

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 691.4

DOI: [10.34759/trd-2021-120-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-07)

### **Топологическая оптимизация подкрепленных панелей, нагруженных сосредоточенными силами**

**Чжо Йе Ко<sup>1✉</sup>, Соляев Юрий Олегович<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>1</sup>[kyawyeko23@gmail.com](mailto:kyawyeko23@gmail.com)✉

<sup>2</sup>[yos@iam.ras.ru](mailto:yos@iam.ras.ru)

**Аннотация.** Предложена методика топологической оптимизации геометрии подкрепляющих элементов плоских панелей, нагруженных сосредоточенными силами. Методика основана на численном решении задачи о деформациях панели переменной толщины. Параметром оптимизации является толщина панели, задаваемая через фиктивную функцию плотности. Целевой минимизируемой функцией является полная энергия деформаций панели. В результате решения задачи оптимизации определяется расположение ребер жесткости, которые обеспечивают при собственной минимальной массе максимальное повышение жесткости конструкции. Достоинствами предлагаемой методики по сравнению со стандартными подходами топологической оптимизации являются сниженные требования к вычислительным ресурсам и возможность получения геометрии ребер жесткости,

которая может быть изготовлена, например, фрезерованием. В работе исследована эффективность применяемого подхода в сравнении с вариантами регулярного оребрения панелей. Показано, что для некоторых вариантов нагружения массовая эффективность оптимизированных конструкций может быть более чем в 2-5 раз выше в сравнении наилучшими вариантами регулярного оребрения. Рассмотрены варианты применения в численных расчетах, как классической теории пластин, так и уточненной теории с учетом трансверсального сдвига. Установлено, что в рассматриваемых задачах оптимизации с условием минимизации полной энергии деформаций более эффективным является применение классической теории.

**Ключевые слова:** подкрепленные панели, топологическая оптимизация, сосредоточенные нагрузки, ребра жесткости, регулярное оребрение

**Финансирование:** работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код проекта FSFF-2020-0017).

**Для цитирования:** Чжо Йе Ко, Соляев Ю.О. Топологическая оптимизация подкрепленных панелей, нагруженных сосредоточенными силами // Труды МАИ. 2021. № 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-07)

## MECHANICS

Original article

### **Topological optimization of reinforced panels loaded with concentrated forces**

**Kyaw Ye Ko<sup>1</sup>, Solyaev Yuri.O.<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

<sup>2</sup>Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>1</sup>[kyawyeko23@gmail.com](mailto:kyawyeko23@gmail.com)<sup>✉</sup>

<sup>2</sup>[yos@iam.ras.ru](mailto:yos@iam.ras.ru)

**Abstract.** A method of topological optimization of geometry of reinforcing panels loaded with concentrated forces is proposed. The proposed method is based on the numerical solution of the deformation problem of a panel of variable thickness. The optimization parameter is the thickness of the panel defined by a fictitious density function. The objective minimized function is the total energy of deformation of the panel. As a result of solving the optimization problem, an arrangement of stiffening ribs is determined which provide, at their own minimum mass, a maximum increase in the stiffness of the structure. The advantages of the proposed method, as compared with the standard topological optimization approaches, are the reduced requirements to the computational resources and the possibility to obtain the geometry of the stiffening ribs, which can be manufactured, for example, by milling. The paper investigates the effectiveness of the approach used in comparison with variants of regular finning of panels. It is shown that for some loading variants mass efficiency of optimized structures can be more than 2-5 times higher in comparison with the best variants of regular finning. Application options for numerical calculations of both classical plate theory and revised theory taking into account the transversal shear are considered. It is established that in the considered optimization problems with the condition of minimization of total energy of deformations application of classical theory is more effective.

**Keywords:** reinforced panels, topological optimization, concentrated loads, stiffening ribs, regular fins

**Funding:** this work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project code - FSFF-2020-0017).

**For citation:** Kyaw Ye Ko, Solyaev Yu.O. Topological optimization of reinforced panels loaded with concentrated forces. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-07)

## 1. Введение

Методы топологической оптимизации (ТО) конструкций начали развиваться с конца 1980х годов, когда были предложены подходы по поиску оптимального распределения «пористости» в задачах механики деформируемого твердого тела [1-2]. Первоначально, эти методы были основаны на решении задач осреднения для определения эффективных свойств материала, содержащего включения в виде пустот (пор). Позднее, для совершенствования, стабилизации и ускорения расчетов были предложены более простые подходы, в которых вводилась фиктивная переменная плотности, определяющая изменение упругих характеристик материала от максимального значения, соответствующего зоне твердой фазы, до значения близкого к нулю, соответствующего пустотам [3-6].

Стандартной задачей топологической оптимизации является поиск наилучшего распределения ограниченного объема материала в заданном объеме конструкции для получения наиболее высокой жесткости. Такая постановка задачи, фактически,

определяется требованием минимизации полной энергии деформаций (или работы внешних сил) при заданном ограничении на значение средней плотности. В настоящее время, методы топологической оптимизации реализованы в самых разнообразных разделах механики и физики сплошных сред, включающих задачи механики конструкций [7-9], термомеханики [10-12], аэроупругости [13-15] и т.д.

В настоящей работе рассматривается задача оптимизации геометрии плоских панелей, подкрепленных ребрами жесткости и нагруженных сосредоточенными силами. Классические методы оптимального проектирования (параметрической оптимизации) для такого рода конструкций хорошо известны [16-18], а недавно предложенные новые проектировочные подходы направлены на учет специфических случаев нагружения или уточненное описание деформированного состояния панелей и т.п. [19-21]. Рассматриваемый случай нагрузок в виде сосредоточенных сил является тестовым, и он выбран как наиболее простой и наглядный для оценки эффективности получаемых решений.

Предлагаемый в настоящей работе подход основан на реализации метода топологической оптимизации в рамках решения задачи о пластине переменной толщины. Таким образом, вместо стандартного подхода, при котором функция фиктивной плотности используется для задания локальных значений модуля упругости материала в трехмерной модели изделия, в предлагаемом подходе через функцию плотности определяется локальное значение толщины панели, моделируемой в виде деформируемой поверхности. Аналогичный подход к оптимизации подкрепленных конструкций, но с использованием переменной

изгибной жесткости, рассматривался ранее в работе [22]. В результате решения задачи топологической оптимизации, то есть в результате многократного численного решения задачи для заданных условий нагружения с поиском оптимального распределения материала, алгоритм ТО определяет зоны, в которых толщина панели должна быть увеличена (зоны расположения ребер жесткости) и зоны, в которых толщина может быть оставлена минимальной (то есть зоны расположения неподкрепленной обшивки). Дополнительной особенностью расчетов является тот факт, что рассматриваются тонкостенные конструкции и оставляемый объем материала достаточно мал – не более 5%, что является достаточно жестким требованием и накладывает ограничения на максимальный размер конечно-элементной (КЭ) сетки.

В работе представлены оценки по эффективности рассматриваемой методики ТО в сравнении с аналогичными решениями, полученными параметрической оптимизацией для панелей с регулярным оребрением. Проведено сопоставление результатов применения различных моделей пластин. Исследована эффективность предложенной методики оптимизации, в том числе, путем использования результатов ТО для проектирования трехмерной геометрии панелей.

## **2. Формулировка задачи оптимизации**

Рассматриваем пластину переменной толщины, которая занимает область  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  и угловыми точками  $\partial\partial\Omega$ . Опираение (запрет прогибов) пластины задается в угловых точках  $\partial\partial\Omega$ , а действующие нагрузки – это система сосредоточенных усилий, приложенных на поверхности пластины  $\Omega$ . Предлагаемая

формулировка задачи ТО для поиска оптимального расположения ребер жесткости пластины, может быть представлена в следующем виде:

$$\min: U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (N_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + M_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + V_{\alpha} \gamma_{\alpha}) ds \quad (1)$$

$$s. t.: \bar{\rho} = \frac{\int_{\Omega} \rho ds}{\int_{\Omega} ds} \leq \bar{\rho}_{max}, \quad (2)$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad (3)$$

$$N_{\alpha\beta,\alpha} = 0, \quad M_{\alpha\beta,\beta} - V_{\alpha} = 0, \quad V_{\alpha,\alpha} + q = 0, \quad x_{\alpha} \in \Omega \quad (4)$$

$$N_{\alpha\beta} n_{\alpha} = 0, \quad M_{\alpha\beta} n_{\beta} = 0, \quad V_{\alpha} n_{\alpha} = 0, \quad x_{\alpha} \in \partial\Omega \quad (5)$$

$$w = 0, \quad x_{\alpha} \in \partial\partial\Omega, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & B_{11} & B_{12} & B_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & B_{21} & B_{22} & B_{24} \\ A_{14} & A_{24} & A_{44} & B_{41} & B_{42} & B_{44} \\ B_{11} & B_{12} & B_{14} & D_{11} & D_{12} & D_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{24} & D_{12} & D_{22} & D_{24} \\ B_{41} & B_{42} & B_{44} & D_{14} & D_{24} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{55} & S_{56} \\ S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A_{ij} = I_{ij}^{(0)}, \quad B_{ij} = I_{ij}^{(1)} - e I_{ij}^{(0)}, \quad D_{ij} = I_{ij}^{(2)} - e I_{ij}^{(1)} + e^2 I_{ij}^{(0)}, \quad S_{ij} = \frac{(h(\rho))^2 J_{ij}}{J_{55} J_{66} - J_{56}^2} \quad (8)$$

$$I_{ij}^{(k)} = \int_0^{h(\rho)} C_{ij} z^k dz, \quad (k = 0,1,2), \quad J_{ij} = \int_0^{h(\rho)} \frac{C_{ij}}{C_{55} C_{66} - C_{56}^2} dz$$

$$h(\rho) = h_0 + h_{max} \rho \quad (9)$$

где “min” означает, что проводится минимизация целевой функции – полной энергии деформаций пластины  $U$ ; “s.t.” (subject to, «при условии») – перечень условий, при которых ищется минимум целевой функции,  $\rho(x_{\alpha})$  – функция фиктивной плотности (переменная задачи оптимизации),  $\bar{\rho}_{max}$  – ограничение на значение средней плотности  $\bar{\rho}$ ;  $x_{\alpha}$  – координаты точек в рассматриваемой области (все индексы изменяются от 1 до 2);  $N_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\alpha\beta}$ ,  $V_{\alpha}$  – погонные продольные усилия, изгибающие моменты и перерезывающие усилия, действующие в пластине, соответственно;

$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2$ ,  $\kappa_{\alpha\beta} = (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha})/2$ ,  $\gamma_\alpha = \theta_\alpha + w_{,\alpha}$  – деформации нейтральной (отсчетной) плоскости, кривизны и углы сдвига, соответственно;  $u_\alpha$  – перемещения в плоскости пластины;  $\theta_\alpha$  – углы поворота нормалей;  $w$  – прогибы пластины;  $q$  – нагрузка на поверхности пластины;  $n_\alpha$  – компоненты внешней единичной нормали к границе пластины  $\partial\Omega$ ;  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $S_{ij}$  – мембранные, смешанные, изгибные и сдвиговые коэффициенты жесткости пластины, которые рассчитываются через вспомогательные коэффициенты  $I_{ij}^{(k)}$ ,  $J_{ij}$ , вычисляемые с учетом зависимости толщины пластины от фиктивной функции плотности  $h(\rho)$  (9);  $C_{ij}$  – компоненты тензора модулей упругости (в нотации Фойгта) для материала пластины;  $z$  – координата в направлении толщины пластины, отсчитываемая от ее нижней поверхности; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; запятой в индексах обозначена производная по соответствующим координатам.

Постановка задачи (1)-(9) предполагает поиск оптимального распределения функции плотности  $\rho$  в заданной области  $\Omega$ , такое что, полная энергия деформаций пластины  $U$  при заданных нагрузках и условиях закрепления будет минимальной, а среднее значение плотности  $\bar{\rho}$  (то есть доля объема, занятого материалом) не превышает заданное максимальное значение  $\bar{\rho}_{max}$  (2). Перемещения и напряженно-деформированное состояние пластины в области  $\Omega$  определяются на основе решения уравнений равновесия пластины (4) с учетом статических и кинематических граничных условий (5), (6) и физических соотношений (7), (8). Приведенные соотношения модели (4)-(8) соответствуют теории пластин, учитывающей податливость на сдвиг [23] (теория пластин типа Миндлина-Рейсснера).



Классическая формулировка теории пластин Кирхгоффа, которая также будет использована в задачах ТО, следует из представленной формулировки (4)-(8) в предположении, что в пластине отсутствуют трансверсальные сдвиги  $\gamma_\alpha$ , а сдвиговые коэффициенты жесткости  $S_{ij}$  стремятся к бесконечности.

Основной особенностью записанной постановки задачи (1)-(9) является использование функции фиктивной плотности  $\rho$  для задания локального значения толщины панели (9). Такое определение толщины подкрепленной пластины в задаче ТО является достаточно естественным, так как использование обычного подхода с зависимостью модуля упругости от  $\rho$  предполагало бы полное удаление материала пластины из зон с минимальными значениями функции плотности. В рассматриваемом же случае мы получаем изменение толщины панели от минимального значения  $h_0$ , которое соответствует толщине лицевой обшивки панели, до максимальной толщины  $(h_0 + h_{\max})$ , причем  $h_{\max}$  определяет максимально допустимую высоту подкрепляющих элементов и может быть задана из конструктивных соображений.

Рассматриваемые задачи являются тестовыми и направлены на оценку эффективности предлагаемой методики ТО. Задавая условия закрепления только по углам панели и сосредоточенные усилия в точках на ее поверхности, получаем очевидную необходимость связи всех этих точек ребрами жесткости, возникающими в процессе ТО. Алгоритм ТО должен найти оптимальные пути, вдоль которых располагаются подкрепляющие элементы и обеспечивают наиболее высокую жесткость при минимальной массе панели. При этом условие по минимизации полной

энергии деформаций (1) может быть заменено на эквивалентное требование минимизации смещений в точках приложения нагрузки (то есть минимальной работы внешних сил).

Построение решения задачи (1)-(9) проводилось в системе Comsol с использованием метода конечных элементов в геометрически линейной формулировке и в предположении малых прогибов. Для решения задачи о деформациях пластины использовался стандартный интерфейс Shell в сочетании с моделью слоистого материала Layered Linear Elastic Material. Условия задачи оптимизации задавались через интерфейс Optimization, а ее решение находилось с использованием метода двужущихся асимптот (ММА, Method of Moving Asymptotes). Единственность получаемого решения и, в принципе, возможность определения глобального минимум в задачах ТО, вообще говоря не может быть доказана для достаточно сложных вариантов конструкций и сложных случаев нагружения. Получаемое решение может зависеть от конечно-элементной сетки, от начального распределения функции плотности, от настроек КЭ решателя и метода ТО. Тем не менее, для относительно простых задач получаемые решения оказываются достаточно стабильными вне зависимости от указанных параметров и вне зависимости от применяемого решателя.

В приводимых далее примерах всегда будем рассматривать панели квадратной формы. Для оценки эффективности алгоритма ТО будем сопоставлять результаты расчетов с результатами параметрической оптимизации (ПО) для стандартных вариантов оребрения панели. В качестве таких стандартных вариантов будем

рассматривать панели, с ребрами жесткости, которые располагаются под углами +45 и -45 градусов по отношению к граням пластины. Такая структура ребер жесткости обеспечивает связанность угловых точек квадратной панели и максимальное повышение жесткости в рассматриваемых задачах (среди панелей с регулярным опребрением). Наилучшая конфигурация таких тестовых панелей определялась по результатам ПО, в которой управляющими параметрами были количество и геометрические размеры ребер жесткости (толщина, высота), целевой функцией в задаче ПО, также как и в ТО, являлась полная энергия деформаций панелей, а ограничения ставились на максимально допустимые объем ребер жесткости. Решение задачи ПО строилось также в Comsol. В этом решении и обшивка, и ребра жесткости моделировались в виде пластин. Оптимальная геометрия находилась перебором различных значений параметров в заданных диапазонах. В частности, для панели с толщиной обшивки 1 мм и с размерами в плоскости 300x300 мм рассматривалась высота ребер жесткости 5-29 мм, толщина 1-10 мм и количество ребер жесткости 1-15.

### **3. Результаты расчетов и оценка эффективности топологической оптимизации**

Рассматриваем четыре варианта условий нагружения квадратной пластины, представленные на рис. 1. Во всех расчетах считаем, что пластина имеет размер грани  $d = 300$  мм ( $x \in [-d/2, d/2]$ ,  $y \in [-d/2, d/2]$ ), и толщину обшивки  $h_0 = 1$  мм. Материал пластины изотропный с модулем упругости  $E = 2$  ГПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.3$  (пластик). Все коэффициенты жесткости материала  $C_{ij}$  вычисляются на основе стандартных соотношений для упругих материалов. В варианте 1 рассматривается

наиболее простая задача с усилием, приложенным по центру пластины  $x = 0, y = 0$  (рис. 1а). В варианте 2 рассматриваем нагружение смещенным усилием, приложенным в точке  $x = d/4, y = 0$  (рис. 1б). В варианте 3 пластина нагружена двумя симметрично расположенными усилиями, приложенными в точках  $x = \pm d/4, y = 0$  (рис. 1в). В варианте 4 пластина нагружается пятью симметрично расположенными усилиями, приложенными в точках  $x = \pm d/4, y = \pm d/4$  и в точке  $x = 0, y = 0$  (рис. 1г). Выбранные варианты задач допускают построение решения с учетом симметрии, однако такие решения не строились для исследования стабильности получаемых решений (для оценки повторяемости решения задачи ТО в симметрично расположенных областях модели).

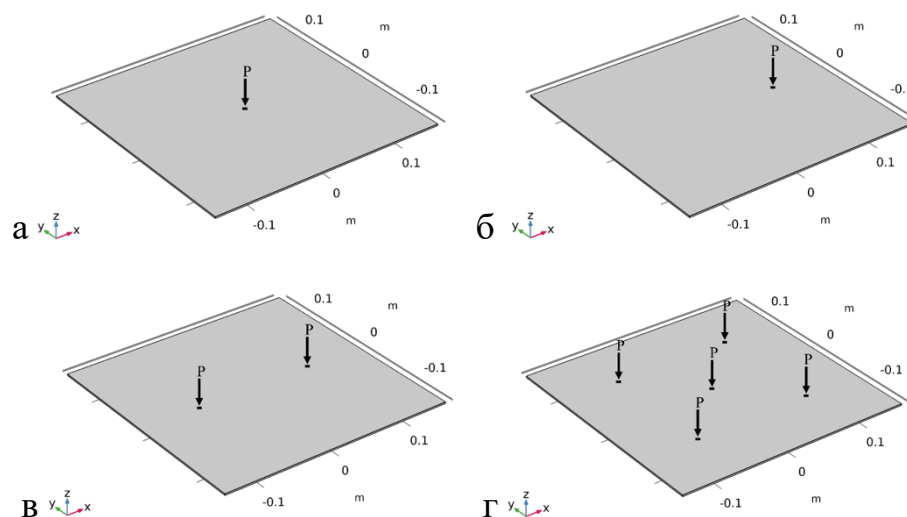


Рис. 1. Рассмотренные варианты нагружения панелей, в задачах топологической и параметрической оптимизации

В расчетах задавалось значение приложенных усилий  $P = 10$  Н. Максимальная допустимая высота ребер жесткости составляет  $h_{\max} = 30$  мм. Ограничение на объем материала определяется значением средней плотности  $\bar{\rho}_{\max} = 0.05$  (то есть оставляем 5% от максимально возможного объема, равного  $d^2 h_{\max}$ ). В качестве начального приближения для функции плотности задавалось постоянное значение  $\bar{\rho} = 0.5$ .

В численном моделировании использовались треугольные элементы с аппроксимацией второго порядка. Характерный размер граней элементов составлял 1 мм. Общее количество элементов в пластине составляло  $\sim 10^5$ , при этом количество степеней свободы с учетом квадратичной аппроксимации и дополнительных переменных задачи оптимизации составляло до  $\sim 2 \cdot 10^6$ .

Пример сходимости результатов ТО представлен на рис. 2. Здесь показано, как изменяются вычисляемые алгоритмом ТО нормированные значения целевой функции (полной энергии деформаций панели) и массы панели в процессе итераций расчета. Пример приведен для варианта нагружения 1. Нормирование представленных на рисунке 1 величин выполнено относительно соответствующих значений, вычисленных на первой итерации расчетов. Видно, что в течение первых  $\sim 10$  итераций алгоритм ТО быстро уменьшает оставляемый объем материала, вследствие чего резко возрастает энергия деформаций панели (повышаются прогибы) и снижается ее масса. Однако далее, происходит такое же резкое снижение энергии деформаций панели, и в этот момент алгоритм выбирает ориентировочное оптимальное расположение ребер жесткости. Далее функция цели начинает медленно

снижаться, а масса – повышаться. В течение последующих 50-80 итераций алгоритм постепенно добавляет необходимый объем ребер жесткости для получения оптимальной геометрии.

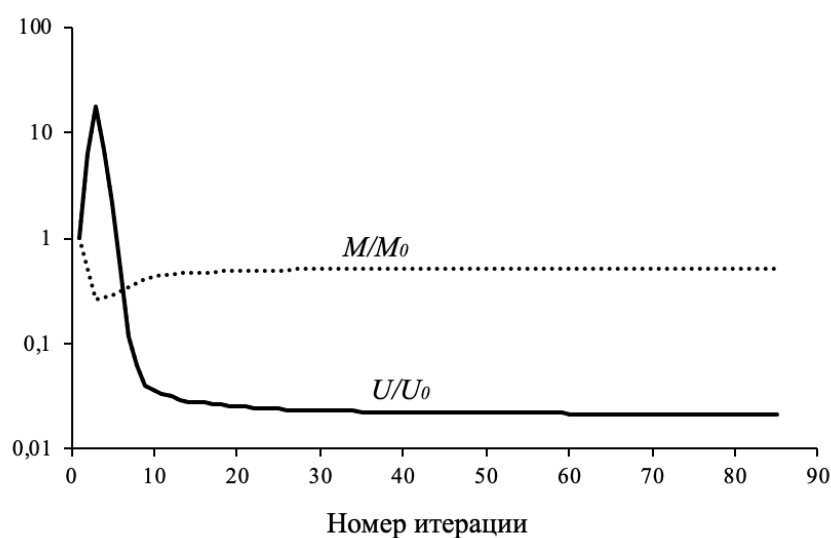


Рис. 2. Пример сходимости результатов топологической оптимизации.

Показана зависимость нормированных значений целевой функции ( $U$ ) и массы панели ( $M$ ) от номера итерации расчета.

Из рис. 2 видно, что алгоритм ТО для рассматриваемой задачи сходится, приблизительно, на 50-ой итерации расчетов. Остановка расчетов в автоматическом режиме с критерием по изменению целевой функции не более чем на 0.1% от итерации к итерации происходит на ~85 итерации. В дальнейших расчетах использовался именно этот критерий остановки ТО. Время решения задачи ТО на стандартном ПК с объемом оперативной памяти 32 Гб для одного случая нагружения составляло ~4 часов для классической теории пластин и ~5 часов для теории Миндлина-Рейсснера (МР). По результатам сопоставления получаемых решений было установлено, что применение теории МР оказывается неэффективным в

рассматриваемых задачах оптимизации. Пример такого сопоставления показан на рис. 3. На этом рисунке показана найденная геометрия ребер жесткости и прогибы панелей, нагруженных 1 и 5 силами. Здесь видно, что, во-первых, получаемая геометрия значительно зависит от варианта применяемой теории, а во-вторых, что прогибы в решении, построенном в рамках теории МР, оказываются значительно больше, по сравнению с решением по классической теории. Этот эффект может показаться естественным, так как в теории МР учитывается податливость на сдвиг. Однако, только влиянием сдвигов получаемое различие решений объяснить не удастся. Как будет показано далее, при определении прогибов в рассматриваемых задачах классическая теория дает не очень большие погрешности, а учет сдвигов может давать поправки несколько процентов. Поэтому, фактически, следует считать, что применение теории МР в рассматриваемых задачах топологической оптимизации является неэффективным. Определяемая геометрия оказывается очевидно не оптимальной (см., например, рис. 3б), что скорее всего определяется тем, что модели типа Миндлина-Рейсснера содержат дополнительные кинематические переменные и приводят к усложнению поиска оптимальной геометрии панелей.

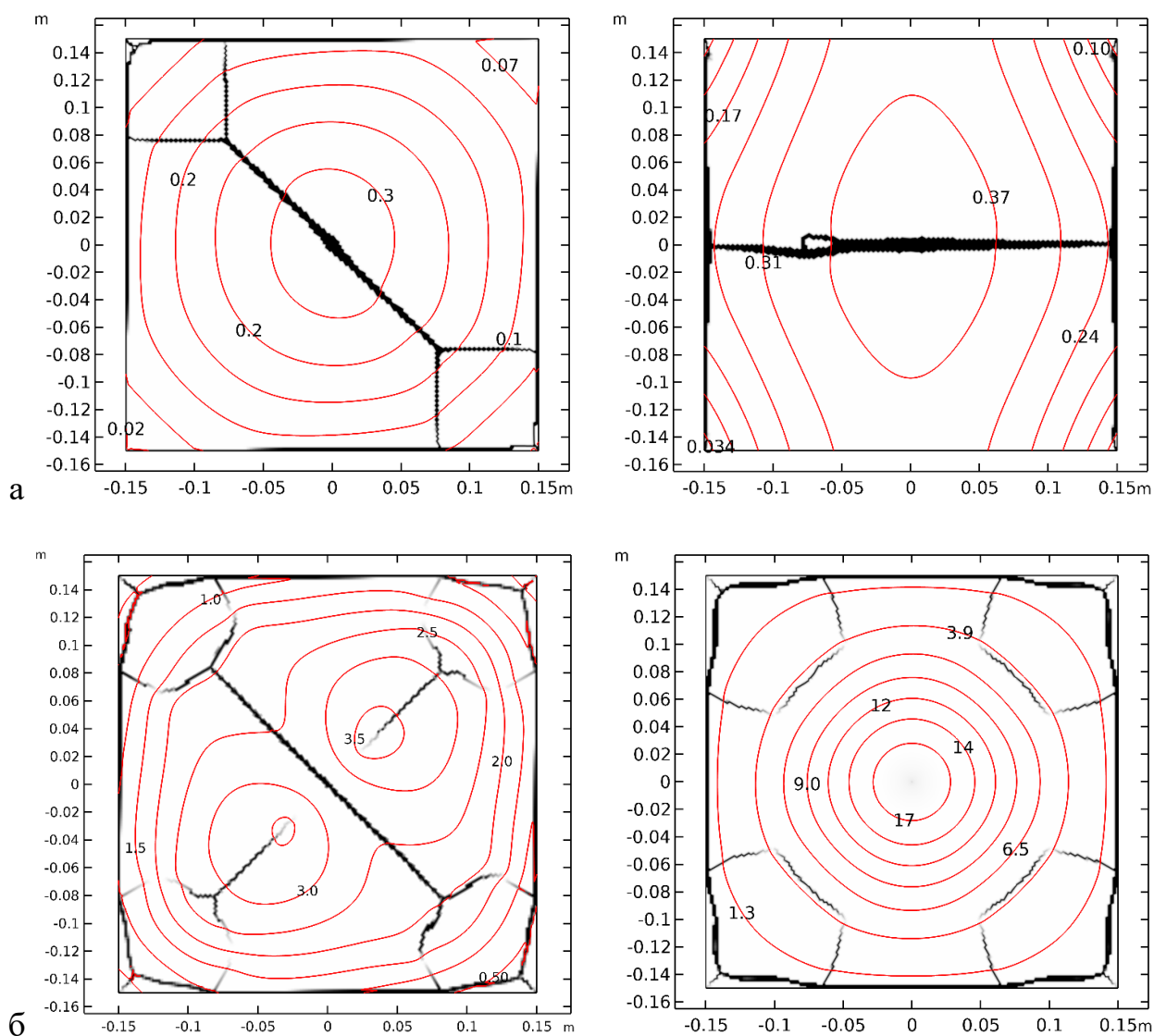


Рис. 3. Оптимизированная геометрия ребер жесткости панелей (показана черным цветом), нагруженных сосредоточенной силой по центру (а) и пятью силами (б).

Геометрия найдена на основе решения задачи ТО с использованием классической теории пластин (слева) и теории пластин Миндлина-Рейсснера (справа).

Пример сопоставления прогибов и эквивалентных напряжений по Мизесу в панели переменной толщины, геометрия которой получена на основе решения задачи ТО, и в соответствующей трехмерной геометрии панели, построенной на основе решения задачи ТО, представлен на рис. 4. В решении для панели переменной



толщины использована классическая теория пластин. Для построения трехмерной геометрии решение задачи ТО было использовано, как предварительное проектировочное решение. В трехмерной геометрии добавлено сглаживание геометрических элементов, полученных в процессе ТО, и при этом массы панелей равны. Для расчетов этого варианта панели использовались элементы типа Solid, а условия нагружения и закрепления задавались такими же, как и в исходной задаче оптимизации. Сосредоточенные усилия и точечные закрепления заменялись на соответствующие поверхностные граничные условия на площадках с радиусом, равным 1 мм.

Из представленного на рис. 4 сопоставления видно, что в трехмерном решении прогибы оказываются даже меньше, чем в исходно результате ТО, что объясняется тем, что в 3д геометрии добавлено сглаживание. Несимметричный характер распределения перемещений на рис. 4а объясняется тем, что в решении ТО с одной стороны панели возникло небольшое ребро жесткости, и полученная геометрия оказалась из-за этого несимметричной. Этот результат подтверждает тот факт, что решение задачи ТО даже для относительно простых задач может быть не единственным. Уровень напряжений в решении ТО для пластины переменной толщины и в трехмерном решении значительно отличается, в первую очередь за счет значительной концентрации напряжений вблизи опор в трехмерном решении (рис. 4б). Поэтому анализ напряженного состояния и соответствующие ограничения в задаче ТО, не могут быть реализованы. Получаемые решения, по крайней мере в рамках рассматриваемой формулировки, могут быть использованы только для оценки

наиболее жестких конструкций без введения дополнительных условий на прочность. Однако, учитывая тот факт, что уровень напряжений пропорционален кривизне поверхности пластины при изгибе, то создание наиболее жестких конструкций может также одновременно повышать и их несущую способность.

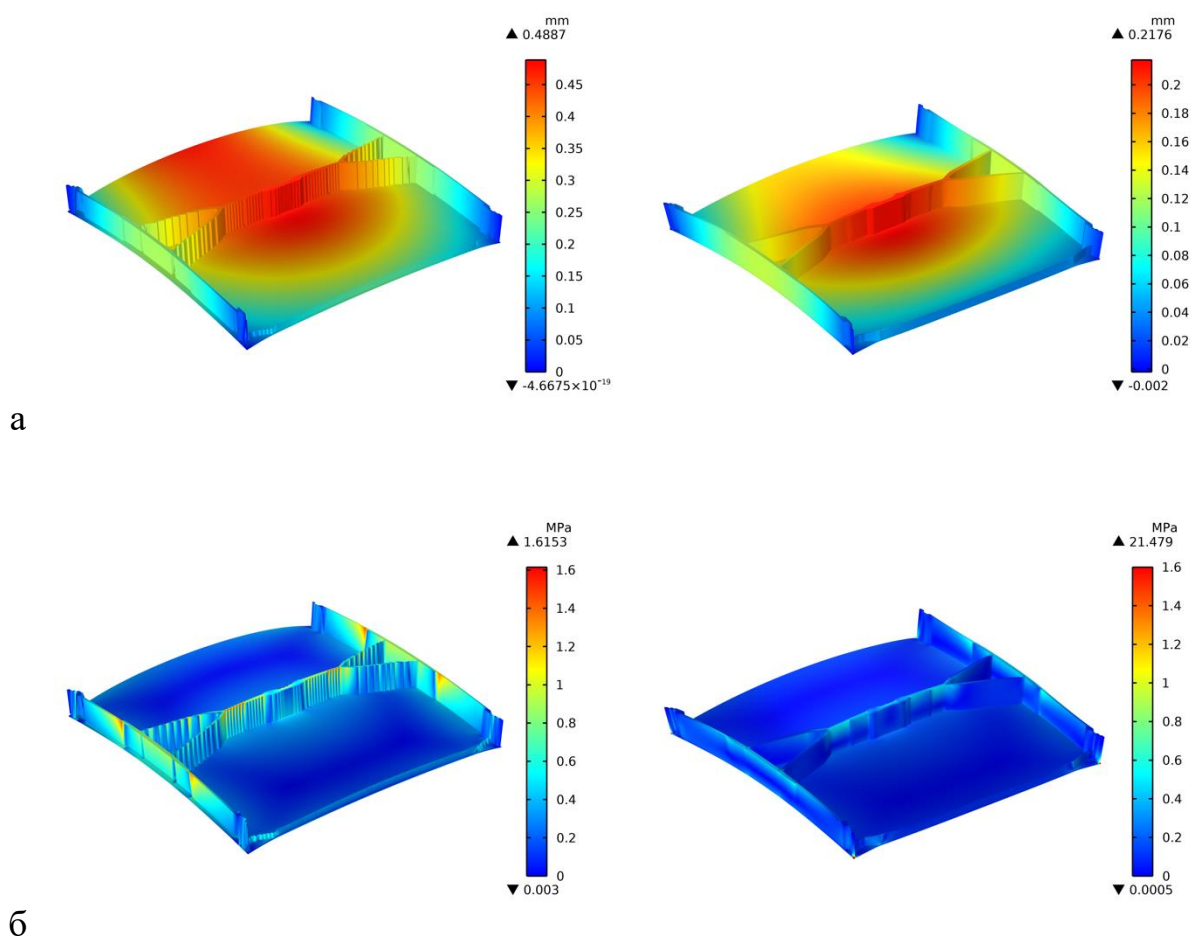


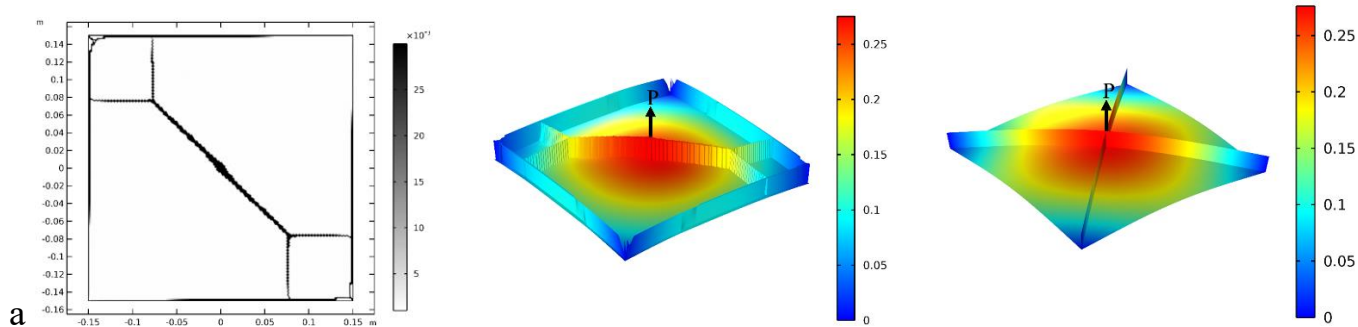
Рис. 4. Прогибы (а) и эквивалентные напряжения (б) в исходном решении задачи ТО (слева) и в решении для сглаженной трехмерной геометрии пластины (справа).

Второй вариант нагружения.

Результаты решения всех рассматриваемых задач оптимизации представлены на рис. 5. На рис. 5 показана геометрия ребер жесткости, найденная для рассмотренных вариантов нагружения по результатам ТО. Показаны прогибы

пластины, реализующие в решении задачи ТО. Также для сопоставления показаны наилучшие варианты панелей с регулярным оребрением под углом  $\pm 45$  градусов, найденные по результатам ПО. Видно, что геометрия ребер жесткости, предлагаемая алгоритмом ТО, как оптимальная оказывается достаточно специфической и неочевидной. В частности, даже для задачи с одной силой, приложенной по центру пластины, возникает одно диагональное ребре жесткости увеличенной толщины. При этом прогибы пластины оказываются сопоставимы (а в соответствующей трехмерной геометрии – даже меньше, см. далее) с теми, которые возникают в решении задачи ПО.

Существенный выигрыш по сравнению с регулярным оребрением получен для вариантов нагружения 2 и 3, в которых панели нагружены одной или двумя силами, смещенными относительно центра панели (рис. 5б, в). В этих задачах регулярное оребрение оказывается неэффективным, и прогибы панелей в наилучших решениях ПО оказываются в 10 больше, по сравнению с прогибами в ТО. Для задачи с заданными пятью силами (вариант 4), наоборот, решение ТО приводит к достаточно податливой геометрии и прогибы полученной панели оказываются выше в 3.5 раза, по сравнению с панелью с регулярным оребрением (рис. 5г).



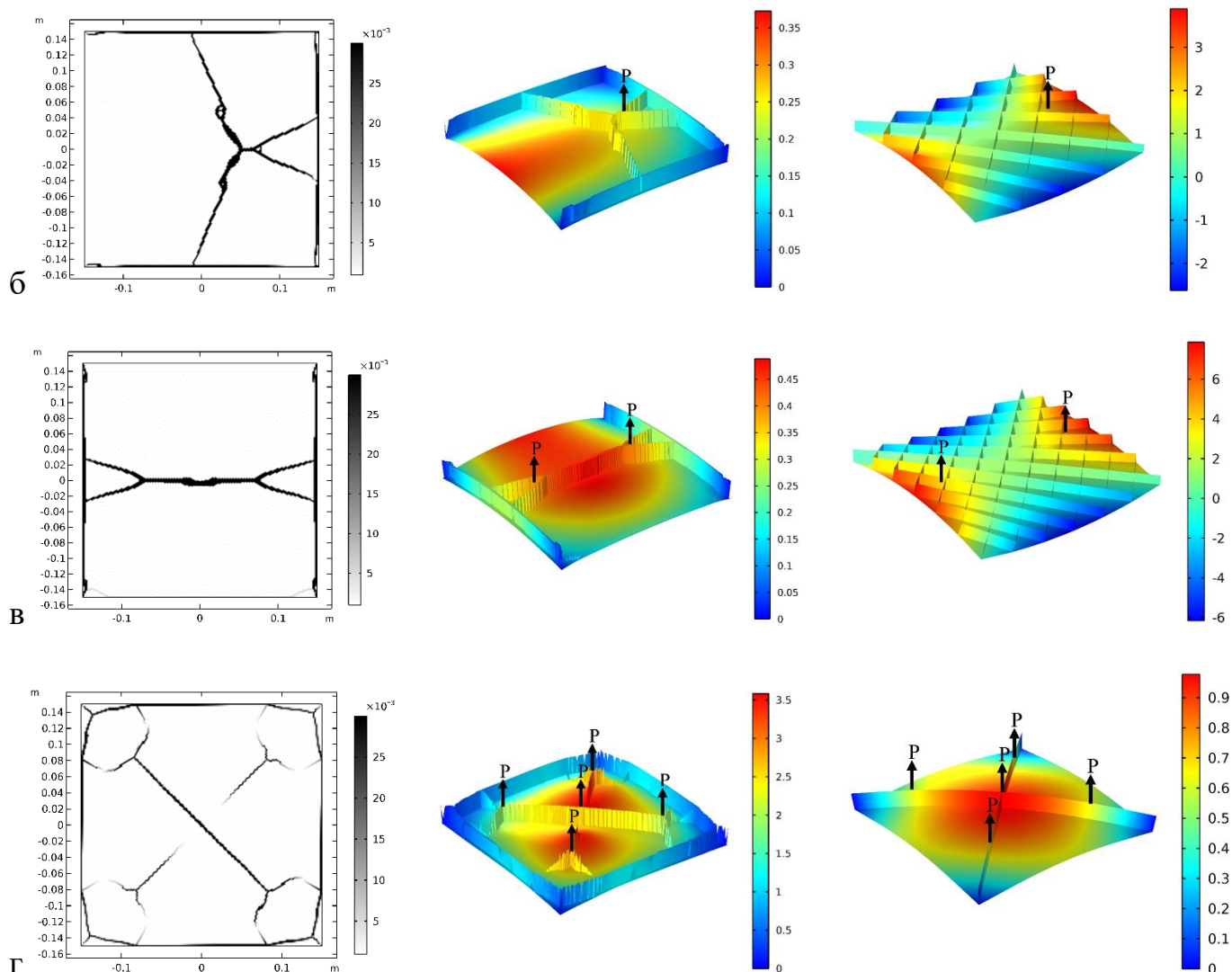


Рис. 5. Сопоставление результатов топологической и параметрической оптимизации подкрепленных панелей. Показана высота [м] ребер жесткости (слева), прогибы [мм] в решении задачи ТО (по центру) и в решении задачи ПО (справа), а – вариант 1, б – вариант 2, в – вариант 3, г – вариант 4.

Общая сводка всех результатов расчетов с указанием полученной массы панелей, прогибов в точках приложения нагрузки и полной энергии деформаций представлена в таблицах 1-4. Здесь сопоставлены результаты, полученные с использованием ТО и классической теории пластин и теории Миндлина-Рейсснера.

Представлены параметры наилучшей геометрии, полученной с использованием ПО, а также параметры гладких пластин увеличенной толщины, которые обладают эквивалентной жесткостью. Через дробь в таблицах 1-4 для результатов ТО указаны соответствующие результаты, найденные на основе трехмерной сглаженной геометрии, воспроизводящей решение задачи ТО.

Из представленных результатов следует, что для вариантов расчета 1-3 алгоритм топологической оптимизации позволил получить более эффективные решения, по сравнению с параметрической оптимизации регулярных панелей (табл. 1-3). При сопоставимой массе панелей, прогибы и энергия деформаций оказывается ниже в решении ТО. Воспроизведение решения ТО в трехмерной сглаженной геометрии приводит к дополнительному повышению жесткости панели. Использование теории МР во всех вариантах расчетов оказалось неэффективным. В варианте 4 ТО приводит к худшему решению, по сравнению с ПО, при использовании любой теории пластин (табл. 4), однако, по всей видимости, это решение может быть улучшено, если в формулировке задачи ПО дополнительно учесть условия симметрии.

Таблица 1. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 1.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, $U$ [Дж]
ТО, классическая теория пластин	0.18478	0.2753 / 0.2100	0.00137 / 0.00104

ТО, теория пластин МР	0.19971	0.3467 / 0.4080	0.00203 / 0.00144
ПО (толщина/высота ребер жесткости 4.4/24.2 мм)	0.18052	0.2763	0.00138
Без подкрепления (8.8 mm)	0.79200	0.2760	0.00138

Таблица 2. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 2.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, $U$ [Дж]
ТО, классическая теория пластин	0.18697	0.3728 / 0.3441	0.00121 / 0.00147
ТО, теория пластин МР	0.18930	0.7026 / 0.7287	0.00236 / 0.00154
ПО (толщина/высота ребер жесткости 1.6/16 мм)	0.17916	3.8965	0.00810
Без подкрепления (7.9 mm)	0.57600	0.3776	0.00188

Таблица 3. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 3.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, $U$ [Дж]
ТО, классическая теория пластин	0.19089 /	0.4900 / 0.4921	0.00418 / 0.00438

ТО, теория пластин МР	0.20048 /	0.6892 / 0.6723	0.00461 / 0.00434
ПО (толщина/высота ребер жесткости 1.1/16.9 мм)	0.18149	7.7145	0.033718
Без подкрепления (8.64 mm)	0.77760 /	0.4905	0.00467

Таблица 4. Сопоставление результатов ТО и ПО для варианта расчета 4.

Модель	Масса [кг]	Прогибы [мм]	Полная энергия деформаций, $U$ [Дж]
ТО, классическая теория	0.16332	3.4587 / 3.5848	0.06394 / 0.04553
ТО, теория пластин МР	0.19070	18.092 / 19.959	0.17877 / 0.15428
ПО (толщина/высота ребер жесткости 3.7/25.9 мм)	0.17186	0.9783	0.19242
Без подкрепления (5.9 mm)	0.53100	3.4677	0.07099 / 0.07062

### Выводы

Предложена методика топологической оптимизации подкрепленных панелей, в которой функция фиктивной плотности используется для задания локальной толщины панели. Методика позволяет получать оптимизированные варианты конструкций с наибольшей жесткостью. Наилучшие решения получены с использованием классической теории пластин, которые позволяют получать приближенные оценки (с учетом возникающего резкого изменения толщины панелей) по оптимальной геометрии подкрепляющих элементов. Показана

эффективность предложенной методики в сравнении с параметрической оптимизацией, и возможность значительного превосходства получаемых решений с криволинейной геометрией ребер жесткости по сравнению с панелями с регулярным оребрением.

### Список источников

1. Weisheng Zhang, Ying Liu. et al. A Moving Morphable Component Based Topology Optimization Approach for Rib-Stiffened Structures Considering Buckling Constraints // Journal of Mechanical Design, 2018, vol. 140 (11), DOI:[10.1115/1.4041052](https://doi.org/10.1115/1.4041052)
2. Riccardo Vescovini et al. A semi-analytical approach for the analysis of variable-stiffness panels with curvilinear stiffeners // International Journal of Solids and Structures, 2020, vol. 188-189, pp. 244-260. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.10.011>
3. Scott Townsend, H. Alicia Kim. A level set topology optimization method for the buckling of shell structures // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, vol. 60, pp. 1783-1800. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02374-9>
4. J. Luo, H.C. Gea. A systematic topology optimization approach for optimal stiffener design // Structural Optimization, 1998, vol. 16, pp. 280 - 288. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01271435>
5. Sameer B. Mulani, Wesley C.H. Slemp, Rakesh K. Kapania. EBF3PanelOpt: An optimization framework for curvilinear blade-stiffened panels // Thin-Walled Structures, 2013, vol. 63, pp. 13-26, URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.09.008>



6. Y.C. Lam, S. Santhikumar. Automated rib location and optimization for plate structures // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2003, vol. 25, pp.35–45. DOI:[10.1007/s00158-002-0270-7](https://doi.org/10.1007/s00158-002-0270-7)
7. Alexis Dugré, Aurelian Vadean, Julien Chaussée. Challenges of using topology optimization for the design of pressurized stiffened panels // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, vol. 53, pp. 303-320. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1321-1>
8. Ahmad Alhajahmad, Christian Mittelstedt. Design tailoring of curvilinearly grid-stiffened variable-stiffness composite cylindrically curved panels for maximum buckling capacity // Thin-Walled Structures, 2020, vol. 157, pp. 107132. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107132>
9. X. Ding, K. Yamazaki. Stiffener layout design for plate structures by growing and branching tree model (application to vibration-proof design) // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, vol. 26 (1), pp. 99-110. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-003-0309-4>
10. Shutian Liu, Quhao Li, Wenjong Chen, Rui Hu, Liyong Tong. H-DGTP Heaviside-function based directional growth topology parameterization for design optimization of stiffener layout and height of thin-walled structures // Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015, vol. 52, pp. 903-913. URL:<https://doi.org/10.1007/s00158-015-1281-5>
11. Dachuan Liu, Peng Hao et al. On the integrated design of curvilinearly grid-stiffened panel with non-uniform distribution and variable stiffener profile // Materials & Design, 2020, vol. 190, pp. 108556. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108556>

12. Dan Wang, Mostafa M. Abdalla et al. Streamline stiffener path optimization (SSPO) for embedded stiffener layout design of non-uniform curved grid-stiffened composite (NCGC) structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, vol. 344, pp. 1021-1050. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.09.013>
13. Dan Wang, Si-Yong Yeo et al. Data-driven streamline stiffener path optimization (SSPO) for sparse stiffener layout design of non-uniform curved grid-stiffened composite (NCGC) structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, vol. 365, pp. 113001. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113001>
14. Gamache J., Vadean A., Dodane N., Achiche S. Topology Optimization for Stiffened Panels: A Ground Structure Method // Proceedings of the ASME 2020 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 46th Design Automation Conference (DAC). August 17–19, 2020. URL: <https://doi.org/10.1115/DETC2020-22103>
15. Hemza Layachi, Yuan-ming Xu, Mohamed Amine Bennaceur. Topology Optimization and Design Guidelines of SubStiffened Panels in Aerospace Applications // MATEC Web Conf. International Conference on Mechanical, Material and Aerospace Engineering 2017, vol. 114. URL: <https://doi.org/10.1051/matecconf/201711403009>
16. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 2003. – 448 p.
17. Дзюба А.С., Липин Е.К. Оптимальное проектирование силовых конструкций минимального объема при ограничениях по прочности и устойчивости // Ученые записки ЦАГИ. 1980. Т. 11. №. 1. С. 58-71.

18. Дудченко А.А., Кыонг Л.К., Лурье С.А. Расчет и проектирование контурно подкрепленной композитной панели, нагруженной поперечной силой // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=28792>
19. Кусяков А.Ш. Анализ эффективности подкрепляющих элементов в задаче оптимизации ребристой оболочки из композитного материала // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. № 4. С. 29-33.
20. Solyaev Y. et al. On a combined thermal/mechanical performance of a foam-filled sandwich panels // International Journal of Engineering Science, 2019, vol. 134, pp. 66-76. DOI:[10.1016/j.ijengsci.2018.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.10.010)
21. Lurie S.A. et al. Design of the corrugated-core sandwich panel with external active cooling system // Composite Structures, 2018, vol. 188, pp. 278-286. DOI:[10.1016/j.compstruct.2017.12.082](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.082)
22. Sun Z, Cui R., Cui T. et al. An Optimization Approach for Stiffener Layout of Composite Stiffened Panels Based on Moving Morphable Components (MMCs) // Acta Mechanica Solida Sinica, 2020, vol. 33 (1), pp. 650-662. URL: <https://doi.org/10.1007/s10338-020-00161-4>
23. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced mechanics of composite materials and structures, 2013, Elsevier, 829 p.

### References

1. Weisheng Zhang, Ying Liu. et al. A Moving Morphable Component Based Topology Optimization Approach for Rib-Stiffened Structures Considering Buckling Constraints, Journal of Mechanical Design, 2018, vol. 140 (11), DOI:[10.1115/1.4041052](https://doi.org/10.1115/1.4041052)

2. Riccardo Vescovini et al. A semi-analytical approach for the analysis of variable-stiffness panels with curvilinear stiffeners, *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 188-189, pp. 244-260. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.10.011>
3. Scott Townsend, H. Alicia Kim. A level set topology optimization method for the buckling of shell structures, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, vol. 60, pp. 1783-1800. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02374-9>
4. J. Luo, H.C. Gea. A systematic topology optimization approach for optimal stiffener design, *Structural Optimization*, 1998, vol. 16, pp. 280 - 288. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01271435>
5. Sameer B. Mulani, Wesley C.H. Slemp, Rakesh K. Kapania. EBF3PanelOpt: An optimization framework for curvilinear blade-stiffened panels, *Thin-Walled Structures*, 2013, vol. 63, pp. 13-26, URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.09.008>
6. Y.C. Lam, S. Santhikumar. Automated rib location and optimization for plate structures, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2003, vol. 25, pp.35–45. DOI:10.1007/s00158-002-0270-7
7. Alexis Dugré, Aurelian Vadean, Julien Chaussée. Challenges of using topology optimization for the design of pressurized stiffened panels, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, vol. 53, pp. 303-320. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1321-1>
8. Ahmad Alhajahmad, Christian Mittelstedt. Design tailoring of curvilinearly grid-stiffened variable-stiffness composite cylindrically curved panels for maximum buckling capacity,

*Thin-Walled Structures*, 2020, vol. 157, pp. 107132. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107132>

9. X. Ding, K. Yamazaki. Stiffener layout design for plate structures by growing and branching tree model (application to vibration-proof design), *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, vol. 26 (1), pp. 99-110. URL: <https://doi.org/10.1007/s00158-003-0309-4>

10. Shutian Liu, Quhao Li, Wenjiong Chen, Rui Hu, Liyong Tong. H-DGTP Heaviside-function based directional growth topology parameterization for design optimization of stiffener layout and height of thin-walled structures, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, vol. 52, pp. 903-913. URL:<https://doi.org/10.1007/s00158-015-1281-5>

11. Dachuan Liu, Peng Hao et al. On the integrated design of curvilinearly grid-stiffened panel with non-uniform distribution and variable stiffener profile, *Materials & Design*, 2020, vol. 190, pp. 108556. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108556>

12. Dan Wang, Mostafa M. Abdalla et al. Streamline stiffener path optimization (SSPO) for embedded stiffener layout design of non-uniform curved grid-stiffened composite (NCGC) structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, vol. 344, pp. 1021-1050. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.09.013>

13. Dan Wang, Si-Yong Yeo et al. Data-driven streamline stiffener path optimization (SSPO) for sparse stiffener layout design of non-uniform curved grid-stiffened composite (NCGC) structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 365, pp. 113001. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113001>

14. Gamache J., Vadean A., Dodane N., Achiche S. Topology Optimization for Stiffened Panels: A Ground Structure Method, *Proceedings of the ASME 2020 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 46th Design Automation Conference (DAC)*. August 17–19, 2020. URL: <https://doi.org/10.1115/DETC2020-22103>

15. Hemza Layachi, Yuan-ming Xu, Mohamed Amine Bennaceur. Topology Optimization and Design Guidelines of SubStiffened Panels in Aerospace Applications, *MATEC Web Conf. International Conference on Mechanical, Material and Aerospace Engineering 2017*, vol. 114. URL: <https://doi.org/10.1051/matecconf/201711403009>

16. Lizin V.T., Pyatkin V.A. *Proektirovanie tonkostennykh konstruksii* (Design of thin-walled structures), Moscow, Mashinostroenie, 2003, 448 p.

17. Dzyuba A.S., Lipin E.K. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1980, vol. 11, no. 1, pp. 58-71.

18. Dudchenko A.A., Kyong L.K., Lur'e S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 50. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28792>

19. Kussyakov A.Sh. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2020, no. 4, pp. 29-33.

20. Solyaev Y. et al. On a combined thermal/mechanical performance of a foam-filled sandwich panels, *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 134, pp. 66-76. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2018.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.10.010)

21. Lurie S.A. et al. Design of the corrugated-core sandwich panel with external active cooling system, *Composite Structures*, 2018, vol. 188, pp. 278-286. DOI: [10.1016/j.compstruct.2017.12.082](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.082)

22. Sun Z, Cui R., Cui T. et al. An Optimization Approach for Stiffener Layout of Composite Stiffened Panels Based on Moving Morphable Components (MMCs), *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2020, vol. 33 (1), pp. 650-662. URL: <https://doi.org/10.1007/s10338-020-00161-4>

23. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced mechanics of composite materials and structures*, 2013, Elsevier, 829 p.

Статья поступила в редакцию 01.09.2021; одобрена после рецензирования 12. 09.2021; принята к публикации 22. 10.2021.

The article was submitted 01.09.2021; approved after reviewieng 12. 09.2021; accepted for publication 22.10.2021.