0 = \mathbf{R}_1^0$ - от Луны к Земле, причем $R_1 = p_1(1 + e_1 \cos \nu_1)^{-1}$, $w_1 = \nu_1 + \omega_1$, а также

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} \sin w_1 \cos \Omega_1 - \sin w_1 \sin \Omega_1 \cos i_1 \\ \cos w_1 \sin \Omega_1 - \sin w_1 \cos \Omega_1 \cos i_1 \\ \sin w_1 \sin i_1 \end{pmatrix},$$

где введены обозначения w - аргумент широты, i - наклонение орбиты центра масс Земли и Луны, Ω - долгота восходящего узла, ω - угловое расстояние перицентра от узла орбиты центра масс системы Земля-Луна, $w_1, i_1, \Omega_1, \omega_1$ - те же величины но для

орбиты Луны, \mathbf{R}_{21}^0 -единичный вектор от Земли к Луне, \mathbf{R}_{21} -длинавектора от Земли к Луне.

Потенциальную энергию Земли представим в виде [21]:

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi_S + \Pi_M, \\ \Pi_S &= -\int_{\Omega} \frac{fM\rho}{[(O^{-1}\mathbf{R}_C + O^{-1}\mathbf{R}_1 + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx, \\ \Pi_M &= -\int_{\Omega} \frac{fm_2\rho}{[(O^{-1}\mathbf{R}_{21} + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx.\end{aligned}$$

где Π_S -потенциальная энергия в гравитационном поле Солнца, Π_M - потенциальная энергия в гравитационном поле Луны, Ω - область, занимаемая недеформированной Землей в осях $C_1x_1x_2x_3$, M – масса Солнца, m_1 - масса Земли, m_2 - масса Луны, \mathbf{u} – упругое перемещение частиц оболочки Земли, \mathbf{r} – радиус-вектор частиц Земли, $O^{-1}(t)$ - матрица перехода от инерциальной системы координат с началом в центре масс Земли, к системе координат $C_1x_1x_2x_3$, жестко связанной с твердым ядром. Матрица $O^{-1}(t)$ определяется выражением:

$$O(t) = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3,$$

где

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем φ, ψ, θ – углы Эйлера. $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – матрицы плоских поворотов на соответствующие углы. Тогда

$$O^{-1}(t) = \Gamma_3^{-1} \Gamma_2^{-1} \Gamma_1^{-1}.$$

Уравнения, определяющие деформации получаются из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа:

$$\int_{\Omega} (O^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_C + O^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_1 + \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}) \rho \delta u dx + \quad (1)$$

$$+(\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla \Pi[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) = 0$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – векторы угловой скорости и ускорения, соответственно; $E[\mathbf{u}]$ – функционал энергии упругих деформаций, $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b E[\dot{\mathbf{u}}]$ – диссипативный функционал.

Уравнения деформаций

В соответствии с модальным подходом разложим вектор \mathbf{u} в ряд по собственным формам колебаний:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,m=0}^{\infty} [q_{km}(t) \mathbf{V}_{km} + p_{km}(t) \mathbf{W}_{km}], \quad (2)$$

где ортонормированные собственные формы имеют вид [21]:

$$\mathbf{V}_k = (U_k \sin k\varphi, V_k \cos k\varphi, W_k \sin k\varphi),$$

$$W_k = (U_k \cos k\varphi, -V_k \sin k\varphi, W_k \cos k\varphi)$$

в цилиндрических координатах r, φ, z . Тогда в проекциях на оси декартовой системы координат получим:

$$V_{km} = (U_{km} \sin k\varphi \cos \varphi - V_{km} \cos k\varphi \sin \varphi,$$

$$U_{km} \sin k\varphi \sin \varphi + V_{km} \cos k\varphi \cos \varphi, W_{km} \sin k\varphi)$$

$$W_{km} = (U_{km} \cos k\varphi \cos \varphi + V_{km} \sin k\varphi \sin \varphi,$$

$$U_{km} \cos k\varphi \sin \varphi - V_{km} \sin k\varphi \cos \varphi, W_{km} \cos k\varphi)$$

Выбирая $\delta u = V_{ij}$ или $\delta u = W_{ij}$, и подставляя в (2) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных q_{km} и p_{km} . Учитывая, что наличие вязкого трения приводит к затуханию свободных колебаний Земли, применим квазистационарный подход, то есть будем учитывать только вынужденные колебания. Кроме того, отбросим инерционные слагаемые, а также малые члены, обусловленные кориолисовым ускорением. Получим

$$v_{km}^2 q_{km} + \chi b v_k^2 \dot{q}_{km} + 2 \int (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}, V_{km}) \rho dx + (\nabla \Pi_M, V_{km}) + (\nabla \Pi_S, V_{km}) = 0 \quad (3)$$

$$v_{km}^2 p_{km} + \chi b v_k^2 \dot{p}_{km} + 2 \int (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}, W_{km}) \rho dx + (\nabla \Pi_M, W_{km}) + (\nabla \Pi_S, W_{km}) = 0$$

где v_{km} - частота колебаний на формах с индексами kj , b - коэффициент в формуле. При получении уравнений (3) использовались формулы:

$$(\nabla E, \mathbf{V}_{km}) = v_{km}^2 q_{km}, \quad (\nabla E, \mathbf{W}_{km}) = v_{km}^2 p_{km},$$

$$(\nabla D, \mathbf{V}_{km}) = \chi b v_{km}^2 \dot{q}_{km}, \quad (\nabla D, \mathbf{W}_{km}) = \chi b v_{km}^2 \dot{p}_{km}.$$

Далее, заметим, что

$$\int_{\Omega} \nabla \Pi \delta \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \nabla \Pi_S \delta \mathbf{u} dx + \int_{\Omega} \nabla \Pi_M \delta \mathbf{u} dx,$$

и разложим градиенты гравитационных потенциалов в ряды, воспользовавшись малым параметром ε , предполагая выполнение следующих соотношений

$$\varepsilon \sim \frac{\max |\mathbf{r}|}{R_{12}}, \frac{|\mathbf{u}|}{\max |\mathbf{r}|} \sim \varepsilon, \frac{|\mathbf{u}|}{R_{12}} \sim \varepsilon, \quad (4)$$

Тогда ограничиваясь членами не выше ε , получим:

$$(\nabla \Pi_M, \delta \mathbf{u}) \approx f m_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} \left(O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 + \frac{\mathbf{r}}{R_{21}} - 3 O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 \left(O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0, \frac{\mathbf{r}}{R_{21}} \right) \right) \delta \mathbf{u} dx. \quad (5)$$

Аналогично, используя соотношения

$$\frac{R_1}{R_C} \sim \varepsilon, \frac{r}{R_1} \sim \varepsilon, \frac{R_{12}}{R_C} \sim \varepsilon, \quad (6)$$

выведем

$$(\nabla \Pi_S, \delta \mathbf{u}) \approx f M \rho R_C^{-2} \int_{\Omega} \left(O^{-1} \mathbf{R}_C^0 + \frac{O^{-1} \mathbf{R}_1}{R_C} + 2 O^{-1} \mathbf{R}_C^0 \left(\mathbf{R}_C^0, \frac{\mathbf{R}_1}{R_C} \right) \right) \delta \mathbf{u} dx. \quad (7)$$

Далее, введем обозначения

$$O^{-1}\mathbf{R}_1^0 = O^{-1}\mathbf{R}_{21}^0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad O^{-1}\mathbf{R}_C^0 = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R}_C^0 = (R_C \cos w, R_C \sin w, 0)^T$$

Вычислим, используя введенные обозначения, выражения (5) и (7). Для форм с индексами $0m$ будем иметь:

$$fm_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 \delta \mathbf{V}_{0m} dx = fm_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{pmatrix} -V_{om} \sin \alpha \\ V_{om} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} dx = 0,$$

$$fm_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 \delta \mathbf{W}_{0m} dx = fm_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{pmatrix} U_{om} \cos \alpha \\ U_{om} \sin \alpha \\ W_{om} \end{pmatrix} dx =$$

$$= fm_2 \rho R_{21}^{-2} \gamma_3 \int_{\Omega} W_{om} dx,$$

$$= fm_2 \rho R_{21}^{-2} \gamma_3 A_{0m} = \gamma_3 \tilde{A}_{0m}.$$

$$fM \rho R_c^{-2} \int_{\Omega} O^{-1} \mathbf{R}_C^0 \delta \mathbf{V}_{0m} dx = fM \rho R_c^{-2} \int_{\Omega} (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \begin{pmatrix} -V_{om} \sin \alpha \\ V_{om} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} dx = 0,$$

$$fM \rho R_c^{-2} \int_{\Omega} O^{-1} \mathbf{R}_C^0 \delta \mathbf{W}_{0m} dx = fM \rho R_c^{-2} (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \begin{pmatrix} U_{om} \cos \alpha \\ U_{om} \sin \alpha \\ W_{om} \end{pmatrix} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= fM \rho R_c^{-2} \kappa_3 \int W_{0m} dx, \\
&= fM \rho R_c^{-2} \kappa_3 A_{0m} = \kappa_3 \tilde{A}_{0m}.
\end{aligned}$$

Для форм с индексами $1m$:

$$\begin{aligned}
f m_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 \delta \mathbf{V}_{1m} dx &= f m_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{pmatrix} U_{1m} \sin \alpha \cos \alpha - V_{1m} \cos \alpha \sin \alpha \\ U_{1m} \sin \alpha \sin \alpha - V_{1m} \cos \alpha \cos \alpha \\ W_{1m} \sin \alpha \end{pmatrix} dx = \\
&= f m_2 \rho R_{21}^{-2} \gamma_2 \cdot 2\pi \int_{\Omega} \frac{U_{1m} + V_{1m}}{2} dx, \\
&= f m_2 \rho R_{21}^{-2} \gamma_2 A_{1m} = \gamma_2 \tilde{A}_{1m}.
\end{aligned}$$

$$f m_2 \rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} O^{-1} \mathbf{R}_{21}^0 \delta \mathbf{W}_{1m} dx = f m_2 \rho R_{21}^{-2} \gamma_1 A_{1m} = \gamma_1 \tilde{A}_{1m}.$$

$$\begin{aligned}
&fM \rho R_c^{-2} \int_{\Omega} O^{-1} \mathbf{R}_c^0 \delta \mathbf{V}_{1m} dx = \\
&= fM \rho R_c^{-2} \int_{\Omega} (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \begin{pmatrix} U_{1m} \cos \alpha \cos \alpha + V_{1m} \sin \alpha \sin \alpha \\ U_{1m} \cos \alpha \sin \alpha - V_{1m} \sin \alpha \cos \alpha \\ W_{1m} \cos \alpha \end{pmatrix} dx = \\
&= fM \rho R_c^{-2} \kappa_1 \int_{\Omega} \frac{U_{1m} + V_{1m}}{2} dx = -\tilde{A}_{1m} \kappa_1.
\end{aligned}$$

Аналогично вычислим остальные интегралы в (5) и (7). Заметим при этом, что

$$fm_2\rho R_{21}^{-2} \int_{\Omega} (O^{-1}\mathbf{R}_{21}^0 + \frac{\mathbf{r}}{R_{21}} - 3O^{-1}\mathbf{R}_{21}^0(O^{-1}\mathbf{R}_{21}^0, \frac{\mathbf{r}}{R_{21}}))\delta\mathbf{u} \, dx = 0,$$

Если $\delta\mathbf{u} = \mathbf{V}_{3m}$ или $\delta\mathbf{u} = \mathbf{W}_{3m}$.

Таким образом, уравнения приобретут вид:

$$\begin{aligned} v_{0m}^2 q_{0m} + \chi v_{0m}^2 \dot{q}_{0m} &= -\gamma_3 \tilde{A}_{0m} - \tilde{E}_{0m1} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - E_{0m2} \gamma_3^2, \\ v_{0m}^2 p_{0m} + \chi v_{0m}^2 \dot{p}_{0m} &= -\kappa_3 \tilde{A}_{0m} - \tilde{B}_{0m} - \tilde{B}_{0m} - \tilde{E}_{0m1} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - E_{0m2} \gamma_3^2 - \\ &\quad - \tilde{E}_{0m3} \kappa_3 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2 + \kappa_3 \gamma_3) - \tilde{B}_{0m}, \\ \tilde{A}_{0m} &= a_{0m} R_C^{-2}, \quad \tilde{E}_{0m1} = e_{0m1} R_{21}^{-4}, \\ \tilde{E}_{0m2} &= e_{0m2} R_{21}^{-4}, \quad B_{0m} = b_{0m} R_C^{-3}, \quad \tilde{B}_{0m} = b_{0m1} R_{21}^{-3}, \\ v_{1m}^2 q_{1m} + \chi v_{1m}^2 \dot{q}_{1m} &= -\tilde{A}_{1m} \gamma_2 - F_{1m} \gamma_3 - \gamma_2 \gamma_3 \tilde{F}_{1m} - \\ &\quad - F_{2m} \kappa_2 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2 + \kappa_3 \gamma_3), \\ v_{1m}^2 p_{1m} + \chi v_{1m}^2 \dot{p}_{1m} &= -\tilde{A}_{1m} \gamma_1 - F_{1m} \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_3 \tilde{F}_{1m} - \\ &\quad - F_{2m} \kappa_1 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2 + \kappa_3 \gamma_3), \\ v_{2m}^2 q_{2m} + \chi v_{2m}^2 \dot{q}_{2m} &= \tilde{F}_{2m} \gamma_1 \gamma_2, \\ v_{2m}^2 p_{2m} + \chi v_{2m}^2 \dot{p}_{2m} &= -\tilde{F}_{2m} \frac{1}{2} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - \tilde{E}_{0m3} \kappa_3 (\gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2 + \gamma_3 \kappa_3). \\ F_{2m} &= f_{2m} R_{21}^{-4}. \end{aligned}$$

$$v_{km}^2 q_{km} + \chi v_{km}^2 \dot{q}_{km} = 0, \quad k \geq 3.$$

$$v_{km}^2 p_{km} + \chi v_{km}^2 \dot{p}_{km} = 0, \quad k \geq 3.$$

Заметим, что гравитация Луны и Солнца вызывает вынужденные приливные колебания лишь на формах с индексами $k0, k1, k2$, так как в уравнениях с $k \geq 3$ справа стоит 0, то есть вынужденных колебаний не будет, и присутствует вязкое трение, то есть свободные колебания должны затухнуть (что соответствует случаю квазистатики).

Кроме того, известно, что уравнения вида

$$v_{km}^2 p + \chi b v_{km}^2 \dot{p} = F_{km}$$

имеет решение

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi)^n \frac{\partial^n p_0}{\partial t^n},$$

где p_0 - решение уравнения $v_{km}^2 p_0 = F_{km}$, то есть $p_0 = v_{km}^{-2} F_{km}$, ∂ - n -я частная производная по t , F_{km} - правая часть уравнения. В нашем случае справа будут тригонометрические ряды с почти постоянными частотами. Тогда и приближенные решения n -го порядка будут отличаться лишь амплитудой и сдвигом фазы от решения 0-го порядка, то будем искать лишь решение 0 порядка, то есть $p = p_0$.

Частоты приливов

Для дальнейших вычислений примем угол ψ – угол прецессии оси вращения Земли равным нулю, так как он меняется медленно и на значение частоты влиять не будет. Также сперва положим эксцентриситеты Луны и барицентра системы Земля –

Луна равными нулю. Тогда получим следующие комбинации углов, при разложении смещения на отдельные гармоники:

- для уравнения с индексами $0j$:

$$v_1 - \omega_1 + i_1, v_1 + \omega_1 + i_1$$

$$-i_1 - 2v_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, i_1 + 2v_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, i_1 - 2v_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1,$$

То есть, считая углы изменяющиеся равномерно, а значит равными произведению частоты на время получаем, что колебания на форме V_{0j} происходят примерно с месячной частотой, а на форме W_{0j} с частотой примерно половину месяца, а также с частотой наклона орбиты Луны.

Если взять более малые члены (порядка эксцентриситета Луны), то по форме W_{0j} добавятся комбинации:

$$-i_1 - 3v_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, -i_1 - v_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1,$$

$$-i_1 + 3v_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, 2i_1 - 3v_1 - 2\omega_1, -v_1 - 2\omega_1,$$

$$2i_1 + 3v_1 + 2\omega_1, +i_1 + v_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, 2i_1 + v_1 + 2\omega_1,$$

$$3v_1 + 2\omega_1, 2i_1 - v_1, v_1 + 2\omega_1, 2i_1 + v_1, v_1.$$

$$-i_1 - 3v_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, -i_1 - v_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1,$$

$$-i_1 + 3v_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, -i_1 + v_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1.$$

Периоды гармоник с указанными углами близки либо к месяцу, либо к одной трети месяца.

Далее имеем для первого уравнения с индексами $1j$:

$$\begin{aligned}
& \varphi + i_1 - v_1 - \omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi - i_1 + v_1 + \omega_1 + \Omega_1, \\
& \varphi + i_1 + v_1 + \omega_1 + \Omega_1, \quad -\varphi - v_1 - \omega_1 + \Omega_1, \\
& -\varphi + v_1 + \omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi - i_1 - v_1 - \omega_1 + \Omega_1, \\
& \varphi + 2i_1 + \Omega_1, \quad \varphi - 2i_1 + \Omega_1, \quad -2i_1 - 2v_1 - 2\omega_1 + \Omega_1; \\
& -\varphi + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1 - i_1, \quad -\varphi + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1 + i_1, \\
& \varphi + 2i_1 + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1, \quad -\varphi - 2v_1 - 2\omega_1 + \Omega_1 + i_1; \\
& -\varphi - 2v_1 + \Omega_1 - i_1, \quad \varphi - 2i_1 + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi + 2i_1 - 2v_1 - 2\omega_1 + \Omega_1;
\end{aligned}$$

Периоды гармоник с указанными углами близки к суткам.

Для второго уравнения с индексами lj углы следующие:

$$\begin{aligned}
& -\varphi - 2v_1 - 2\omega_1 + \Omega_1 - i_1, \quad -\varphi + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1 - i_1, \\
& -\varphi - 2v_1 - 2\omega_1 + \Omega_1 + i_1, \quad -\varphi + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1 + i_1; \\
& \varphi - 2i_1 - 2v_1 - 2\omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi - 2i_1 + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1, \\
& \varphi - i_1 - v_1 - \omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi + 2i_1 - 2v_1 - 2\omega_1 + \Omega_1; \\
& \varphi + 2i_1 + 2v_1 + 2\omega_1 + \Omega_1, \quad -\varphi - v_1 - \omega_1 + \Omega_1, \\
& \varphi + i_1 - v_1 - \omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi - i_1 + v_1 + \omega_1 + \Omega_1; \\
& -\varphi + v_1 + \omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi + i_1 + v_1 + \omega_1 + \Omega_1, \quad \varphi - 2i_1 + \Omega_1, \\
& -\varphi + v, \quad \varphi + v_1 - \varphi + v_1, \quad \varphi v_1;
\end{aligned}$$

Периоды гармоник с указанными углами также близки к суткам.

Аналогично для формы V_{2j} :

$$\begin{aligned}
 & -2\varphi - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi - 2i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, \\
 & 2\varphi + 2\nu_1 + 2\omega_1 + i_1, \quad \varphi - 2i_1 + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, \\
 & 2\varphi + 2i_1 + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1; \\
 & 2\varphi + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi - 2i_1 + 2\Omega_1, \\
 & 2\varphi + 2i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi + 2\Omega_1; \\
 & 2\varphi - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi + i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1, \\
 & 2\varphi + 2i_1 + 2\Omega_1, \quad -2\varphi + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad -2\varphi + i_1 + 2\nu_1 + 2\omega_1; \\
 & -2\varphi + 2\Omega_1, \quad -2\varphi + i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1;
 \end{aligned}$$

Указанные комбинации имеют частоты близкие к полусуточным, и есть частота близкая к суткам.

Для формы W_{2j} :

$$\begin{aligned}
 & -2\varphi + 2\Omega_1, \quad 2\varphi + 2\Omega_1, \\
 & 2\varphi - 2i_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi + 2i_1 + 2\Omega_1, \\
 & -2\varphi + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1; \\
 & 2\varphi + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad -2\varphi - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1; \\
 & 2\varphi + 2i_1 + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi - 2i_1 + 2\nu_1 + 2\omega_1 + 2\Omega_1, \\
 & 2\varphi - 2i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1;
 \end{aligned}$$

$$2\varphi + 2i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1 + 2\Omega_1, \quad 2\varphi + 2\nu_1 + 2\omega_1 + i_1,$$

$$-2\varphi + i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1, \quad 2\varphi + i_1 - 2\nu_1 - 2\omega_1, \quad -2\varphi + i_1 + 2\nu_1 + 2\omega_1.$$

Здесь ситуация аналогичная форме V_{2j} .

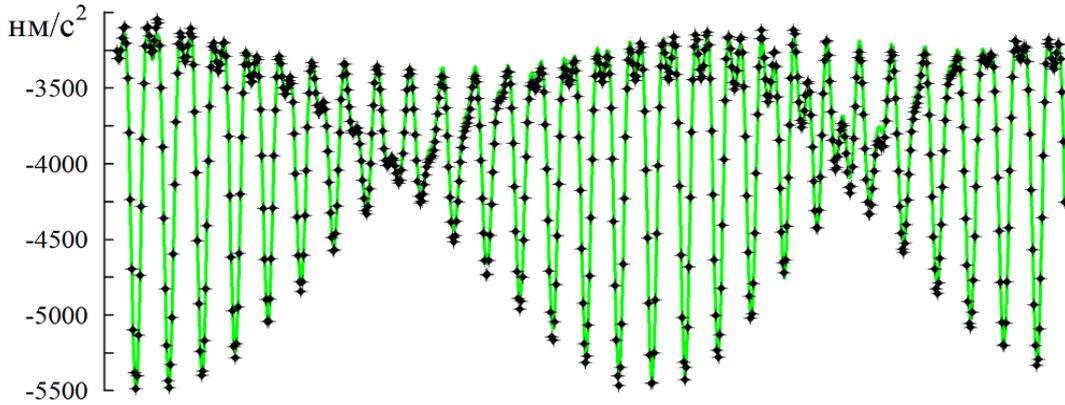


Рис. 1 Колебания ускорения силы тяжести по данным измерений на SG-гравиметров г. Мембах (Бельгия) (дискретные точки) в сравнении с колебаниями по модели твердотельных приливов с найденными частотами. Амплитуды и фазы приливных колебаний определены с помощью метода наименьших квадратов.

Если известен вектор перемещений, можно получить выражение для вариаций вектора ускорения свободного падения \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = -\nabla \int_{\Omega} \frac{f \rho dx}{[(O^{-1}\mathbf{R}_3 + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} \approx -\int_{\Omega} \frac{(O^{-1}\mathbf{R}_3 + \mathbf{r}) f \rho dx}{[(O^{-1}\mathbf{R}_3 + \mathbf{r})^2]^{1/2}} - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u} f \rho dx}{[(O^{-1}\mathbf{R}_3 + \mathbf{r})^2]^{3/2}} + 3 \int_{\Omega} \frac{(O^{-1}\mathbf{R}_3 + \mathbf{r})([O^{-1}\mathbf{R}_3 + \mathbf{r}]\mathbf{u}) f \rho dx}{[(O^{-1}\mathbf{R}_3 + \mathbf{r})^2]^{5/2}} \quad (8)$$

Первое слагаемое в (8) соответствует ускорению свободного падения от поля недеформированной Земли, а два других описывают вариации ускорения вследствие деформаций. Подстановка в (8) выражения для u позволяет получить выражение для g как функцию времени.

На рис. 1 приводятся результаты аппроксимации наблюдений вариаций ускорения силы тяжести [22] в г. Мембах с помощью разработанной приливной модели.

Выводы

В задаче о приливах деформируемой Земли под действием сил притяжения Луны и Солнца получены приближенные выражения для приливных частот. На основе уравнений установившихся квазистационарных колебаний Земли показано, что колебания будут происходить только на формах с индексами 0, 1, 2. Для этих форм приближенно определены частоты вынужденных приливных колебаний деформируемого слоя мантии Земли.

Список источников

1. International Earth Rotation and Reference Systems Service. IERS Annual Reports.
URL: <http://www.iers.org>
2. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. - М.: Мир, 1964. - 384 с.

3. Мьо Зо Аунг. О влиянии полюсного прилива на установившееся движение земного полюса // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=121109>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-16](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-16)
4. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакшев С.А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Доклады РАН. 2014. Т. 458. № 5. С. 547-550.
5. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 153-160. DOI: [10.1134/S0572329919050039](https://doi.org/10.1134/S0572329919050039)
6. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale // Geodesy and Geodynamics, 2016, no. 7. DOI: [10.1016/j.geog.2016.05.005](https://doi.org/10.1016/j.geog.2016.05.005)
7. Сидоренков Н.С. Физика неустойчивостей вращения Земли. - М.: Наука, 2002. - 376 с.
8. Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Сепарация и спектральный анализ колебаний полюса земли // Доклады РАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 288-292. DOI: [10.7868/S0869565215270092](https://doi.org/10.7868/S0869565215270092)
9. Schubert G. Treatise on Geophysics, 2007, Amsterdam, Elsevier. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01003376643>

10. Марков Ю.Г., Миняев И.С. О влиянии внутренних степеней свободы на движение осесимметричного упругого тела вокруг центра масс // Известия РАН. Механика твердого тела. 1991. № 1. С. 12–18.
11. Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Почукаев В.Н., Перепелкин В.В., Рожков С.Н., Семёнов А.С. Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит КА // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 2. С. 164-172.
12. Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Ларьков И.И., Рожков С.Н., Крылов С.С., Перепёлкин В.В., Почукаев В.Н., Филиппова А.С. Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в задачах спутниковой навигации // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 2. С. 146-157.
13. Ву Виет Чунг. Прогноз возмущенного движения полюса Земли на коротком интервале времени // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=43147>
14. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Динамический анализ возмущенного чандлеровского колебания земного полюса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 6. С. 4-12. DOI: [10.31857/S057232990002536-9](https://doi.org/10.31857/S057232990002536-9)
15. Перепёлкин В.В. Моделирование и анализ вращательно-колебательных движений деформируемой Земли // Труды МАИ. 2007. № 26. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34044>

16. Перепелкин В.В. Модель движения земного полюса с учетом лунно-солнечных возмущений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 118-123. DOI: [10.1134/S0572329919030127](https://doi.org/10.1134/S0572329919030127)
17. Вэй Ян Сое. Уточненная малопараметрическая модель движения земного полюса // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=121106>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-15](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-15)
18. Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations // Journal of Physics: Conference Series, 2019, vol. 1301, issue 1. DOI: [10.1088/1742-6596/1301/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1301/1/012005)
19. Ву Виет Чунг. Оценка влияния параметров вращения Земли в задаче координатно-временного обеспечения навигационных спутников // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43104>
20. Скоробогатых И.В., До Чунг Бо. О влиянии упругих деформаций на поступательно-вращательное движение тела в центральном гравитационном поле сил // Космонавтика и ракетостроение. 2015. № 1 (80). С. 106-113.
21. Вильке В.Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. - М.: Изд-во МГУ, 1986. - 192 с.
22. Hu X.-G., Liu L.-T., Ducarme B., Xu H.J., Sun H.P. Estimation of the pole tide gravimetric factor at the Chandler period through wavelet filtering // Geophysical Journal International, 2007, vol. 169 (3), pp. 821–829. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x)

References

1. *International Earth Rotation and Reference Systems Service*. IERS Annual Reports. URL: <http://www.iers.org>
2. Mank U., Makdonal'd G. *Vrashchenie Zemli* (Rotation of the Earth), Moscow, Mir, 1964, 384 p.
3. M'o Zo Aung. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121109>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-16](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-16)
4. Akulenko L.D., Klimov D.M., Kumakshev S.A. *Doklady RAN*, 2014, vol. 458, no. 5, pp. 547-550.
5. Akulenko L.D., Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2019, no. 5, pp. 153-160. DOI: [10.1134/S0572329919050039](https://doi.org/10.1134/S0572329919050039)
6. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale, *Geodesy and Geodynamics*, 2016, no. 7. DOI: [10.1016/j.geog.2016.05.005](https://doi.org/10.1016/j.geog.2016.05.005)
7. Sidorenkov N.S. *Fizika nestabil'nostei vrashcheniya Zemli* (Physics of instability of the earth's rotation), Moscow, Nauka, 2002, 376 p.
8. Klimov D.M., Akulenko L.D., Shmatkov A.M. *Doklady RAN*, 2015, vol. 464, no. 3, pp. 288-292. DOI: [10.7868/S0869565215270092](https://doi.org/10.7868/S0869565215270092)
9. Schubert G. *Treatise on Geophysics*, 2007, Amsterdam, Elsevier. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01003376643>

10. Markov Yu.G., Minyaev I.S. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 1991, no. 1, C. 12–18.
11. Markov Yu.G., Mikhailov M.V., Pochukaev V.N., Perepelkin V.V., Rozhkov S.N., Semenov A.S. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2016, vol. 54, no. 2, pp. 164-172.
12. Markov Yu.G., Mikhailov M.V., Lar'kov I.I., Rozhkov S.N., Krylov S.S., Perepelkin V.V., Pochukaev V.N., Filippova A.S. *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 146-157.
13. Vu Viet Chung. *Trudy MAI*. 2013. № 69. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43147>
14. Akulenko L.D., Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2018, no. 6, pp. 4-12. DOI: [10.31857/S057232990002536-9](https://doi.org/10.31857/S057232990002536-9)
15. Perepelkin V.V. *Trudy MAI*, 2007, no. 26. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34044>
16. Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2019, no. 3, pp. 118-123. DOI: [10.1134/S0572329919030127](https://doi.org/10.1134/S0572329919030127)
17. Vei Yan Soe. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121106>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-15](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-15)
18. Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1301, issue 1. DOI: [10.1088/1742-6596/1301/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1301/1/012005)

19. Vu Viet Chung. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43104>
20. Skorobogatykh I.V., Do Chung Bo. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2015, no. 1 (80), pp. 106-113.
21. Vil'ke V.G. *Analiticheskie i kachestvennye metody mekhaniki sistem s beskonechnym chislom stepeni svobody* (Analytical and qualitative methods of systems mechanics with infinite number of degrees of freedom), Moscow, Izd-vo MGU, 1986, 192 p.
22. Hu X.-G., Liu L.-T., Ducarme B., Xu H.J., Sun H.P. Estimation of the pole tide gravimetric factor at the Chandler period through wavelet filtering, *Geophysical Journal International*, 2007, vol. 169 (3), pp. 821–829. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x)

Статья поступила в редакцию 13.11.2023

Одобрена после рецензирования 01.12.2023

Принята к публикации 25.12.2023

The article was submitted on 13.11.2023; approved after reviewing on 01.12.2023; accepted for publication on 25.12.2023