

УДК 629.78

Оптимизация траектории космического аппарата с идеально регулируемым двигателем в переменных Кустаанхеймо-Штифеля

Иванюхин А.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: distantstar@nm.ru

Аннотация

Статья посвящена вопросу оптимизации перелётов космических аппаратов с малой тягой и идеально регулируемым двигателем, в параметрическом пространстве KS-переменных. Задача оптимального управления решается с помощью принципа максимума Понтрягина, краевая задача – методом продолжения по параметру. Приводится параметризация краевой задачи, позволяющая расширить множество допустимых управлений за счёт отказа от ограничения, гарантирующего существование отображения в физическое пространство, в процессе решения краевой задачи. Приводится пример решения задачи, иллюстрирующий некоторые качественные особенности KS-преобразования.

Ключевые слова: механика космического полёта, преобразование Кустаанхеймо-Штифеля, идеально регулируемый двигатель, метод продолжения.

Введение

В небесной механике известны операции по регуляризации и линеаризации уравнений движения, призванные устранить особенности в центре притяжения, повысить устойчивость численных методов в его окрестности, и привести систему к линейному виду. Одно из таких преобразований разработали Кустаанхеймо и Штифель, оно устанавливает связь между задачей об изотропном гармоническом осцилляторе в четырехмерном вещественном пространстве и задачей Кеплера в обычном трехмерном пространстве.

Рассматривая возмущённую некоторой внешней силой ограниченную задачу двух тел в декартовой системе координат, имеем уравнения:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (1)$$

где \mathbf{x} – вектор положения, t – время, μ – гравитационный параметр центрального тела, \mathbf{a} – вектор возмущающего ускорения. Здесь и далее вектора и матрицы выделяются жирным шрифтом.

Легко видеть, что она страдает всеми недостатками, подталкивающими к регуляризации, кроме того, отсутствует устойчивость по Ляпунову [1], что может негативно сказываться на обусловленности матрицы производных текущих характеристик движения по начальным условиям при анализе движения на больших интервалах времени. Часто такие матрицы используются при решении краевой задачи.

Несомненно, с указанными трудностями можно бороться на уровне численных методов интегрирования, решения краевых задач и поиска подходящих начальных приближений. Однако, уход от них на уровне постановки задачи и типа используемых переменных так же заслуживает внимания.

Преобразование Кустанхеймо-Штифеля

Координатное преобразование Кустанхеймо-Штифеля и временное преобразование Сундмана [1] представлены ниже (2), (3), (4):

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (2)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

где \mathbf{u} – вектор положения в параметрическом четырёхмерном пространстве, $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ – матрица отображения, \mathbf{x} – вектор трёхмерного пространства, дополненный нулевой четвёртой составляющей (в дальнейшем это относится ко всем векторам физического пространства).

$$dt = r d\tau \quad (3)$$

$$\mathbf{V} = \frac{2}{r} \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}^* \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{u}^*, \quad r = |\mathbf{x}| = |\mathbf{u}|^2$$

где \mathbf{V} – скорость в физическом пространстве (декартовой системе координат), \mathbf{u}^* – скорость в параметрическом пространстве.

В результате этих преобразований, уравнения (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} &= \frac{1}{2} h \mathbf{u} + \frac{1}{2} r \mathbf{L}(\mathbf{u})^T \mathbf{a} \\ \frac{dh}{d\tau} &= 2(\mathbf{u}^*, \mathbf{L}(\mathbf{u})^T \mathbf{a}), \quad \frac{dt}{d\tau} = r \end{aligned} \quad (5)$$

где h – кеплеровская энергия системы, \mathbf{a} – тоже возмущающее ускорение что и в (1), а $(,)$ – обозначает скалярное произведение векторов.

Система (5) обладает инвариантными соотношениями:

- уравнение энергии

$$h = \frac{2|\mathbf{u}^*|^2 - \mu^2}{|\mathbf{u}|^2} \quad (6)$$

- билинейное соотношение

$$u_4 u_1^* - u_3 u_2^* + u_2 u_3^* - u_1 u_4^* = 0 \quad (7)$$

Остановимся подробнее на соотношении (7), для краткости обозначим его $bil(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$. Содержащийся в нём смысл заключается в том, что, расширив шестимерное фазовое пространство (\mathbf{x}, \mathbf{V}) до восьмимерного $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ и желая сохранить взаимную однозначность, необходимо ввести две дополнительные связи. Одна из них заключается в выборе четвёртой строки матрицы $\mathbf{L}(\mathbf{u})$, вторая – в билинейном соотношении. Обе связи призваны гарантировать нулевые четвёртые компоненты векторов \mathbf{x} и \mathbf{V} . Не нарушая вида матрицы отображения, можно организовать движение в пространстве KS-переменных не имеющее никакого физического аналога – для этого достаточно нарушить билинейное соотношение.

Это повлечёт за собой ситуацию, когда объект будет иметь физическое положение, но не физическую скорость, что приведёт к нефизическому маршруту движения.

Вернёмся к соотношениям (2) и (4). Взяв какие-либо значения векторов \mathbf{x} и \mathbf{V} , запишем их отображение в KS-переменных:

- для положения

$$\begin{cases} x_1 = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ x_2 = 2(u_1u_2 - u_3u_4) \\ x_3 = 2(u_1u_3 - u_2u_4) \end{cases} \quad (8)$$

- для скорости

$$\begin{cases} u_1^* = \frac{1}{2}(u_1V_1 + u_2V_2 + u_3V_3) \\ u_2^* = \frac{1}{2}(-u_2V_1 + u_1V_2 + u_4V_3) \\ u_3^* = \frac{1}{2}(-u_3V_1 - u_4V_2 + u_1V_3) \\ u_4^* = \frac{1}{2}(u_4V_1 - u_3V_2 + u_2V_3) \end{cases} \quad (9)$$

Из (8) следует, что точка в физическом пространстве задаёт кривую в параметрическом пространстве, и эта кривая оказывается окружностью радиуса \sqrt{r} , в плоскости проходящей через начало координат. Смысл билинейного соотношения с геометрической точки зрения заключается в ортогональности скорости \mathbf{u}^* этой окружности. Легко видеть, что, найдя какое-либо решение (8), т.е. выбрав точку на окружности, можно однозначно определить скорость. Эту окружность можно задать в параметрической форме:

$$\begin{cases} u_1(u_1, u_4, \varphi) = u_1 \cos(\varphi) - u_4 \sin(\varphi) \\ u_2(u_2, u_3, \varphi) = u_2 \cos(\varphi) + u_3 \sin(\varphi) \\ u_3(u_2, u_3, \varphi) = -u_2 \sin(\varphi) + u_3 \cos(\varphi) \\ u_4(u_1, u_4, \varphi) = u_1 \sin(\varphi) + u_4 \cos(\varphi) \end{cases} \quad (10)$$

где $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4)$ – какое-либо частное решение системы (8), φ – центральный угол.

Говоря о геометрической интерпретации KS-преобразования, следует отметить, что оно является конформным отображением. Это свойство может оказаться полезным при решении краевых задач, так как способно сближать начальные и конечные орбиты и конкретные точки на них; это обусловлено тем, что при KS-преобразовании из радиусов извлекается квадратный корень, а центральные углы делятся пополам. Это позволяет получать начальные невязки в KS-переменных меньшие, чем в декартовой системе, что может оказать существенное влияние на сходимость к решению.

Задача оптимизации перелёта

Рассмотрение оптимизационной задачи в KS-переменных встречаются редко, однако, можно указать некоторые работы [2,3].

Сформулируем задачу таким образом: найти оптимальное, в смысле минимума интеграла реактивного ускорения, управление, переводящее аппарат с идеально регулируемым двигателем за заданное время между заданными положениями. Можно считать это простейшей задачей механики космического полёта с малой тягой [4].

При этом, можно говорить об управлении как о нахождении вектора \mathbf{a} физического пространства или вектора \mathbf{p} параметрического пространства, удовлетворяющего билинейному соотношению.

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}^T \mathbf{a} \quad (11)$$

Интерес в рамках данной работы представляет второй вариант, как наименее представленный в литературе.

Оптимизационная задача в этом случае имеет следующий вид:

$$\min J = \int_0^{\tau_k} p^2 d\tau, \quad bil(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} h \mathbf{u} + \frac{1}{2} r \mathbf{p}, \quad \frac{dh}{d\tau} = 2(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}), \quad \frac{dt}{d\tau} = r \quad (13)$$

Применив принцип максимума, получаем сопряжённую систему и оптимальное управление, выраженное через фазовые и сопряжённые переменные:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_u}{d\tau} &= -\frac{1}{2} h \lambda_{u^*} - [(\lambda_{u^*}, \mathbf{p}) + 2\lambda_r] \mathbf{u} + \frac{1}{2} bil(\mathbf{u}, \lambda_{u^*}) \begin{pmatrix} -p_4 \\ p_3 \\ -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \\ \frac{d\lambda_{u^*}}{d\tau} &= -\lambda_u - 2\lambda_h \mathbf{p}, \quad \frac{d\lambda_h}{d\tau} = -\frac{1}{2}(\mathbf{u}, \lambda_{u^*}), \quad \frac{d\lambda_r}{d\tau} = 0 \\ \mathbf{p} &= \frac{1}{4} r \lambda_{u^*} + \lambda_h \mathbf{u}^* - \frac{1}{4} bil(\mathbf{u}, \lambda_{u^*}) \begin{pmatrix} -u_4 \\ u_3 \\ -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

где λ – сопряжённые переменные, в соответствии с индексом.

Начальные и конечные условия имеют вид:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{V}_0 = \frac{2}{r_0}\mathbf{L}\mathbf{u}_0^*, \quad t_0 = 0, \quad h_0 = \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{L}\mathbf{u}_k, \quad \mathbf{V}_k = \frac{2}{r_k}\mathbf{L}\mathbf{u}_k^*, \quad t_k = T \quad (16)$$

При этом на одном конце траектории можно взять любое решение уравнений (8-9), например, на левом, а правое дополнить условиями трансверсальности:

$$\text{bil}(\mathbf{u}, \lambda_{u^*}) = 0, \quad \text{bil}(\mathbf{u}, \lambda_u) + \text{bil}(\mathbf{u}^*, \lambda_{u^*}) = 0, \quad \lambda_h = 0, \quad \lambda_t = 0 \quad (17)$$

Из (14) и (17) видно, что сопряжённая переменная к физическому времени равна нулю.

Для решения этой краевой задачи можно использовать метод продолжения по параметру, погрузив её в однопараметрическое семейство следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_u}{d\tau} &= -\frac{1}{2}h\lambda_{u^*} - [(\lambda_{u^*}, \mathbf{p}) + 2\lambda_t]\mathbf{u} + (1-\rho)\frac{1}{2}\text{bil}(\mathbf{u}, \lambda_{u^*}) \begin{pmatrix} -p_4 \\ p_3 \\ -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{p} &= \frac{1}{4}r\lambda_{u^*} + \lambda_h\mathbf{u}^* - (1-\rho)\frac{1}{4}\text{bil}(\mathbf{u}, \lambda_{u^*}) \begin{pmatrix} -u_4 \\ u_3 \\ -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ \rho &\in [1, 0] \end{aligned} \quad (18)$$

где ρ – параметр продолжения. Остальные уравнения и краевые условия остаются без изменений.

Такой вид погружения позволяет не учитывать в начальный момент смешанное ограничение (12), что расширяет область допустимых управлений в

начале процедуры продолжения на траектории, не имеющие аналогов в физическом пространстве.

Можно так задать однопараметрическое семейство, в виде гомотопии ньютоновского типа:

$$f(z, \rho) - \rho f(z_0, \rho_0) = 0 \quad (19)$$

где f – система краевых условий, представленная в виде нелинейных уравнений, z_0 – начальное приближение искомых переменных $z = (\lambda_u, \lambda_{u^*}, \lambda_h)$.

Сами уравнения метода продолжения, редуцирующего краевую задачу к задаче Коши, имеют вид:

$$\frac{dz}{d\rho} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]^{-1} \left(f(z_0) - \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \quad (20)$$

Уравнения (20) задают зависимость $z(\rho)$, при которой решение достигается в конце интервала интегрирования $z(\rho_k)$. Можно рассматривать как другие виды гомотопии, так и другие виды зависимости (20), некоторые из них приведены в [5].

Пример расчёта

Примером служит задача перелёта между фиксированными точками круговых орбит относительно Солнца, с разницей в наклонении 9° и угловой дальностью 270° . Радиус орбиты отправления $1 AU$, орбиты назначения – $0.4 AU$. Точка старта находится на оси Ox , с координатами $(1,0,0)AU$ и скоростью $(0,1,0)\sqrt{\mu/AU}$. Конечная точка имеет координаты $(0, \sin 270^\circ \cos 9^\circ, \sin 270^\circ \sin 9^\circ)0.4AU$ и скорость $(1,0,0)\sqrt{\mu/0.4AU}$. Время перелёта 145 суток. AU – астрономическая единица. В

качестве первого приближения для решения краевой задачи берётся пассивное движения по начальной орбите.

На рисунке 1 приведено решение этой задачи: траектория, зависимость значения функционала и тяги от времени (в безразмерных переменных). При этом для перехода к размерным величинам нужно воспользоваться выражениями:

$$J^* = J \sqrt{\frac{\mu^3}{AU^5}}, \quad a^* = a \frac{\mu}{AU^2}, \quad t^* = t \sqrt{\frac{AU^3}{\mu}} \quad (21)$$

Решение получено с использованием KS-переменных и переведено в физическое пространство с помощью соотношения (2). Как видно, оно имеет характерный для этой задачи вид.

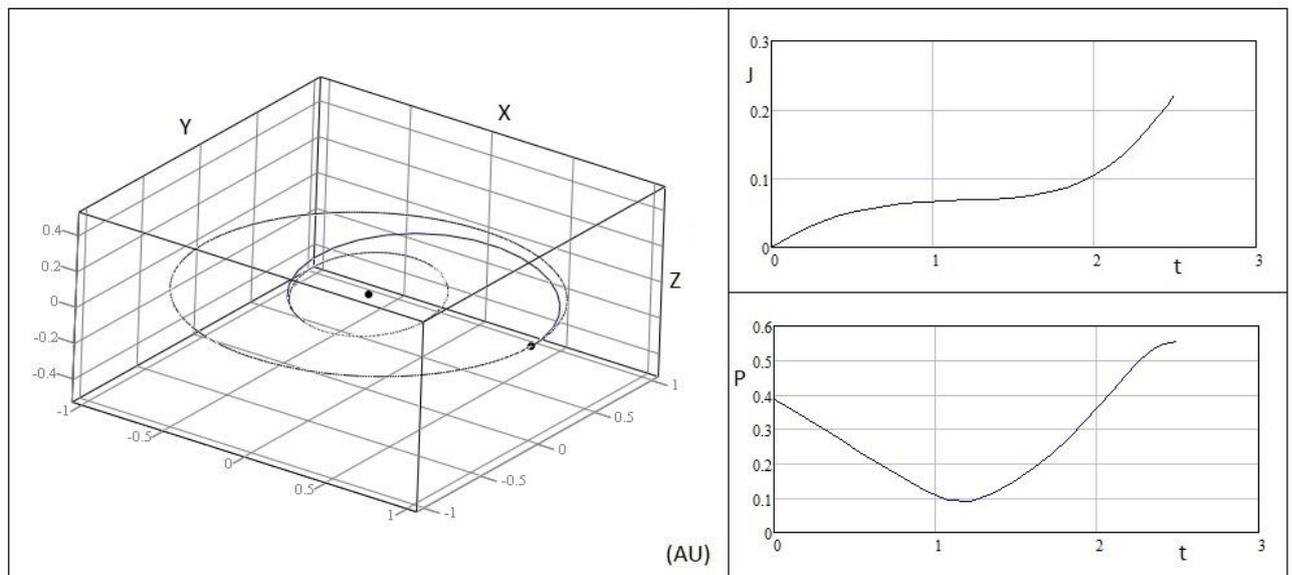


Рисунок 1. Траектория в системе XYZ, зависимость функционала и тяги от времени.

Далее, на рисунке 2 приводятся трёхмерные проекции траекторий четырёхмерного пространства KS-переменных при различных значениях угла φ из системы уравнений (10), взятых для начального положения. Интересно отметить

симметричность этих траекторий относительно φ , а также то, что всем им соответствует одна траектория в физическом пространстве, рисунок 1. Можно отметить, что выбор различных значений угла φ не приводил к появлению каких-либо существенных вычислительных особенностей или трудностей при решении.

Кроме того, эти графики иллюстрируют упомянутое свойство конформности преобразования - так из них видно, что угловая дальность сократилась вдвое и уменьшилась разница гелиоцентрических удалений начальных и конечных точек. Находящиеся на рисунке 2 окружности описываются уравнениями (10), а не являются исходными орбитами.

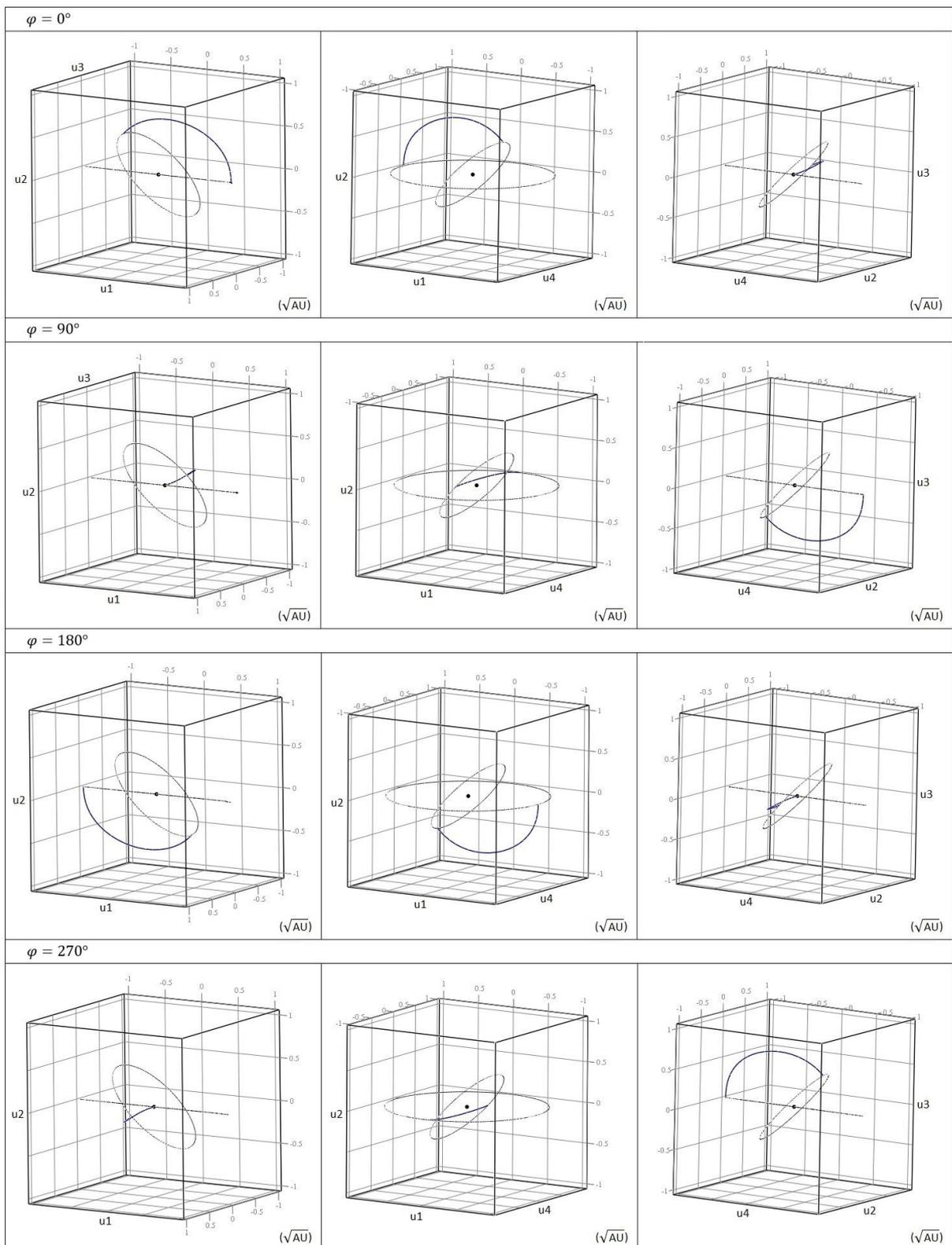


Рисунок 2. Варианты траектории в системе u , в зависимости от угла φ .
Трёхмерные проекции четырёхмерного пространства.

Также, на рисунке 3 приведены для сравнения два решения краевой задачи: на одном билинейное соотношение выполняется, на другом нет. Для того, чтобы различия между ними были лучше видны, в исходной задаче было увеличено в три раза наклонение, остальное осталось без изменений.

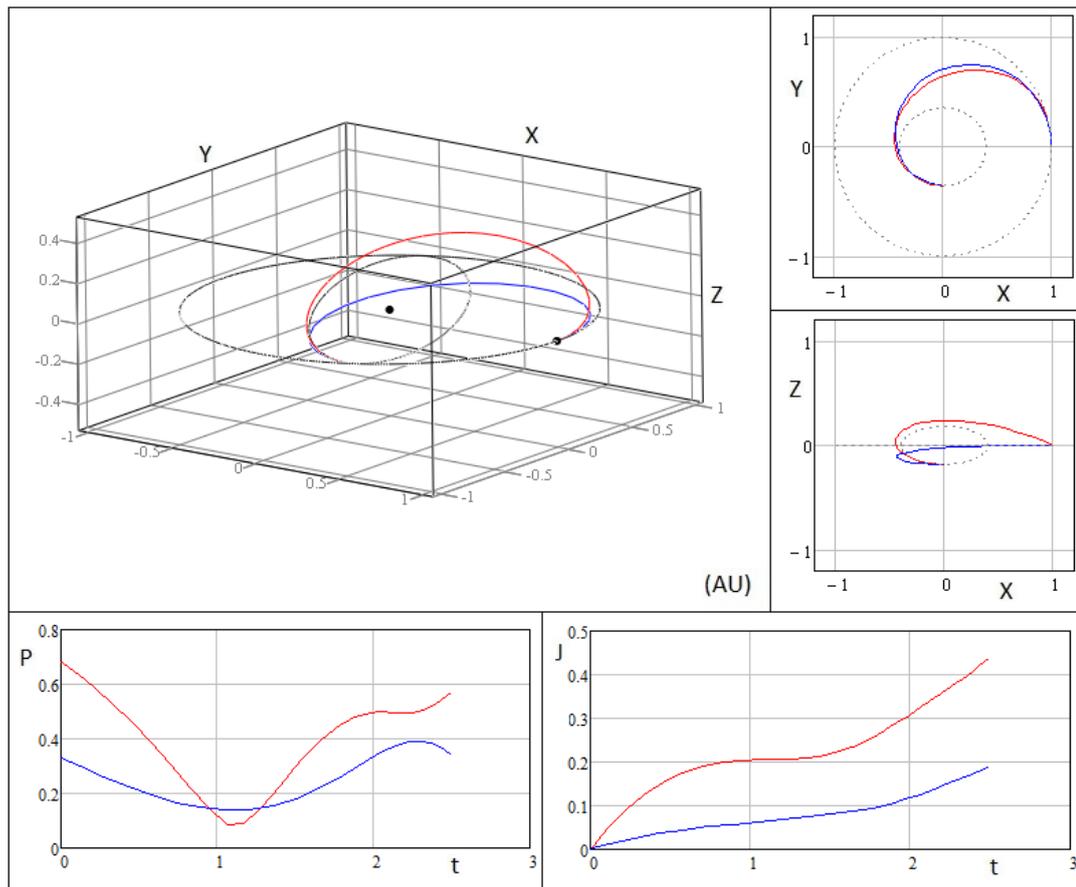


Рисунок 3. Сравнение траекторий при наличии (красная линия) и отсутствии билинейного ограничения (синяя линия).

График иллюстрирует, как существенно меняется траектория при появлении не нулевой четвёртой компоненты в управляющем ускорении и физической скорости. В тоже время, в условиях идеально регулируемого двигателя траекторию без билинейного ограничения нельзя назвать нереализуемой – зная её, можно восстановить управление и определить необходимую тягу, однако, величины

найденных таким образом значений будут далеки от минимальных. Из рисунка 3 видно, что нефизическая траектория требует меньших значений тяги и эффективнее по значению функционала, но находится за пределами области допустимых движений, в смысле направления тяги.

Отдельно хотелось бы сделать несколько замечаний, не останавливаясь на них подробно, по-прежнему считая первым приближением пассивное движение:

- использование KS-переменных не приводит к существенному увеличению времени вычислений, по сравнению с декартовыми координатами, при одинаковой точности решения;
- сходимость в KS-переменных задачи с большими наклонениями лучше, чем в декартовых;

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена задача оптимального управления космическим аппаратом с идеально регулируемым двигателем в KS-переменных как задача со смешанным ограничением. Продемонстрирована возможность такой параметризации решения краевой задачи, что в начале процедуры продолжения ограничение на управление не учитывается – это расширяет множество допустимых управлений на начальных этапах решения, также, начальное приближение может не удовлетворять этому ограничению.

В дальнейшем, по-видимому можно рассчитывать на получение начальных приближений из асимптотических решений уравнений возмущённого осциллятора

(13), причём эти решения могут представлять самостоятельный интерес как для практических, так и теоретических вопросов механики космического полёта.

Также очевидно, что для ограниченности правых частей дифференциальных уравнений системы (13) имеет смысл рассматривать такие задачи, как: задача оптимального быстрогодействия и задача на минимум реактивной тяги или ускорения [6] – в них член, связанный с тягой двигательной установки, ограничен на всей траектории, а сами задачи не являются качественно более сложными, чем приведённая здесь. В таких постановках можно рассчитывать получить решение задач попадания в гравитационный центр или пролёта сквозь него.

Работа выполнена при поддержке Гранта Правительства Российской Федерации № 11.G34.31.0022 «Исследования и разработка космических высокоимпульсных высокочастотных плазмодинамических электроракетных ионных двигателей» для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования.

Библиографический список

1. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
2. Jezewski D.J. A comparative study of Newtonian, Kustaanheimo-Stiefel, and Sperling-Burdet optimal trajectories. *Celestial mechanics* 1975, Volume 12, Issue 3, pp 297-315.

3. Сапунков Я.Г. Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS-переменных. Мехатроника, автоматизация, управление, № 3, 2010, с.73-78.
4. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.. Механика космического полёта с малой тягой. М.: Наука, 1969. 680 с.
5. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 365 с.
6. Petukhov V.G. Minimum-thrust problem and its application to trajectory optimization with thrust switchings. 64th International Astronautical Congress. IAC-13-C1.6.2. 2013, 9 pp.