

Выбор параметров динамических составляющих аэродинамических характеристик для моделирования продольного движения самолетов на больших углах атаки

М. А. Захаров

Рассмотрена математическая модель аэродинамических характеристик с включением нестационарных составляющих, соответствующих структуре обтекания $C_{y_{c.o.}}$ и $m_{z_{c.o.}}$, в нелинейном ($C_{y_{c.o.H}}(\alpha, x)$, $m_{z_{c.o.H}}(\alpha, x)$) и линейном ($C_{y_{c.o.L}}(\alpha, t)$, $m_{z_{c.o.L}}(\alpha, t)$) представлении. Поясняется косинусоидальная зависимость вращательных ($C_y^{\bar{\omega}_y}$, $m_z^{\bar{\omega}_y}$), а также линейных нестационарных ($C_{y_}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_*}^{\bar{\alpha}}$) производных от угла атаки. Предложены новые аппроксимации функций: $m_{z_H}(\alpha, x)$ (с параметром, зависящим от центровки самолета) и $x_0(\alpha)$ (с $\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}$, имеющей два негладких локальных минимума). Определена связь выражений $C_{y_{c.o.H}}(\alpha, x)$, $m_{z_{c.o.H}}(\alpha, x)$, $x_0(\alpha)$ с производными $C_{y_{c.o.L}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$, $m_{z_{c.o.L}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$, вычисляемыми из комплексов $(C_y^{\bar{\omega}_z} + C_y^{\bar{\alpha}})_{B.K.}$, $(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}})_{B.K.}$, экспериментально измеренных в аэродинамических трубах. Приведена методика выбора параметров динамических составляющих аэродинамических характеристик для моделирования.*

1. Исходная математическая модель аэродинамических характеристик и постановка задачи

При исследовании устойчивости и управляемости самолета в его продольном движении применяется математическая модель (ММ) нестационарных аэродинамических характеристик (АХ) с включением двух нестационарных составляющих (НС) (соответственно двух нестационарных производных (НП)) и внутренней переменной состояния x [1-3]. При этом модель коэффициентов нормальной силы и момента тангажа имеет вид [3, 4]

$$C_y = C_{y_{ст}}(\alpha, \varphi) + C_{y_{c.o.}} + C_y^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + C_{y_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha}; \quad m_z = m_{z_{ст}}(\alpha, \varphi) + m_{z_{c.o.}} + m_z^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z + m_{z_*}^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha}, \quad (1)$$

где: $C_{y_{ст}}(\alpha, \varphi)$, $m_{z_{ст}}(\alpha, \varphi)$ – статические составляющие, зависящие от угла атаки α и угла уста-

новки стабилизатора φ ; $C_y^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\omega}_z}$ – вращательные производные (ВП), безразмерные (в диапазоне α от 0° до 35° мало зависящие от угла атаки); $C_{y_*}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_*}^{\bar{\alpha}}$ – линейные НП (со звездочками) безразмерные, учитывающие нестационарные эффекты, не связанные с эффектами отрывного (вихре-

вого) обтекания; $\bar{\omega}_z, \bar{\dot{\alpha}}$ – безразмерные угловая скорость и производная угла атаки; $\bar{\omega}_z = \omega_z \cdot \frac{b_A}{V}$;

$\bar{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} \cdot \frac{b_A}{V}$; $\omega_z, \dot{\alpha}$ – угловая скорость и производная угла атаки по времени [с⁻¹]; V – воздуш-

ная скорость и [м/с]; b_A – средняя аэродинамическая хорда крыла [м]; $C_{y_{c.o.}}, m_{z_{c.o.}}$ – нестационарные составляющие АХ, соответствующие структуре обтекания (НССО).

В нелинейной постановке составляющие $C_{y_{c.o.}}, m_{z_{c.o.}}$ представляются следующими выражениями (2) с уравнением релаксации (3)

$$C_{y_{c.o.}}(\alpha, x) = C_{y_H}(\alpha, x) - C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha)); \quad m_{z_{c.o.}}(\alpha, x) = m_{z_H}(\alpha, x) - m_{z_H}(\alpha, x_0(\alpha)); \quad (2)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau_1} \cdot [x_0(\alpha - \dot{\alpha} \cdot \tau_2) - x], \quad (3)$$

где: x – внутренняя переменная состояния, $x \in [0, 1]$; может рассматриваться как относительная координата по хорде крыла точки отрыва потока (или взрыва вихрей) с верхней поверхности; $x_0(\alpha)$ – вполне определенная функция для данного типа самолета, соответствующая положению точки отрыва потока (или точки взрыва вихрей) при данном угле α в стационарных условиях $x_0(\alpha) = x(\dot{\alpha} = 0, \dot{x} = 0)$; $C_{y_H}(\alpha, x), m_{z_H}(\alpha, x)$ – нелинейные составляющие аэродинамических коэффициентов [1], описывающие нестационарные и нелинейные особенности возникновения отрывного (вихревого) обтекания на профиле: $C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha)), m_{z_H}(\alpha, x_0(\alpha))$ – стационарные составляющие, получаемые подстановкой зависимости $x_0(\alpha)$ (вместо X) в выражения $C_{y_H}(\alpha, x), m_{z_H}(\alpha, x)$; τ_1 – постоянная времени [с], обусловленная инерционностью процессов развития отрывного обтекания или восстановления безотрывного обтекания; τ_2 – постоянная времени [с], характеризующая эффекты затягивания развития отрывного обтекания.

Производные коэффициентов C_y, m_z по x определяются как

$$C_y^x(\alpha, x) = \frac{\partial C_y}{\partial x}(\alpha, x) = \frac{\partial C_{y_{c.o.}}(\alpha, x)}{\partial x} = \frac{\partial C_{y_H}(\alpha, x)}{\partial x}; \quad (4)$$

$$m_z^x(\alpha, x) = \frac{\partial m_z}{\partial x}(\alpha, x) = \frac{\partial m_{z_{c.o.}}(\alpha, x)}{\partial x} = \frac{\partial m_{z_H}(\alpha, x)}{\partial x}.$$

В линейной постановке (для малых значений $x - x_0(\alpha) \approx 0$, соответственно при колебаниях по α с малыми $\dot{\alpha}$) производные коэффициентов C_y, m_z по x зависят только от α

$$C_y^x(\alpha, x \approx x_0(\alpha)) \approx C_y^x(\alpha, x = x_0(\alpha)) = C_y^x(\alpha); \quad m_z^x(\alpha, x \approx x_0(\alpha)) \approx m_z^x(\alpha, x = x_0(\alpha)) = m_z^x(\alpha), \quad (5)$$

а составляющие $C_{y_{c.o.}}$, $m_{z_{c.o.}}$ (с линеаризацией релаксационного уравнения (3) и последующим преобразованием его по Лапласу) принимают вид [1-3]:

$$\begin{aligned} C_{y_{c.o.}}(\alpha, t) &= C_y^x(\alpha) \cdot (x(t) - x_0(\alpha)) = K_c(\alpha) \cdot L^{-1}\left(\frac{p \cdot \alpha(p)}{1 + \tau_1 \cdot p}\right); \\ m_{z_{c.o.}}(\alpha, t) &= m_z^x(\alpha) \cdot (x(t) - x_0(\alpha)) = K_m(\alpha) \cdot L^{-1}\left(\frac{p \cdot \alpha(p)}{1 + \tau_1 \cdot p}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где: p – оператор Лапласа; $L^{-1}(\)$ – обозначение обратного преобразования Лапласа; $K_c(\alpha)$,

$K_m(\alpha)$ – коэффициенты размерности [с]

$$K_c(\alpha) = -(\tau_1 + \tau_2) \cdot C_y^x(\alpha) \cdot \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}; \quad K_m(\alpha) = -(\tau_1 + \tau_2) \cdot m_z^x(\alpha) \cdot \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}. \quad (7)$$

В работе [1], на основе линейной теории кавитации, предложены аналитические выражения нелинейных функций $C_{y_{H1}}(\alpha, x)$, $m_{z_{H1}}(\alpha, x)$, которые обозначим с индексом “1”,

$$C_{y_{H1}}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2} \sin(\alpha) \cdot (1 + \sqrt{x})^2; \quad (8)$$

$$m_{z_{H1}}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2} \sin(\alpha) \cdot (1 + \sqrt{x})^2 \cdot \frac{5(1 - \sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x}}{16} = \frac{5\pi}{32} \cdot \sin(\alpha) \cdot (1 + \sqrt{x})^2 \cdot (1 - 1.2\sqrt{x} + x). \quad (9)$$

Соответственно выражения (2) принимают вид

$$C_{y_{c.o.H1}}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2} \sin(\alpha) \cdot \left[(1 + \sqrt{x})^2 - (1 + \sqrt{x_0(\alpha)})^2 \right]; \quad (10)$$

$$m_{z_{c.o.H1}}(\alpha, x) = \frac{5\pi}{32} \cdot \sin(\alpha) \cdot \left[(1 + \sqrt{x})^2 \cdot (1 - 1.2\sqrt{x} + x) - (1 + \sqrt{x_0(\alpha)})^2 \cdot (1 - 1.2\sqrt{x_0(\alpha)} + x_0(\alpha)) \right]. \quad (11)$$

Производные коэффициентов (10), (11) по x из (4), (5):

$$C_{y_1}^x(\alpha, x) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right); \quad (12)$$

$$m_{z_1}^x(\alpha, x) = \frac{5\pi}{32} \cdot \sin(\alpha) \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot (1 - 1.2\sqrt{x} + x) + \left(1 - \frac{0.6}{\sqrt{x}} \right) \cdot (1 + \sqrt{x})^2 \right].$$

$$C_{y_1}^x(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x_0(\alpha)}} \right); \quad (13)$$

$$m_{z_1}^x(\alpha) = \frac{5\pi}{32} \cdot \sin(\alpha) \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x_0(\alpha)}} \right) \cdot (1 - 1.2\sqrt{x_0(\alpha)} + x_0(\alpha)) + \left(1 - \frac{0.6}{\sqrt{x_0(\alpha)}} \right) \cdot (1 + \sqrt{x_0(\alpha)})^2 \right]. \quad (14)$$

Изменение коэффициентов C_y , m_z при периодическом изменении угла атаки (а также угла тангажа) $\alpha = \alpha_0 + \alpha_s \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $\omega_z = \dot{\alpha}$ (α_s - малая амплитуда [рад], ω - круговая частота колебаний [с^{-1}], t - время [с]) может быть представлено [1, 5, 6]:

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y_{\text{ст}}}(\alpha_0) + C_{y_{\text{в.к.}}}^\alpha \cdot \alpha_s \cdot \sin(\omega \cdot t) + C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \alpha_s \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) ; \\ m_z &= m_{z_{\text{ст}}}(\alpha_0) + m_{z_{\text{в.к.}}}^\alpha \cdot \alpha_s \cdot \sin(\omega \cdot t) + m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \alpha_s \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) , \end{aligned} \quad (15)$$

где: $C_{y_{\text{ст}}}(\alpha_0)$, $m_{z_{\text{ст}}}(\alpha_0)$ – статические составляющие; $C_{y_{\text{в.к.}}}^\alpha$, $m_{z_{\text{в.к.}}}^\alpha$, $C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}$ – безразмерные аэродинамические производные, могут быть измерены в аэродинамических трубах (АДТ) по методу вынужденных колебаний (ВК).

Производные $C_{y_{\text{в.к.}}}^\alpha$, $m_{z_{\text{в.к.}}}^\alpha$ является функциями α и ω (при этом ω часто заменяют безразмерной частотой, или числом Струхала, $\bar{\omega} = \text{Sh} = \frac{\omega \cdot b_A}{V}$).

Сопоставление уравнений (1), (6), (15) дает [1, 5, 6] выражения производных:

$$C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) = C_{y_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} + \frac{K_c(\alpha)}{1 + \omega^2 \cdot \tau_1^2} \cdot \frac{V}{b_A} ; \quad m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) = m_{z_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} + \frac{K_m(\alpha)}{1 + \omega^2 \cdot \tau_1^2} \cdot \frac{V}{b_A} . \quad (16)$$

Выражения этих же производных, найденные в рамках традиционной линейной модели АХ (с одной НП) [7], имеют вид

$$C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) = C_{y_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} ; \quad m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) = m_{z_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} ,$$

где: $C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}$ – результирующие НП (НП традиционного описания), могут быть измерены в АДТ методами [5, 7], при которых угловая скорость физической модели $\omega_z = 0$.

При новом обозначении производных $C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}$ (в виде комплексов вращательной и нестационарной производных – комплексов ВНП) и дробных выражений в (16) (в виде НП), из последних выражений и выражений (16) можно записать

$$\begin{aligned} C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) &= \left(C_{y_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} \right) (\alpha, \omega) = C_{y_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} + C_{y_{\text{с.о.л}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) ; \\ m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) &= \left(m_{z_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} \right) (\alpha, \omega) = m_{z_{\text{ст}}}^{\bar{\omega}_z} + m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} + m_{z_{\text{с.о.л}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) ; \\ C_{y_{\text{ст}}}^{\bar{\alpha}} &= C_{y_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} + C_{y_{\text{с.о.л}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) ; \quad m_{z_{\text{ст}}}^{\bar{\alpha}} = m_{z_{\text{в.к.}}}^{\bar{\alpha}} + m_{z_{\text{с.о.л}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) , \end{aligned} \quad (17)$$

где: $C_{y_{\text{с.о.л}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$, $m_{z_{\text{с.о.л}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$ – безразмерные НП, соответствующие структуре обтекания, линейной постановки (НП СОЛ), которые из (16) с учетом (7) равны

$$\begin{aligned}
C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) &= -(\tau_1 + \tau_2) \cdot C_y^x(\alpha) \cdot \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{V}{b_A} \cdot \frac{1}{1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2} = A(\omega) \cdot C_y^x(\alpha) \cdot \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} ; \\
m_{z_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega) &= -(\tau_1 + \tau_2) \cdot m_z^x(\alpha) \cdot \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{V}{b_A} \cdot \frac{1}{1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2} = A(\omega) \cdot m_z^x(\alpha) \cdot \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} ,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{причем } A(\omega) = -\frac{V}{b_A} \cdot \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{(1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2)} . \tag{19}$$

При наличии данных измерения комплексов ВНП, в соответствии с (17), можно определить опытные НП СОЛ, вычитая из комплексов ВНП суммы $(C_y^{\bar{\omega}_z} + C_{y_*}^{\bar{\alpha}})$ и $(m_y^{\bar{\omega}_z} + m_{y_*}^{\bar{\alpha}})$, которые в первом приближении равны измеренным комплексам ВНП для малых углов атаки $\alpha_{мл} = (0 \dots 6^\circ)$ [6].

Введем безразмерное отношение K_l производных СОЛ, указанных в (18), для $\omega = \omega_n$

$$K_l = \frac{m_{z_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)}{C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)} . \tag{20}$$

Из (18) следует, что $K_l = f(\alpha)$ и

$$K_l(\alpha) = \frac{m_z^x(\alpha)}{C_y^x(\alpha)} . \tag{21}$$

Для моделирования продольного движения необходима информация о функции $x_0(\alpha)$. Физический смысл этой функции поясняется в [1, 6], а аппроксимация ее различными выражениями (с параметрами, связанными с ее точкой перегиба) представлена в [3].

Выявлены следующие недостатки рассмотренной модели АХ: отсутствуют указания по выбору параметров динамических составляющих АХ для большого диапазона изменения углов атаки; известное выражение $m_{z_{H1}}(\alpha, x)$ предназначено для строго определенной центровки самолета [2] (при других центровках возникает погрешность моделирования); известные ММ функции

$x_0(\alpha)$ имеют одну точку перегиба (и соответственно $\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}$ с одним минимумом) и не позволяют с их помощью аппроксимировать по (18) опытные НП СОЛ, содержащие по углу α два локальных максимума (например [1] рис. 8.3.20, [7] рис. 2).

Таким образом задачей настоящего исследования является: пояснение закономерности изменения производных $C_y^{\bar{\omega}_z}$, $m_y^{\bar{\omega}_z}$, $C_{y_*}^{\bar{\alpha}}$, $m_{y_*}^{\bar{\alpha}}$ от угла α для большого диапазона углов атаки, разработка выражения $m_{z_{H1}}(\alpha, x)$, включающего параметр зависимости от центровки самолета, разработка ММ $x_0(\alpha)$, позволяющей аппроксимацию опытных НП СОЛ, а также выработка методики

по выбору параметров динамических составляющих АХ для большого диапазона изменения углов атаки. Решению поставленной задачи посвящены последующие главы.

2. Пояснение зависимости производных $C_{y^{\bar{\omega}_z}}$, $m_{y^{\bar{\omega}_z}}$ и $C_{y^{\bar{\alpha}}}$, $m_{y^{\bar{\alpha}}}$ от угла атаки

ВП входят в уравнения динамики продольного движения самолета и обуславливают возникновение демпфирующего момента [8, 9], препятствующего продольному угловому движению.

Пусть движущийся самолет (см.рис. 1 а)) (с вектором \mathbf{V} линейной скорости, проходящим через центр масс точку O , и углом атаки α) вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью ω_z . В каждой точке оси OX , перпендикулярно ей, например в точке A (x_A – координата точки A вдоль продольной оси), появляется вектор \mathbf{V}_y линейной скорости. Проекция \mathbf{V}_y на ось OY

$$V_y = \omega_z \cdot x_A. \quad (22)$$

Результирующий вектор \mathbf{V}_A линейной скорости точки A определяется суммой \mathbf{V} и \mathbf{V}_y (см. рис 1 б)). Обозначим приращение местного угла атаки (по отношению к углу атаки α в точке O) через $\Delta\alpha$. Из рис. 2 б) видно, что местный угол атаки в точке A меньше угла α . Соответственно угол между вектором \mathbf{V}_A и \mathbf{V} равен $(-\Delta\alpha)$. Найдем значения V_A и $\Delta\alpha$ из треугольника скоростей рис. 1 б). По теореме косинусов

$$V_A = \sqrt{V_y^2 + V^2 - 2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \cdot V_y \cdot V}, \text{ или } \frac{V_A}{V} = \sqrt{\left(\frac{V_y}{V}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \left(\frac{V_y}{V}\right) \cdot \sin(\alpha)}.$$

Практически $\left|\frac{V_y}{V}\right| = 0 \dots 0.06$ и $\frac{V_A}{V} = 0.94 \dots 1.06$. Соответственно можно принять $V_A \approx V$.

Из треугольника скоростей по теореме синусов имеем $\frac{V_y}{\sin(-\Delta\alpha)} = \frac{V_A}{\sin(90^\circ - \alpha)}$.

Откуда с учетом малости угла $\Delta\alpha$ находим $\Delta\alpha \approx -\frac{V_y}{V_A} \cdot \cos(\alpha) \approx -\frac{V_y}{V} \cdot \cos(\alpha)$.

Так что, подставляя значение V_y из (22), получаем приращение местного угла атаки

$$\Delta\alpha \approx -\frac{\omega_z \cdot x_A}{V} \cdot \cos(\alpha).$$

Дополнительные аэродинамические силы и их моменты тангажа пропорциональны приращению местного угла $\Delta\alpha$ и, следовательно, произведению $\omega_z \cdot \cos(\alpha)$. Так что и просуммированные по всей длине самолета аэродинамические коэффициенты C_y , m_z (от действия этих сил и моментов) также пропорциональны $\omega_z \cdot \cos(\alpha)$. Следовательно результирующие ВП пропорциональны $\cos(\alpha)$.

ЛНП, как показано в работе [10], определяются главным образом задержкой скоса потока на горизонтальном оперении при изменении угла атаки. Это явление, связанное со скосом потока, имеет место на малых углах атаки и отсутствует при $\alpha \approx 90^\circ$. Поэтому для большого диапазона углов атаки при моделировании вполне допустимо принять зависимость ЛНП от угла атаки косинусоидальной.

3. Определение связи между производными $m_{z_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$, $C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$; уточнение математической модели функции $m_{z_H}(\alpha, x)$

Допустим, что показанный на рис. 2а) график $C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)$ получен для конкретной частоты ($\omega = \omega_n$) из опытных комплексов ВВП. Допустим также, что ему соответствуют графики $m_{z_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)$ из опытных данных, представленные на рис. 2б) для различных центровок самолета ($m_{z_{c.o.lA}}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_{c.o.lB}}^{\bar{\alpha}}$, $m_{z_{c.o.lC}}^{\bar{\alpha}}$). На рис. 2 в) приведены соответствующие отношения производных СОЛ $K_l(\alpha)$, рассчитанные по (20) (K_{lA} , K_{lB} , K_{lC}).

Отрицательная (демпфирующая) производная $m_{z_{c.o.lA}}^{\bar{\alpha}}$ и соответствующее отрицательное значение $K_{lA}(\alpha)$ получены для самолета X-31А [11]. Положительная (антидемпфирующая) производная $m_{z_{c.o.lC}}^{\bar{\alpha}}$ (с положительным значением K_{lC}) взята из [1] (рис. 8.1.3, 8.3.6., 8.3.19, 8.3.20).

Промежуточная производная $m_{z_{c.o.lB}}^{\bar{\alpha}}$ (с соответствующим малым значением $K_{lB}(\alpha)$) – из [12, 13].

Изучение полученных $K_l(\alpha)$ показывает, что это отношение подчиняется закону

$$K_l(\alpha) = K_{0l} + \Delta K_l(\alpha), \quad (23)$$

где: K_{0l} – постоянная составляющая отношения; $\Delta K_l(\alpha)$ – переменная составляющая.

Аналитически $K_l(\alpha)$ может быть найдено из следующих соображений, аналогичных [14].

При малом воздействии $\dot{\alpha}$ на крыле возникает нестационарная сила (см. рис. 3)

$$F_{c.o.l}(\alpha) = C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha) \cdot \bar{\alpha} \cdot q \cdot S \quad (q \text{ – скоростной напор [Па], } S \text{ – площадь крыла [м}^2\text{]}).$$

Эта сила создает момент относительно центра масс самолета (или оси колебаний физической модели)

$$F_{c.o.l}(\alpha) \cdot l_{c.o.}(\alpha) = C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha) \cdot \bar{\alpha} \cdot q \cdot S \cdot l_{c.o.}(\alpha) \quad (l_{c.o.}(\alpha) \text{ – плечо нестационарной силы } F_{c.o.l}(\alpha)).$$

Соответственно коэффициент момента тангажа

$m_{z_{c.o.л}}(\alpha) = m_{z_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha) \cdot \bar{\alpha} = \frac{F_{c.o.л}(\alpha) \cdot l_{c.o.}(\alpha)}{q \cdot S \cdot b_A} = \frac{C_{y_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha) \cdot \bar{\alpha} \cdot l_{c.o.}(\alpha)}{b_A}$. Откуда по (20) можно найти выра-

жение $K_l(\alpha)$

$$K_l(\alpha) = \frac{m_{z_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)}{C_{y_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)} = \frac{l_{c.o.}(\alpha)}{b_A}. \quad (24)$$

Зависимость $l_{c.o.}(\alpha)$ может быть представлена суммой

$$l_{c.o.}(\alpha) = l_{0_{c.o.}} + \Delta l_{c.o.}(\alpha),$$

где: $l_{0_{c.o.}}$ – постоянная составляющая плеча [м], зависящая от центровки самолета; $\Delta l_{c.o.}(\alpha)$ –

переменная составляющая плеча [м], зависящая от угла атаки (смещение силы $F_{c.o.л}(\alpha)$).

Соответственно из (23), (24)

$$K_{0_l} = \frac{l_{0_{c.o.}}}{b_A}; \quad \Delta K_l(\alpha) = \frac{\Delta l_{c.o.}(\alpha)}{b_A}. \quad (25)$$

Обозначим (см. рис.3) расстояния от носика профиля крыла: l_T – до центра вращения O, $l_{н.с.o.}(\alpha)$ – до фокуса (линии действия) силы $F_{c.o.л}(\alpha)$. Поскольку $l_{н.с.o.}(\alpha) = l_{0_{н.с.o.}} - \Delta l_{c.o.}(\alpha)$ (где $l_{0_{н.с.o.}}$ – постоянная составляющая расстояния $l_{н.с.o.}(\alpha)$) и $l_{н.с.o.}(\alpha) = l_T - l_{c.o.}(\alpha) = \bar{x}_T \cdot b_A - l_{c.o.}(\alpha)$ (где \bar{x}_T – центровка масс самолета или колебаний физической модели), то

$$l_{c.o.}(\alpha) = \bar{x}_T \cdot b_A - l_{0_{н.с.o.}} + \Delta l_{c.o.}(\alpha). \text{ Откуда (с учетом приведенной после (24) структуры } l_{c.o.}(\alpha))$$

$$l_{0_{c.o.}} = \bar{x}_T \cdot b_A - l_{0_{н.с.o.}}.$$

Таким образом коэффициент K_l является коэффициентом центрирования нестационарной силы (или относительным плечом нестационарной силы $F_{c.o.л}(\alpha)$), K_{0_l} – показателем центровки, ΔK_l – показателем смещения силы $F_{c.o.л}(\alpha)$.

Теперь выражение $m_{z_{H_1}}(\alpha, x)$ (9) можно изменить с введением параметра, учитывающего центровку и смещение плеча нестационарной силы. Так что измененное аналитическое выражение функции $m_{z_{H_1}}(\alpha, x)$ будет выглядеть (с присвоением индекса “2”) как

$$m_{z_{H_2}}(\alpha, x) = K_l(\alpha) \cdot C_{y_{H_1}}(\alpha, x). \quad (26)$$

Выражения $C_{y_{H_1}}(\alpha, x)$ (8), $C_{y_{c.o.л}}(\alpha, x)$ (10), а также $C_{y_1^x}(\alpha, x)$ (12), $C_{y_1^x}(\alpha)$ (13) остаются в силе. НС коэффициента момента тангажа, соответствующая структуре обтекания, подсчитанная из (2), (26) (во изменение (11)) представляется как

$$m_{z_{c.o.н2}}(\alpha, x) = K_l(\alpha) \cdot C_{y_{c.o.н1}}(\alpha, x) .$$

Откуда производная $m_{z_{c.o.н2}}(\alpha, x)$ по x из (4)

$$m_{z_2}^x(\alpha, x) = \frac{\partial m_{z_{c.o.н2}}(\alpha, x)}{\partial x} = K_l(\alpha) \cdot \frac{\partial C_{y_{c.o.н1}}(\alpha, x)}{\partial x} = K_l(\alpha) \cdot C_{y_1}^x(\alpha, x) .$$

Соответственно производная по x при малых $\dot{\alpha}$ из (5):

$$m_{z_2}^x(\alpha) = m_{z_2}^x(\alpha, x = x_0(\alpha)) = K_l(\alpha) \cdot C_{y_1}^x(\alpha) . \quad (27)$$

Обозначим отношение $K_l(\alpha)$ (21) измененной модели через $K_{l_2}(\alpha)$ и найдем его из (27)

$$K_{l_2}(\alpha) = \frac{m_{z_2}^x(\alpha)}{C_{y_1}^x(\alpha)} = K_l(\alpha) .$$

Отсюда следует, что измененная модель $m_{z_{c.o.2}}$ в соответствии с (23), (25) учитывает влияние центровки и смещения нестационарной силы, а также отвечает закону (21).

4. Аппроксимация опытных зависимостей $C_{y_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$ и разработка новых моделей $x_0(\alpha)$

Для нахождения некоторых параметров динамических составляющих АХ и для использования опытных данных НП СОЛ, прежде всего необходимо аппроксимировать эти данные в соответствии с (18).

Производная $C_y^x(\alpha)$ приблизительно равна $C_{y_1}^x(\alpha)$ из (13), причем $x_0(\alpha)$, входящая в (13) – монотонная. Соответственно $C_y^x(\alpha)$ является монотонно возрастающей в диапазоне $\alpha = 10^\circ - 70^\circ$. Так что в соответствии с (18) местоположение по α максимумов функции

$C_{y_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)$ определяется расположением минимумов функции $\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}$. Поскольку опытные

$C_{y_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)$ могут содержать один [12] или два [7, 11] локальных максимума, то для аппрок-

симации этих данных должны быть выбраны выражения $x_0(\alpha)$ соответственно типа А ($\frac{dx_{0A}(\alpha)}{d\alpha}$

имеет один локальный минимум) или типа В ($\frac{dx_{0B}(\alpha)}{d\alpha}$ с двумя минимумами) (см. рис. 4). Тип А

(известный) имеет одну точку перегиба (точку О) на угле атаки α_x . Тип В (предложенный) имеет

три точки перегиба B_1, O, B_2 (соответственно на углах атаки $\alpha_{x_1}, \alpha_x, \alpha_{x_2}$). Обозначим:

$$\left| \frac{dx_{0A}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_x) \right| = \left| \frac{dx_{0B}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_x) \right| = K_x ; \quad \left| \frac{dx_{0B}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_{x_1}) \right| = \left| \frac{dx_{0B}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_{x_2}) \right| = K_y ; \quad (28)$$

$\Delta\alpha_B = \alpha_{x_2} - \alpha_x = \alpha_x - \alpha_{x_1}$; причем $K_y \geq K_x$.

В точке α_x перегиба $\frac{dx_{0A}(\alpha)}{d\alpha}$ минимальна, а $\frac{dx_{0B}(\alpha)}{d\alpha}$ имеет локальный максимум. График

ММ функции $x_0(\alpha)$ очевидно должен обладать симметрией:

$$x_0(\alpha_x) = 0.5 ; \quad x_0(\alpha - \alpha_x) = 1 - x_0[-(\alpha - \alpha_x)] . \quad (29)$$

Аппроксимация $x_0(\alpha)$ проводилась на основе гладкой производной $\frac{dx_{0A}(\alpha)}{d\alpha}$, например [3],

$$x_{0A_1}(\alpha) = 0.5 \{ 1 - \tanh[2 \cdot K_x \cdot (\alpha - \alpha_x)] \} .$$

Опытные зависимости $C_{yc.o.n}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)$ могут иметь негладкие локальные экстремумы

(например [11, 12]). Соответственно предлагается аппроксимирующая функция $x_{0B_1}(\alpha)$ с неглад-

кими экстремумами $\frac{dx_{0B_1}(\alpha)}{d\alpha}$ (см. рис. 5а)).

$$x_{0B_1}(\alpha) = \begin{cases} 1 - (0.5 - F) \cdot e^{C(\alpha - \alpha_{x_1})} & \text{при } \alpha \leq \alpha_{x_1} ; \\ 0.5 - K_x \cdot (\alpha - \alpha_x) + \frac{K_y - K_x}{\Delta\alpha_B} \cdot \frac{(\alpha - \alpha_x)^2}{2} & \text{при } \alpha_{x_1} < \alpha \leq \alpha_x ; \\ 0.5 - K_x \cdot (\alpha - \alpha_x) - \frac{K_y - K_x}{\Delta\alpha_B} \cdot \frac{(\alpha - \alpha_x)^2}{2} & \text{при } \alpha_x < \alpha \leq \alpha_{x_2} ; \\ (0.5 - F) \cdot e^{-C(\alpha - \alpha_{x_2})} & \text{при } \alpha_{x_2} < \alpha , \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{где: } F = \frac{K_x + K_y}{2} \cdot \Delta\alpha_B ; \quad C = \frac{K_y}{0.5 - F} . \quad (31)$$

$$\frac{x_{0B_1}(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} -K_y \cdot e^{C(\alpha - \alpha_{x_1})} & \text{при } \alpha \leq \alpha_{x_1} ; \\ -K_x + \frac{K_y - K_x}{\Delta\alpha_B} \cdot (\alpha - \alpha_x) & \text{при } \alpha_{x_1} < \alpha \leq \alpha_x ; \\ -K_x - \frac{K_y - K_x}{\Delta\alpha_B} \cdot (\alpha - \alpha_x) & \text{при } \alpha_x < \alpha \leq \alpha_{x_2} ; \\ -K_y \cdot e^{-C(\alpha - \alpha_{x_2})} & \text{при } \alpha_{x_2} < \alpha . \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Значения} \\ (32) \end{array} \right\}$$

$x_{0B_1}(\alpha)$ и $\frac{dx_{0B_1}(\alpha)}{d\alpha}$ в точках экстремумов $\frac{dx_{0B_1}(\alpha)}{d\alpha}$:

$$x_{0B_1}(\alpha_{x_1}) = 0.5 + F ; \quad x_{0B_1}(\alpha_x) = 0.5 ; \quad x_{0B_1}(\alpha_{x_2}) = 0.5 - F ;$$

$$\frac{dx_{0B_1}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_{x_1}) = -K_y ; \quad \frac{dx_{0B_1}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_x) = -K_x ; \quad \frac{dx_{0B_1}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_{x_2}) = -K_y .$$

Функция $x_{0B1}(\alpha)$ переходит в функцию $x_{0A4}(\alpha)$ с негладким минимумом $\frac{dx_{0A4}(\alpha)}{d\alpha}$, если

положить в (30)-(32) $\Delta\alpha_B = 0$ (тогда $K_y = K_x$; $\alpha_{x1} = \alpha_{x2} = \alpha_x$; $F = 0$):

$$x_{0A4}(\alpha) = \begin{cases} 1 - 0.5 \cdot e^{-2K_x(\alpha - \alpha_x)} & \text{при } \alpha \leq \alpha_x; \\ 0.5 \cdot e^{-2K_x(\alpha - \alpha_x)} & \text{при } \alpha_x < \alpha; \end{cases} \quad \frac{dx_{0A4}(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} -K_x \cdot e^{-2K_x(\alpha - \alpha_x)} & \text{при } \alpha \leq \alpha_x; \\ -K_x \cdot e^{-2K_x(\alpha - \alpha_x)} & \text{при } \alpha_x < \alpha; \end{cases}$$

$$x_{0A4}(\alpha_x) = 0.5; \quad \frac{dx_{0A4}(\alpha)}{d\alpha} = -K_x.$$

Возвратимся к аппроксимации опытных $C_{yc.o.l}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_n)$ по (18). При этом будем считать, что $A(\omega = \omega_{мин}) = A$ и $C_{yc.o.l}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega = \omega_{мин}) = C_{yc.o.l}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$, т.е. при $\omega \rightarrow 0$ из (19)

$$A = -\frac{V}{b_A} \cdot (\tau_1 + \tau_2). \quad (33)$$

На рис. 5б) представлены графики зависимости $f_1(\alpha) = A \cdot C_{y11}^x(\alpha)$ (где $C_{y11}^x(\alpha)$ - ММ функции $C_y^x(\alpha)$, подсчитывается по (13) с использованием (30), (31)) и произведения $\frac{dx_{0B1}(\alpha)}{d\alpha} \cdot f_1(\alpha)$,

обозначенного $C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$. Следовательно

$$C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha) = A \cdot C_{y11}^x(\alpha) \cdot \frac{dx_{0B1}(\alpha)}{d\alpha}. \quad (34)$$

В соответствии с (18) функция $C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$ является ММ зависимости $C_{yc.o.l}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$. При этом значения этой модели в точках экстремумов из (13), (32), (34) равны

$$C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha_x) = A \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\alpha_x) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5}}\right) \cdot (-K_x) = -3.79 \cdot A \cdot \sin(\alpha_x) \cdot K_x; \quad (35)$$

$$C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{x1}) = A \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\alpha_{x1}) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5 + F}}\right) \cdot (-K_y); \quad (36)$$

$$C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{x2}) = A \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\alpha_{x2}) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5 - F}}\right) \cdot (-K_y).$$

Так что при нахождении параметров экспериментально полученной $C_{yc.o.l}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_{мин})$ возможно использовать зависимости, приведенные для модели $C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$, и считать

$$C_{yc.o.l}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_{мин}) \approx C_{yc.o.l11}^{\bar{\alpha}}(\alpha). \quad (37)$$

5. Методика выбора параметров динамических составляющих АХ

Для нахождения параметров динамических составляющих коэффициентов АХ используем ММ $C_{y_{H1}}(\alpha, x)$, $m_{z_{H2}}(\alpha, x)$, $x_{0_{B1}}(\alpha)$, $C_{y_{c.o.l1}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$. С целью сравнения параметров, зависящих от α , будем находить их в точках экстремумов $C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$. При этом необходимо располагать зависимостями комплексов ВПП, которые например показаны на рис. 6. График комплекса производных $(m_{z^{\bar{\omega}_z}} + m_{z^{\bar{\alpha}}})_{B.K.}(\alpha, \omega)$ (рис. 6б) по углу атаки α в данном примере содержит участок антидемпфирования, где этот комплекс положительный. Последовательность определения параметров следующая:

5.1 По данным разделения комплексов определяем максимальные значения ВП, соответствующие малым углам атаки ($\alpha_{мл} = 0 \dots 6^\circ$) $C_{y^{\bar{\omega}_z}}(\alpha_{мл})$, $m_{z^{\bar{\omega}_z}}(\alpha_{мл})$ для данной компоновки (например из таблицы 1 гл.8 в [1]).

5.2 Определяем максимальные значения ЛНП, используя комплексы ВПП рис. 6 для малых углов атаки $\alpha_{мл}$:

$$\begin{aligned} C_{y_*}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{мл}) &= (C_{y^{\bar{\omega}_z}} + C_{y^{\bar{\alpha}}})_{B.K.}(\alpha_{мл}) - C_{y^{\bar{\omega}_z}}(\alpha_{мл}); \\ m_{z_*}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{мл}) &= (m_{z^{\bar{\omega}_z}} + m_{z^{\bar{\alpha}}})_{B.K.}(\alpha_{мл}) - m_{z^{\bar{\omega}_z}}(\alpha_{мл}). \end{aligned} \quad (38)$$

5.3 Из графика комплекса $(C_{y^{\bar{\omega}_z}} + C_{y^{\bar{\alpha}}})_{B.K.}(\alpha, \omega = \omega_1)$ рис. 6а) (где ω_1 - минимальная заданная при испытаниях частота) определяем углы атаки, соответствующие экстремальным значениям. Эти углы

атаки соответственно равны α_{x1} , α_x , α_{x2} . При этом уточняем значения $\alpha_x = \frac{\alpha_{x1} + \alpha_{x2}}{2}$ и (в соот-

ветствии с (28)) $\Delta\alpha_B = \frac{\alpha_{x2} - \alpha_{x1}}{2}$.

5.4 Считая, что закон изменения ВП и ЛНП от угла атаки косинусоидальный, из (38) находим зависимость сумм указанных производных

$$\begin{aligned} (C_{y^{\bar{\omega}_z}} + C_{y_*}^{\bar{\alpha}})(\alpha) &= [C_{y^{\bar{\omega}_z}}(\alpha_{мл}) + C_{y_*}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{мл})] \cdot \cos(\alpha); \\ (m_{z^{\bar{\omega}_z}} + m_{z_*}^{\bar{\alpha}})(\alpha) &= [m_{z^{\bar{\omega}_z}}(\alpha_{мл}) + m_{z_*}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{мл})] \cdot \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (39)$$

5.5 В соответствии с (17), из графиков комплексов ВПП, полученных при $\omega = \omega_1$, и (39) определяем значения НП СОЛ в функции α (см. рис. 6 а))

$$\begin{aligned} C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_1) &= (C_{y^{\bar{\omega}_z}} + C_{y^{\bar{\alpha}}})_{B.K.}(\alpha, \omega_1) - (C_{y^{\bar{\omega}_z}} + C_{y_*}^{\bar{\alpha}})(\alpha); \\ m_{z_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_1) &= (m_{z^{\bar{\omega}_z}} + m_{z^{\bar{\alpha}}})_{B.K.}(\alpha, \omega_1) - (m_{z^{\bar{\omega}_z}} + m_{z_*}^{\bar{\alpha}})(\alpha). \end{aligned} \quad (40)$$

5.6 Из данных (40) для $\omega = \omega_1$ подсчитываем по (20) опытную зависимость отношения производных СОЛ от угла атаки

$$K_{t_{\text{оп}}}(\alpha) = \frac{m_{z_{\text{с.о.п}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_1)}{C_{y_{\text{с.о.п}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_1)}. \quad (41)$$

Полученную зависимость коэффициента центрирования нестационарной силы используем в модели $m_{z_{\text{H}_2}}(\alpha, x)$.

5.7 Если каким-либо способом измерены и выбраны постоянные времени τ_1 (например [2, 6, 15])

и τ_2 (например [2, 6, 16]), то из полученных данных в соответствии с (36), (37) можно определить

параметры модели $x_{0_{\text{B}_1}}(\alpha)$ из (30):

а) Находим постоянную A из (33).

б) Определяем значения

$$U_1 = \frac{C_{y_{\text{с.о.п}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{x_1}, \omega_1)}{\sin(\alpha_{x_1})}; \quad U_2 = \frac{C_{y_{\text{с.о.п}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha_{x_2}, \omega_1)}{\sin(\alpha_{x_2})}.$$

в) Используя (35), подсчитываем модуль K_x

$$K_x = -\frac{C_{y_{\text{с.о.п}}}^{\bar{\alpha}}(\alpha_x, \omega_1)}{3.79 \cdot A \cdot \sin(\alpha_x)}.$$

г) Модуль K_{y_1} (первого приближения) находим из (36), считая $F = 0$

$$K_{y_1} = -\frac{1}{3.79 \cdot A} \cdot \frac{U_1 + U_2}{2}.$$

д) В соответствии с (31) подсчитываем первое приближение F

$$F_1 = \frac{K_x + K_{y_1}}{2} \cdot \Delta\alpha_B.$$

е) Используя (36), вычисляем параметры второго приближения

$$K_{y_{\text{II}}} = -\frac{1}{\pi \cdot A} \cdot \left[\frac{U_1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5 + F_1}}\right)} + \frac{U_2}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5 - F_1}}\right)} \right];$$

$$F_{\text{II}} = \frac{K_x + K_{y_{\text{II}}}}{2} \cdot \Delta\alpha_B.$$

ж) Окончательно получаем модуль K_y

$$K_y = -\frac{1}{\pi \cdot A} \cdot \left(\frac{U_1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5 + F_{II}}}\right)} + \frac{U_1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5 - F_{II}}}\right)} \right).$$

з) Подсчитываем параметры F, C по (31).

Приведем некоторые результаты подсчета коэффициента центрирования нестационарной силы по (40), (41) из данных измерений.

По данным [1] а) рис. 8.3.20 $K_l(\alpha_{x_1}) = 0.454$, б) рис. 8.3.6 $K_l(\alpha_{x_1}) = 0.510$ (характер антидемпфирования).

По данным [7] рис. 2.3 $K_l(\alpha_{x_2}) = 0.322$ (характер антидемпфирования).

По данным [11] рис. 14, 17 $K_l(\alpha_{x_2}) = -0.359$ (характер демпфирования).

Подсчитаем также коэффициент центрирования нестационарной силы, на который рассчитана функция $m_{z_{H_1}}(\alpha, x)$ при $\alpha = \alpha_x$ с использованием (13), (14), (29).

$$K_l(\alpha_x) = \frac{m_{z_1}^x(\alpha_x)}{C_{y_1}^x(\alpha_x)} = \frac{5}{16} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{0.5}}\right) \cdot (1 - 1.2 \cdot \sqrt{0.5} + 0.5) + \left(1 - \frac{0.6}{\sqrt{0.5}}\right) \cdot (1 + \sqrt{0.5})^2}{1 + \frac{1}{\sqrt{0.5}}} = 0.261$$

Откуда следует возможность моделирования с привлечением $C_{y_{H_1}}(\alpha, x)$, $m_{z_{H_1}}(\alpha, x)$, если исследуется самолет с относительным плечом нестационарной силы близким к 0.25 – 0.27.

6. Выводы

6.1 Рассмотрена ММ аэродинамических коэффициентов C_y , m_z с включением НССО $C_{y_{c.o.}}$,

$m_{z_{c.o.}}$. Составляющие $C_{y_{c.o.}}$, $m_{z_{c.o.}}$ имеют две формы представления: нелинейную $C_{y_{c.o.H}}(\alpha, x)$,

$m_{z_{c.o.H}}(\alpha, x)$ и линейную $C_{y_{c.o.L}}(\alpha, t)$, $m_{z_{c.o.L}}(\alpha, t)$. Нелинейная форма базируется на внутренней переменной состояния x , которая в стационарных условиях выражается функцией $x_0(\alpha)$. Линей-

ная форма имеет место при малых отклонениях $(x - x_0(\alpha))$, что на практике проявляется при колебаниях физической модели самолета по углу атаки с малым произведением амплитуды угла на

частоту. При этом могут быть измерены комплексы ВПП и выделены НП СОЛ $C_{y_{c.o.L}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$,

$m_{z_{c.o.L}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega)$.

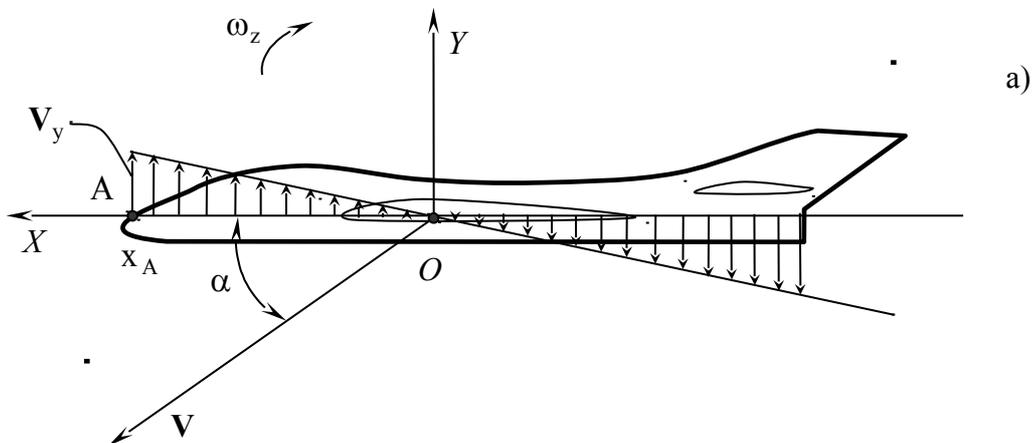
6.2 Модель C_y , m_z имеет так же составляющие, включающие производные существенно меньшие НП СОЛ: это ВП $C_{y^*}^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\omega}_z}$ и ЛНП $C_{y^*}^{\bar{\alpha}}$, $m_z^{\bar{\alpha}}$. Поясняется косинусоидальная зависимость этих производных от угла атаки.

6.3 Отношение производных $K_l(\alpha) = \frac{m_{z_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_n)}{C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_n)}$ зависит от постоянной составляющей плеча не-

стационарной силы, а также от вариаций этого плеча при изменении угла атаки, причем постоянная составляющая плеча определяется центровкой самолета. Параметры модели нелинейной формы $m_{z_H}(\alpha, x)$ и $m_{z_{c.o.H}}(\alpha, x)$ должны включать коэффициент, отражающий длину плеча нестационарной силы. Соответственно предложена модель $m_{z_{H_2}}(\alpha, x)$, $m_{z_{c.o.H_2}}(\alpha, x)$, имеющая сомножителем опытную зависимость $K_l(\alpha)$.

6.4 Получена ММ НП СОЛ $C_{y_{c.o.l11}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$, основанная на аппроксимации зависимости $x_0(\alpha)$ функцией $x_{0_{B_1}}(\alpha)$ с негладкой производной $\frac{dx_{0_{B_1}}(\alpha)}{d\alpha}$. При этом $C_{y_{c.o.l11}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$ моделирует результаты измерений зависимости $C_{y_{c.o.l}}^{\bar{\alpha}}(\alpha, \omega_{мин})$, имеющей два максимума.

6.5 Применяя модели $m_{z_{c.o.H_2}}(\alpha, x)$ и $C_{y_{c.o.l11}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$, по результатам измерения комплексов ВНП, определена последовательность выбора параметров динамических составляющих, необходимых для моделирования продольного движения самолета на больших углах атаки.



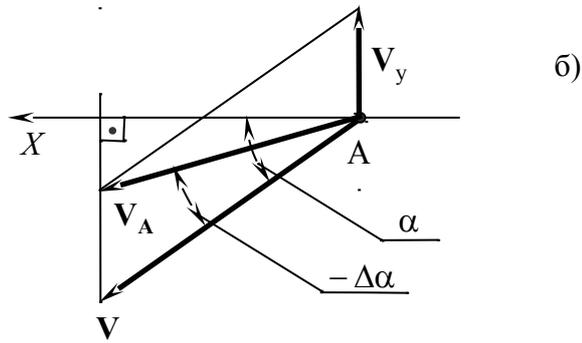


Рис. 1. Определение зависимости вращательных производных от угла атаки: а) возникновение окружных скоростей при вращении самолета, б) построение треугольника с вершинами в точке А.

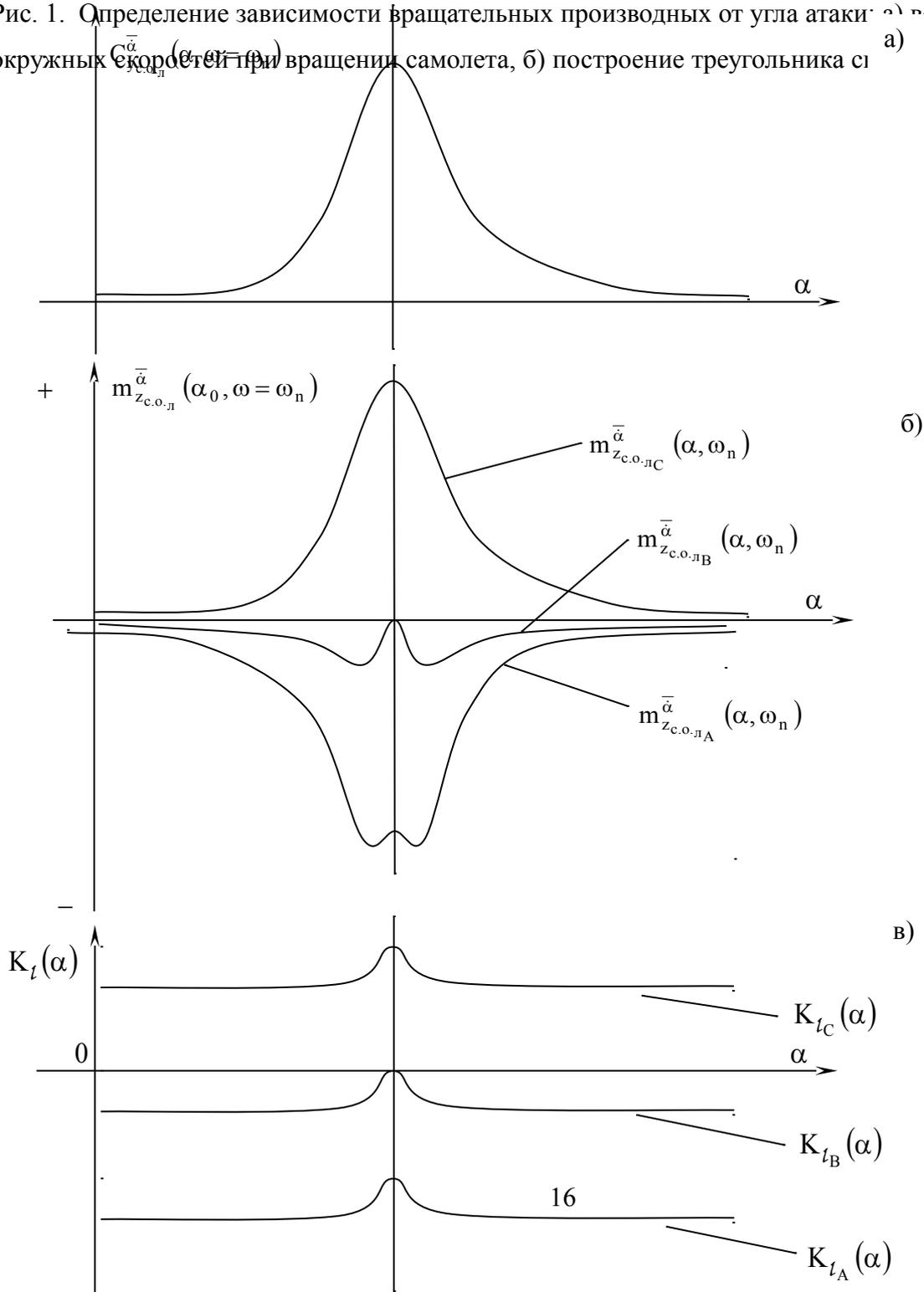


Рис. 2. Нахождение соотношения $K_t(\alpha)$ из опытных данных: а) зависимость $C_{y_{c.o.}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$; б) семейство зависимостей $m_{z_{c.o.}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$; в) семейство зависимостей $K_t(\alpha)$.

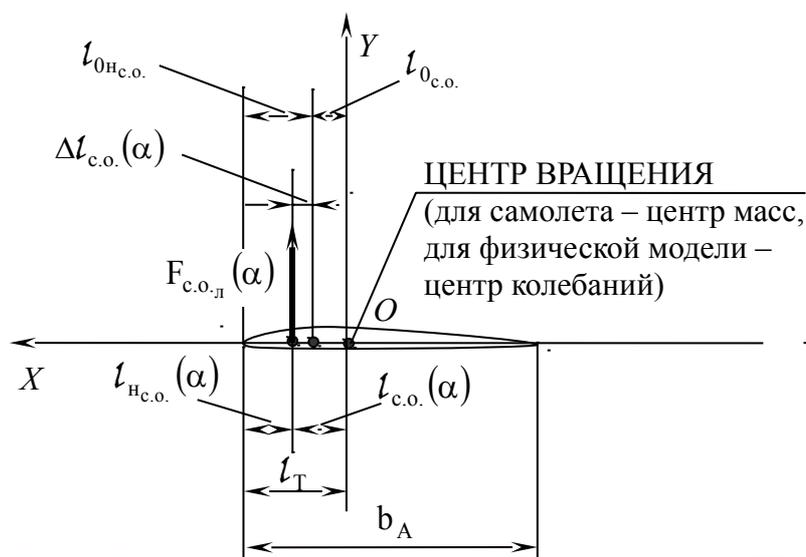
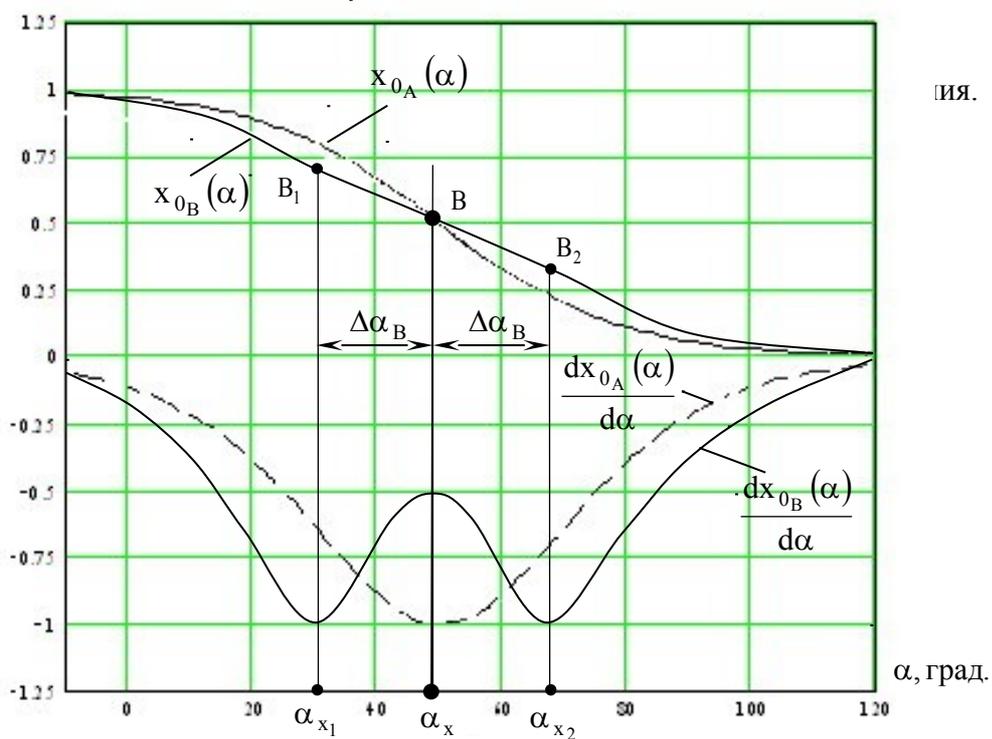


Рис. 3.



ИЯ.

α , град.

Рис. 4. Зависимости $x_{0A}(\alpha)$, $x_{0B}(\alpha)$, $\frac{dx_{0A}(\alpha)}{d\alpha}$, $\frac{dx_{0B}(\alpha)}{d\alpha}$.

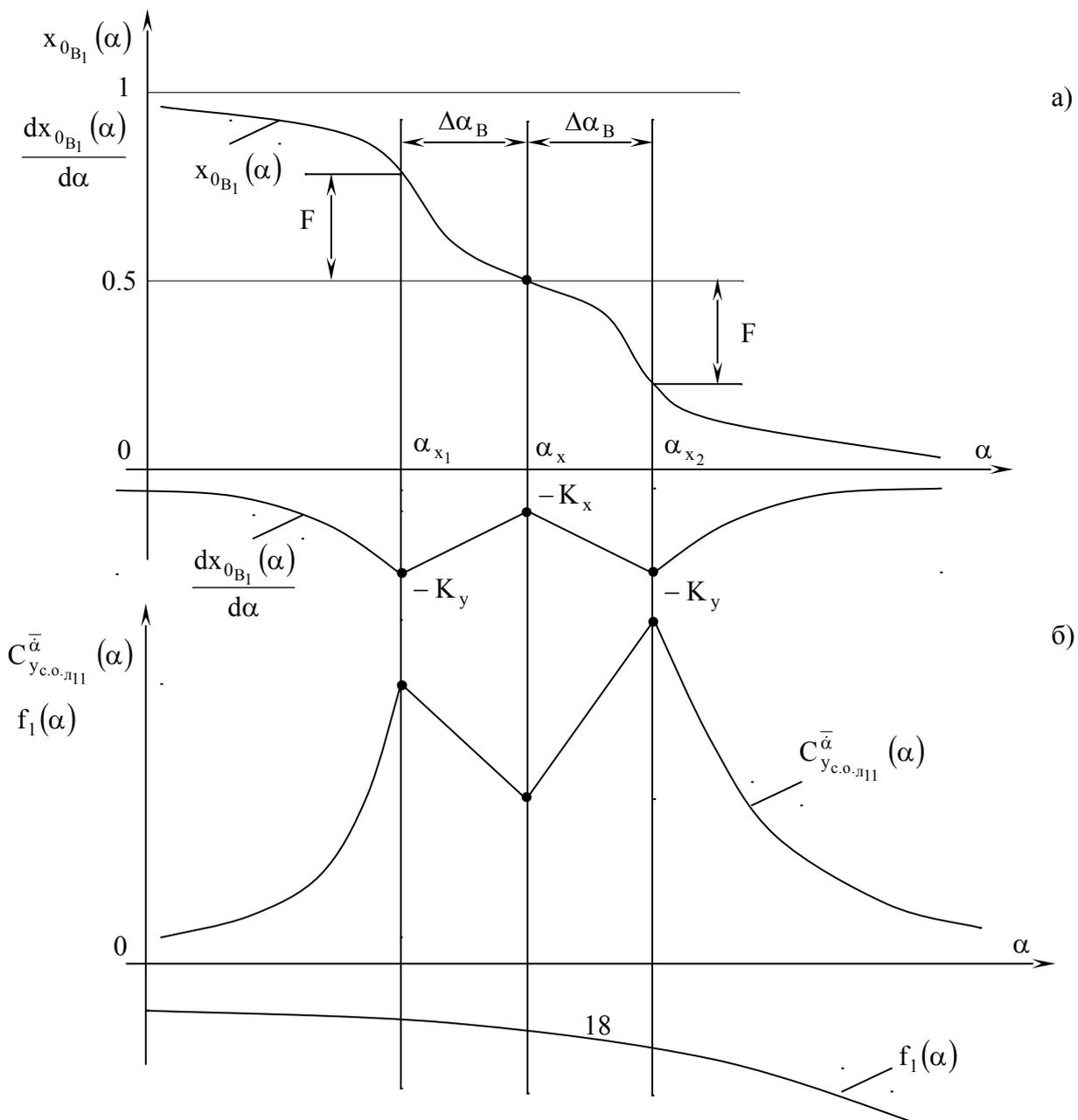


Рис. 5. Формирование графика $C_{y_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$: а) графики $x_{0_{B1}}(\alpha)$ и $\frac{dx_{0_{B1}}(\alpha)}{d\alpha}$, б) графики $f_1(\alpha)$ и $C_{y_{c.o.л}}^{\bar{\alpha}}(\alpha)$.

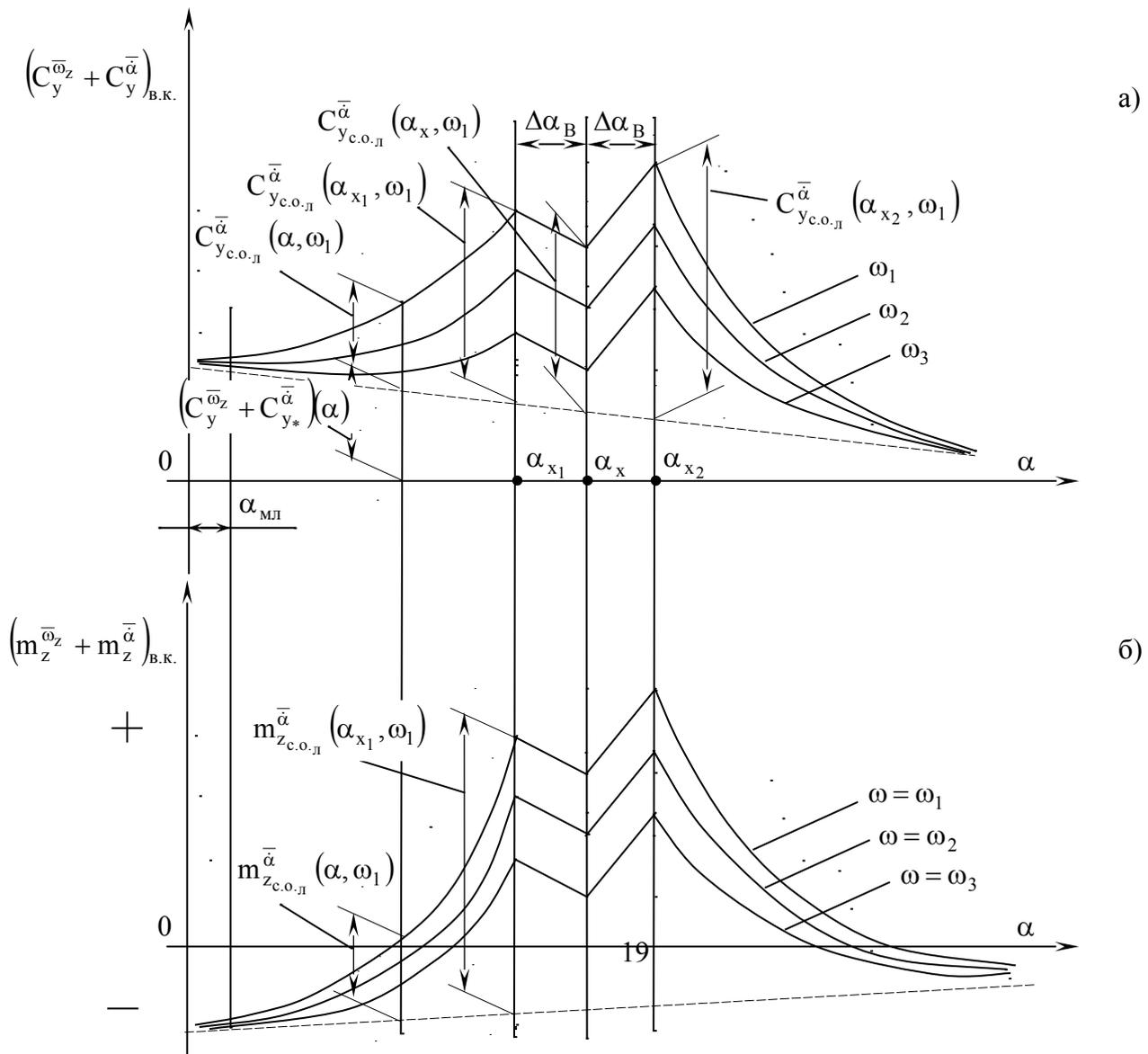


Рис. 6. Зависимости комплексов ВВП от угла атаки (α) и частоты колебаний (ω) при их измерении на модели самолета в АДТ: а) – комплексов производных $\left(C_y^{\bar{\omega}_z} + C_y^{\bar{\alpha}}\right)_{в.к.}$; б) – комплексов производных $\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_{в.к.}$.

Список литературы

1. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. /Под редакцией Бюшгенса Г. С. – М.: Наука, 1998. – 816 с.
2. Гоман М. Г., Столяров Г. И., Тартышников С. Л., Усольцев С. П., Храбров А.Н. Описание продольных аэродинамических характеристик самолета на больших углах атаки с учетом динамических эффектов отрывного обтекания. Препринт ЦАГИ № 9. 1990. - с. 1-56.
3. Захаров М. А. Математическая модель коэффициентов аэродинамических характеристик в продольном движении летательного аппарата на больших углах атаки с учетом эффектов отрывного обтекания. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып. 9. -<http://www.mai.ru> (04.07.02).
4. Захаров М. А., Леонов В. А. Вычисление параметров продольного движения самолета на больших углах атаки с определением показателей устойчивости короткопериодического движения. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып.13 – <http://www.mai.ru> (21.10.03).
5. Захаров М. А. Исследование условий измерения вращательных и нестационарных производных на динамических установках в аэродинамических трубах. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып.14 – <http://www.mai.ru> (26.12.03).
6. Виноградов Ю.А., Жук А.Н., Колинко К.А., Храбров А.Н. Учет динамики разрушения вихрей при математическом моделировании нестационарных аэродинамических характеристик треугольного крыла. //Ученые записки ЦАГИ. – Т.28, №1, 1997. – с.105-120.
7. Виноградов Ю.А., Жук А.Н., Колинко К.А., Миатов О.Л., Храбров А.Н. К вопросу разделения нестационарных и вращательных аэродинамических производных по результатам динамических испытаний. //Ученые записки ЦАГИ. – Т.34, №3-4, 2003. – с.84-90.
8. Аэромеханика самолета. /Под ред. А. Ф. Бочкарева. – М.: Машиностроение, 1985. – 416 с.

9. Динамика полета. /Под ред. Мхитаряна А. М. – М.: Машиностроение. 1978. – 424 с.
10. Захаров М. А. Нестационарные составляющие коэффициентов нормальной силы и момента тангажа самолета, обусловленные горизонтальным оперением. //Электронный журнал "Труды МАИ", вып. 11. – <http://www.mai.ru> (11.04.03).
11. Абрамов Н.Б., Храбров А.Н. Математическое моделирование зависимости нестационарных аэродинамических производных самолета от частоты малых колебаний по результатам динамических испытаний в АДТ на больших углах атаки. //ТВФ №1, 2004 –с.11-19.
12. Головкин М.А. и др. Некоторые особенности аэродинамических характеристик треугольных крыльев на больших углах атаки при дозвуковом нестационарном обтекании. //Труды ЦАГИ, 1994, вып. 2536. –с.3-24.
13. Виноградов Ю.А., Храбров А.Н. (ЦАГИ). Влияние запаздывания развития отрывного обтекания на динамику полета самолета в продольном движении. //ТВФ №6, 2002.– с.1-11.
14. Жук А. Н., Иоселевич А. С., Столяров Г. И., Табачников В. Г. Экспериментальное исследование демпфирования крена и тангажа треугольного крыла $\lambda = 1.5$ на больших углах атаки. – //Труды ЦАГИ, 1985, вып. 2290. –с. 52-70.
15. Колин И. В., Лацоев К. Ф., Святодух В. К., Трифонова Т. И., Шуховцов Д. В. (ЦАГИ). Исследования нестационарных аэродинамических характеристик при быстром апериодическом выходе модели маневренного самолета на большие углы атаки в потоке аэродинамической трубы. //ТВФ №1, 1999. –с.1-4.
16. Ниязманд М.А. Исследование продольной устойчивости самолётов на больших углах атаки с учётом динамических эффектов отрывного обтекания. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н. – М.: На правах рукописи, 2000. – 24 с.

Сведения об авторе.

Захаров Михаил Александрович, аспирант кафедры динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (государственного технического университета).