

Труды МАИ. 2025. № 141
Trudy MAI. 2025. No. 141. (In Russ.)

Научная статья

УДК 531.38

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184500>

EDN: <https://www.elibrary.ru/HZEBHG>

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ БОЛЬШИХ АМПЛИТУДАХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСУДА

Вин Ко Ко¹✉, Александр Николаевич Темнов²

^{1,2}Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Российская Федерация

¹win.c.latt@gmail.com✉

²antt45@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается экспериментальное исследование колебаний двухслойной жидкости в подвижном баке, совершающим поперечные колебания с большими амплитудами возбуждения. Дано описание экспериментальной установки и приведены результаты наблюдений эксперимента при возникновении вращательного движения поверхности раздела жидкостей на частоте основного резонанса, а также приведены фотосъёмки поведения поверхности раздела жидкостей.

Ключевые слова: парциальные частоты колебаний, поверхность раздела жидкостей, амплитуда возбуждения, вращение узлового диаметра жидкостей, основной резонанс

Благодарности: Авторы благодарят руководителя НУК СМ Калугина Владимира Тимофеевича и заведующего кафедрой СМ 1 Зимина Владимира Николаевича за

представленные условия и аудиторию для проведения экспериментальных работ по исследованию колебаний двухслойной жидкости

Для цитирования: Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Экспериментальные исследования вращательных движений двух жидкостей при больших амплитудах поперечных колебаний сосуда // Труды МАИ. 2025. № 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184500>

Original article

EXPERIMENTAL STUDIES OF ROTATIONAL MOTIONS OF TWO LIQUIDS AT LARGE AMPLITUDES OF TRANSVERSE OSCILLATIONS OF THE VESSEL

Win Ko Ko^{1✉}, Alexander N. Temnov²

^{1,2}Moscow State Technical University. N.E. Bauman,
Moscow, Russian Federation

¹win.c.latt@gmail.com ✉

²antt45@mail.ru

Abstract. This paper examines an experimental study of oscillations of a two-layer liquid in a movable tank performing transverse oscillations with large excitation amplitudes. A description of the experimental setup is given, and the results of observations of the experiment are presented when rotational motion of the liquid interface occurs at the fundamental resonance frequency, as well as photographs of the behavior of the liquid interface.

The relevance of the problem under consideration is associated with the problem caused by the ever-increasing use of modern vehicles transporting large masses of liquid fuel, petroleum products, liquefied natural gas and cryogenic liquids and their use in industry and in rocket and space technology. One of the simplest models of such a heterogeneous liquid is a two-layer liquid completely filling the cavity of a solid.

In the course of experimental studies of small oscillations of a multilayer liquid, it was found that near the main resonant frequency, nonlinear deviations of the interface are observed, which then turn into rotational motion of the liquid layers. In this paper, an attempt is made to experimentally study the behavior of the interface in a two-layer liquid with considerable amplitudes of reciprocating oscillations of a solid.

When studying nonlinear oscillations of a body with a liquid, the equations of motion are significantly complicated and a number of authors have attempted to study such oscillations using a visual nonlinear mechanical model.

The features of linear and nonlinear oscillations of a homogeneous liquid partially filling the cavity of a moving and stationary solid body have been considered by Soviet scientists since the second half of the last century and published in books [1-3]. In works [2-3], nonlinear problems of rigid body dynamics were investigated, in which there are cavities filled with liquid with a free surface.

At the same time, similar studies were conducted in the USA. The results of these studies on the oscillations of the free surface of a homogeneous liquid are presented in the book by Abramson [4]. However, even at present, interest in the oscillations of the free surface of one liquid has not disappeared. This is evidenced by theoretical and experimental studies conducted at the Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences and published in works [5-8].

In works [5-6], the results of experiments on the excitation of the first mode of a two-dimensional standing gravitational wave on the surface of water in a rectangular vessel oscillating in the vertical direction were obtained. In the work [7] new results of experiments on the study of the influence of a floating thin plate on regular standing Faraday gravitational waves on the free surface of water in a rectangular vessel are given.

Keywords: partial oscillation frequencies, liquid interface, excitation amplitude, rotation of the nodal diameter of liquids, fundamental resonance

Acknowledgments: The authors thank the head of the NUK SM Kalugin Vladimir Timofeevich and the head of the SM 1 department Vladimir Nikolaevich Zimin for the provided conditions and audience for conducting experimental work on the study of oscillations of a two-layer liquid

For citation: Win Ko Ko, Temnov A.N. Experimental studies of rotational motions of two liquids at large amplitudes of transverse oscillations of the vessel. *Trudy MAI*. 2025. No. 141. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184500>

Введение

Актуальность рассматриваемой задачи связана с проблемой, обусловленной все более возрастающим использованием современных транспортных средств, перевозящих большие массы жидкого топлива, нефтепродуктов, сжиженного природного газа и криогенных жидкостей и применением в промышленности и в ракетно-космической технике. Одной из самых простых моделей такой неоднородной жидкости является двухслойная жидкость, полностью заполняющая полость твердого тела.

В ходе экспериментальных исследований малых колебаний многослойной жидкости было обнаружено, что вблизи основной резонансной частоты наблюдаются нелинейные отклонения поверхности раздела, которые затем переходят во вращательное движение слоев жидкости. В данной работе предпринята попытка экспериментального исследования поведения поверхности раздела в двухслойной жидкости при немалых амплитудах возвратно- поступательных колебаний твердого тела.

При изучении нелинейных колебаний тела с жидкостью уравнения движения значительно усложняются и рядом авторов делались попытки исследования таких колебаний с помощью наглядной нелинейной механической модели.

Особенности линейных и нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, рассматривались советскими учёными, начиная со второй половины прошлого столетия, и опубликованы в книгах [1-3]. В работах [2-3] были исследованы нелинейные задачи динамики твердого тела, в которых имеются полости, заполненные жидкостью со свободной поверхностью.

В тоже время такие же исследования проводились и в США. Результаты этих исследований по колебаниям свободной поверхности однородной жидкости представлены в книге Абрамсона [4].

Однако и в настоящее время интерес к колебаниям свободной поверхности одной жидкости не исчез. Об этом свидетельствуют теоретические и экспериментальные исследования, проводимые в ИПМ АН России и опубликованные в работах [5-8].

В работах [5-6] получены результаты экспериментов по возбуждению первой моды двумерной стоячей гравитационной волны на поверхности воды в прямоугольном сосуде, совершающем колебания в вертикальном направлении. В работе [7] даны новые результаты экспериментов по исследованию влияния плавающей тонкой пластины на регулярные стоячие гравитационные волны Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде.

В работе [8] в рамках приближения длинных волн была сформулирована и численно решена задача о стоячих волнах в круглом цилиндрическом сосуде с возвышением на дне, используя алгоритм ускоренной сходимости. Результаты расчетов продемонстрировали высокую точность определения собственной частоты основной волновой моды. Для сопоставления теоретических данных были представлены новые экспериментальные результаты по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в круглом цилиндрическом сосуде с параболическими и коническими возвышениями на дне.

В последнее время, в связи с возникновением проблем, связанных с эксплуатацией низкотемпературных жидкостей, появились задачи о колебаниях многослойных жидкостей [9]. Также в работе [9-10] проведено экспериментальное исследование колебаний цилиндрического сосуда, полностью заполненного двухслойной и трехслойной жидкостями. В работе [11] было рассмотрено теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в цилиндрическом баке. В статье [12] рассматривается механическая модель со сферическим маятником, соответствующая нелинейным колебаниям поверхности раздела двух жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический

сосуд. Показывается, что при использовании в качестве обобщённых координат колебаний направляющих косинусов, определяющих положение сферического маятника, уравнения движения эквивалентного тела с маятником строго совпадет с уравнениями немалых движений твёрдого тела с двумя жидкостями с точностью до второго порядка малости включительно.

В работе [13] рассмотрены параметрические колебания жидкости со свободной поверхностью, заполняющей цилиндрический сосуд. Показана возможность возбуждения малых симметричных колебаний в системе с демпфированием. Методом Ван дер Поля определяется численное значение коэффициента модуляции, определяются границы зоны неустойчивости. В работах [14-15] рассмотрены задачи о колебаниях жидкостей, взаимодействующих с тонкостенной оболочкой.

Из иностранных работ отметим статьи по нелинейным колебаниям двухслойной жидкости [16-17], в которых кроме теоретических результатов приведено исследование на экспериментальной установке, состоящей из осциллирующего бака, наполненного двумя слоями несмешивающихся жидкостей. Математическая модель в этих работах получена в результате применения вариационного подхода.

В работе [18] проводился ряд модельных экспериментов для выяснения трехмерной (3D) резонансной динамики колебаний границы раздела жидкостей (нефть-вода) в полностью заполненном цилиндрическом резервуаре. Для начала проводился ряд испытаний на свободные колебания для экспериментального определения скорости вязкого затухания колебаний и изучения соответствующих теоретических решений. Затем исследовались реакции поверхности раздела жидкостей на ряд частот возбуждения, включая собственные частоты первых пяти мод. Отмечено, что вращательное колебание поверхности раздела в двухслойной жидкой системе намного сложнее, чем вращательное движение. Видимо это первое исследование трехмерного вращательного волнового движения поверхности раздела в двухслойной жидкой системе без свободной поверхности при малых амплитудах возбуждения.

В статье [19] были исследованы колебания свободной поверхности жидкости во вращающемся, колеблющемся в поперечном направлении цилиндрическом сосуде. В экспериментах авторы независимо изменяли как частоту латерального воздействия f , так и частоту вращения Ω цилиндра. Также были измерено зависящее от времени гидродинамическое давление вместо колебаний свободной поверхности.

В работах [20-22] рассмотрены экспериментальные исследования вращения узлового диаметра свободной поверхности в цилиндрическом и прямоугольном сосудах при малых амплитудах возбуждения поступательного движения.

В работе [23] было проведено теоретическое исследование движения жидкости в баке, подвергаемом боковой гармонической вибрации на частоте в окрестности самой низкой резонансной частоты массы жидкости. Исследование показывает, что неплоское движение жидкости обусловлено нелинейной связью между движениями жидкости, параллельными и перпендикулярными плоскости возбуждения, и что эта связь происходит через свободные поверхностные волны. с использованием цилиндрического бака диаметром около 12 дюймов, частично заполненного водой на глубину около 9 дюймов. Бак перемещался вдоль диаметра на выбранных частотах в непосредственной близости от собственной частоты малых колебаний свободной поверхности.

Постановка эксперимента

Целью эксперимента являлось изучение влияния немалых амплитуд колебаний сосуда на основную моду колебаний поверхности раздела двухслойной жидкости. Не малыми амплитудами возбуждения будем называть амплитуды колебаний сосуда, удовлетворяющих неравенству $0.1 \leq u / r_0 < 0.5$ где r_0 - радиус цилиндра (характерный размер), u - амплитуда возбуждения колебаний, большими амплитудами возбуждения будем называть амплитуды, удовлетворяющих соотношению $u / r_0 \geq 0.5$, малыми амплитудами возбуждения будем называть амплитуды, удовлетворяющих неравенству $u / r_0 < 0.1$. В качестве испытуемых жидкостей были выбраны вода ($\rho_2 = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$), керосин плотностью ($\rho_1 = 820 \text{ кг} / \text{м}^3$).

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка рис. 1 состояла из основания -1, подвижной пластины -2, прозрачного бака -3, электромеханического возбудителя колебаний -4 и контрольно-измерительного комплекса. Основание установки представляло собой неподвижную пластину из текстолита, на которой были закреплены электромеханический возбудитель и металлические направляющие -5, обеспечивающие плавное движение подвижной пластины без боковых вибраций. Блок питания -6 предназначен для питания электродвигателя. Частота вынужденных колебаний подвижной пластины определялась с помощью бесконтактного прибора DT 2234C -7, амплитуды колебаний поверхности раздела жидкостей измерялись визуально с помощью линейка -8.

Весь процесс колебаний регистрировался на видеокамеру Айфон 15 Pro Max с частотой 30 кадров в секунду и разрешением 1920 x 1080 и затем анализировался на персональном компьютере ASUS TUF Gaming F15 FX507ZC. Общий вид экспериментальной установки показан на рис. 1.

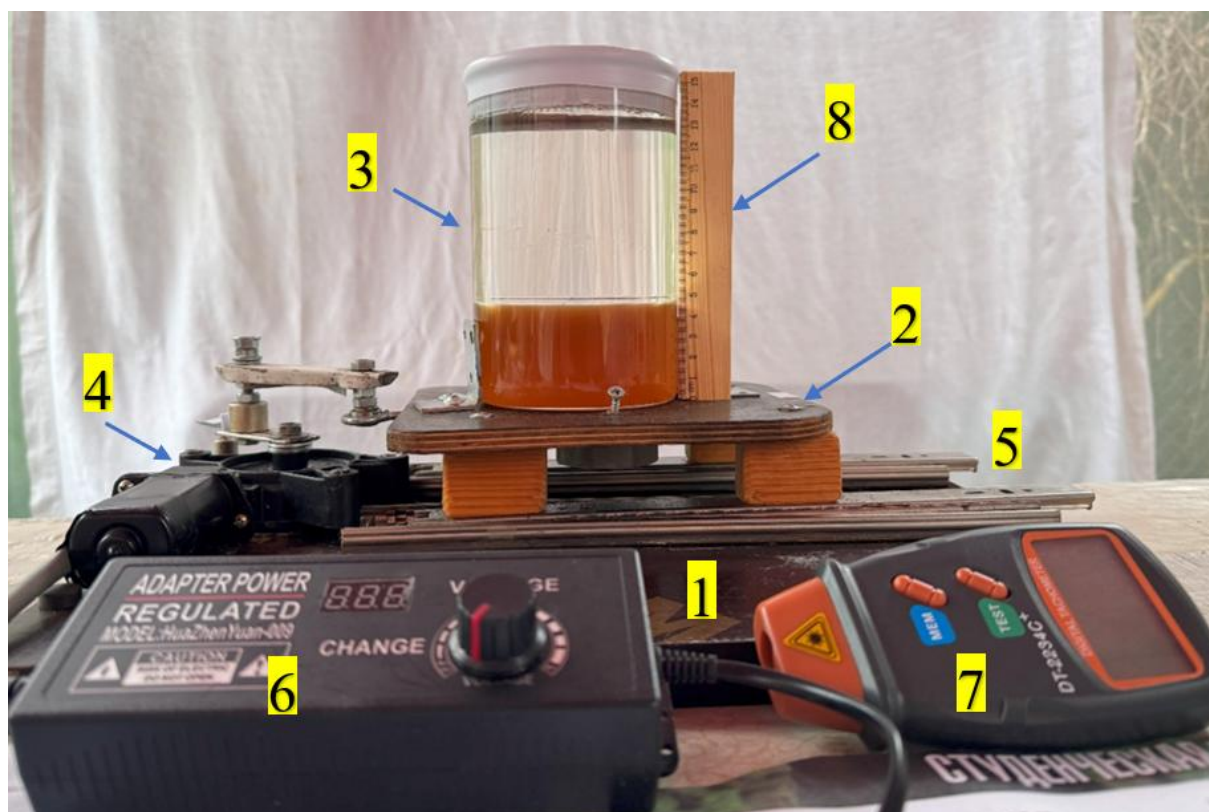


Рис.1. Общий вид экспериментальной установки с прозрачным баком и

ЖИДКОСТЯМИ

Известно, что при малых колебаниях поверхности раздела жидкостей в цилиндрическом круглом баке квадрат частоты свободных колебаний по линейной теории определяется формулой

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{\omega_{nm}^2 (\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1)} \quad (1)$$

где σ_{nm}^2 - частоты свободных колебаний соответственно поверхности раздела двух жидкостей [11], $\bar{f}_{1nm} = thk_{nm} h_1 cthk_{nm} h_2$, $\omega_{nm}^2 = gk_{nm} thk_{nm} h_1$, $k_{nm} = \xi_{nm} / r_0$,

($n = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$), где ξ_{nm} - n -ый корень уравнения $\frac{dJ_m(\xi)}{d\xi} = 0$; $J_m(\xi)$ -

функция Бесселя первого рода m о го порядка.

В рассматриваемой экспериментальной работе основное внимание было обращено на возбуждение первой моды трёхмерной стоячей гравитационные волны на поверхности раздела жидкостей в круглом цилиндрическом баке, совершающим немалые колебания в горизонтальном направлении. В линейном приближении при малых колебаниях сосуда волновая картина характеризуется одним узловым диаметром, проходящим через центр сосуда и пучностями, возникающих на боковых стенках.

N - число оборотов в минуту,

$\omega_i = \pi N / 30$ - частота возбуждения [1/с],

$\bar{\sigma}_i = \omega_i / \sigma$ - безразмерная частота,

$\bar{A} = A / r_0$ - безразмерная амплитуда поверхности раздела.

В настоящей работе были рассмотрены три разных эксперимента, полученные характеристики каждого эксперимента приведены в таблице 1.

Таблица 1

№	N	ω_i [1/с]	$\bar{\sigma}_i$	$\bar{A}^{(1)}$	$\bar{A}^{(2)}$	$\bar{A}^{(3)}$
1	19.7	2.06	0.347	0.02	0.002	0.01
2	24.8	2.6	0.438	0.06	0.02	0.02

3	31.6	3.31	0.558	0.13	0.04	0.03
4	38.8	4.06	0.685	0.1	0.048	0.05
5	47.9	5	0.843	0.14	0.052	0.12
6	52	5.45	0.919	0.22	0.07	0.4
7	56.8	5.95	1.003	0.56	0.09	0.36
8	60.9	6.38	1.076	0.7	0.18	0.18
9	65.7	6.88	1.16	0.56	0.5	0.14
10	70.2	7.35	1.239	0.57	0.4	0.1
11	74.4	7.8	1.315	0.58	0.44	0.08
12	78.8	8.25	1.391	0.66	0.5	0.06
13	83.1	8.7	1.467	0.8	0.52	0.04
14	87.4	9.15	1.543	0.82	0.06	0.02
15	90.9	9.52	1.605	0.44	0.05	0.04
16	94.6	9.906	1.669	0.9	0.04	0.06
17	97.6	10.22	1.723	0.91	0.036	0.09
18	102.5	10.7	1.800	0.92	0.04	0.1
19	107	11.2	1.908	-	0.1	0.104
20	110	11.52	1.938	-	-	0.08
21	113.5	11.88	1.999	-	-	0.06
22	118	12.35	2.078	-	-	0.06
23	122.3	12.8	2.154	-	-	0.12
24	130.7	13.68	2.302	-	-	0.01

1. Данные первого эксперимента

h_1 - высота верхней жидкости

h_2 - высота нижней жидкости

r_0 - радиус цилиндра (характерный размер)

u - амплитуда возбуждения колебаний

ρ_1 и ρ_2 - плотность верхней и нижней жидкости.

$$\sigma_{11} = 5.931 [1/c], \sigma_{21} = 10.17 [1/c].$$

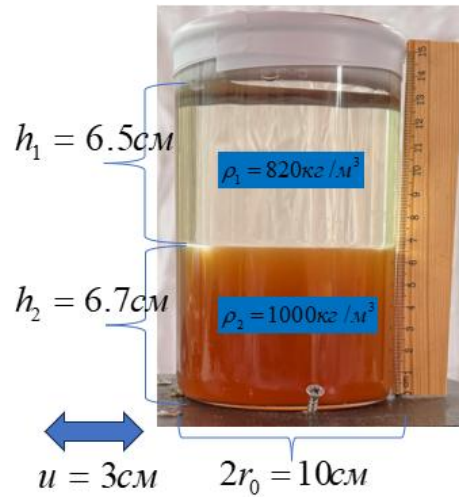


Рис.2. Обозначение параметров в первом эксперименте

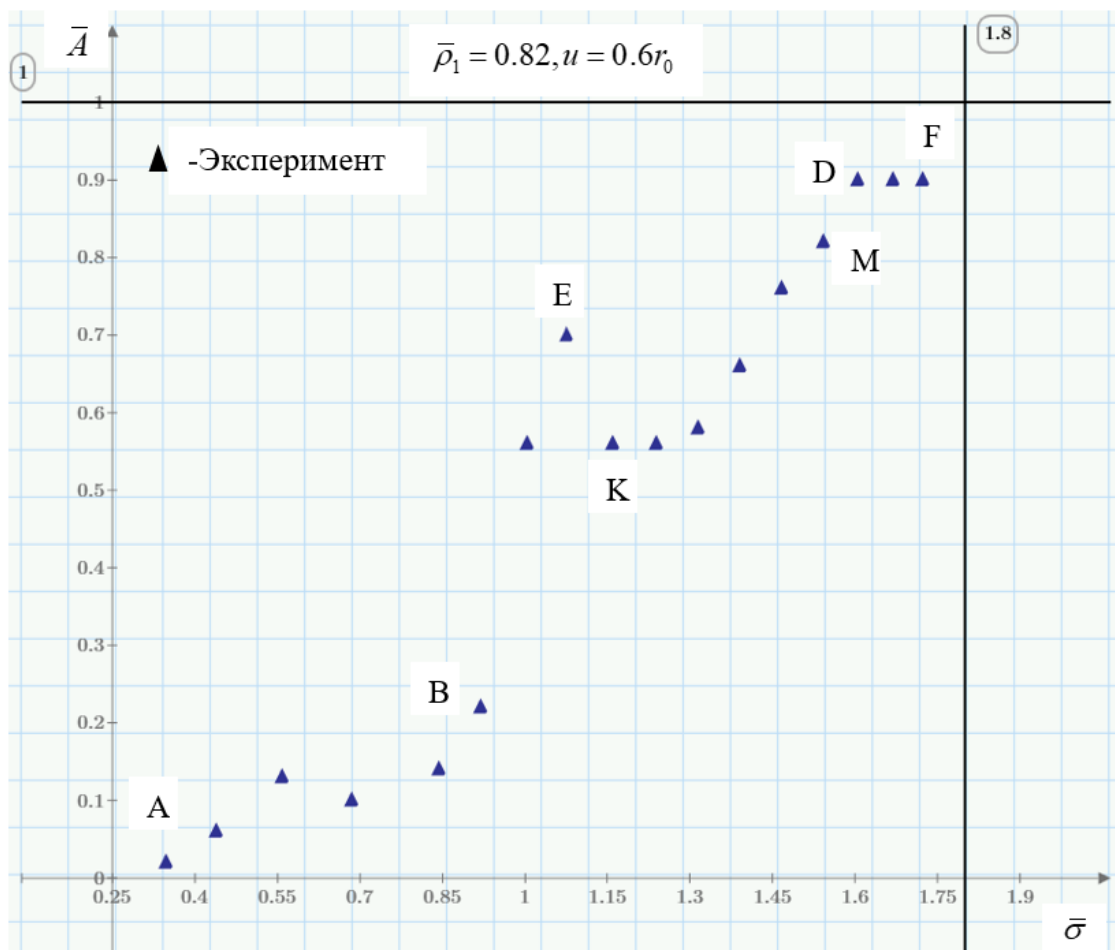


Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний жидкости от частоты колебаний в области основного тона при возбуждении основных гармоник α для $\bar{\rho}_1 = 0.82$ при $u = 0.6r_0$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1.4$.

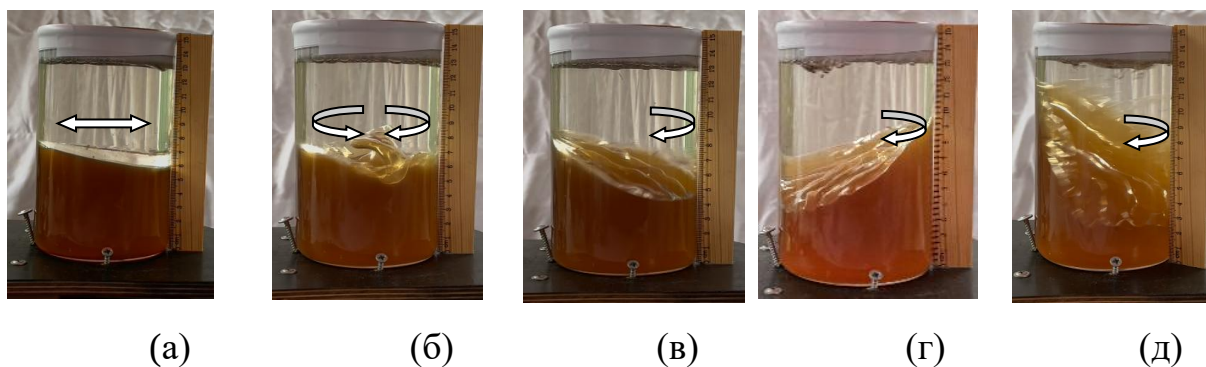


Рис. 4. Формы колебаний поверхности раздела жидкостей (а) на участке АВ, (б) на участке ВЕ, (в) на участке ЕК, (г) на участке КМ и МД, (д) на участке ДФ

На участке АВ колебания близкие к линейным устойчивым формам и узловым диаметром на середине, проходящим через центр полости, но амплитуда колебаний жидкостей была значительней, чем в линейном случае.

На участке ВЕ колебания поверхности раздела происходят с большей амплитудой, чем на участке АВ, и сопровождаются вращением узлового диаметра в одну и другую стороны, и разрушением поверхности раздела.

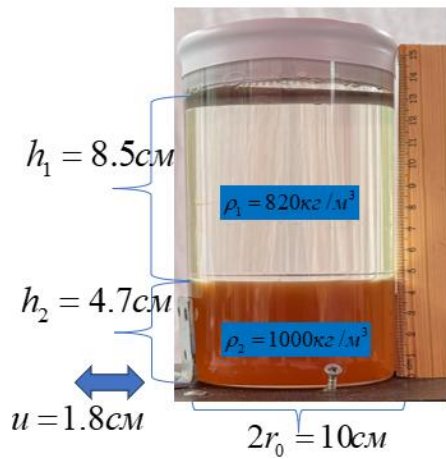
На участке ЕК колебания поверхности раздела жидкостей также происходит с переменным вращением узлового диаметра поверхности раздела, но с увеличением частоты возбуждения сосуда амплитуды колебаний поверхности раздела жидкостей уменьшаются, но увеличивается период вращения в противоположных направлениях. Жидкости как бы перестраиваются с переменного вращения на постоянное вращение в одну сторону.

На участке КМ с увеличением частоты возбуждения сосуда поверхность раздела жидкостей вращается в одну сторону, увеличивается амплитуда круговой волны и на поверхности раздела возникают гребни волновых движений.

На участке МД с увеличением частоты возбуждения сосуда поверхность раздела жидкостей перестаёт вращаться и переходит к форме колебаний по первому тону.

На участке ДФ с увеличением частоты возбуждения сосуда поверхность раздела жидкостей продолжает вращаться.

2. Данные второго эксперимента



h_1 - высота верхней жидкости

h_2 - высота нижней жидкости

ρ_1 и ρ_2 - плотность верхней и нижней жидкости.

$$\sigma_{11} = 5.931 [1/c], \sigma_{21} = 10.17 [1/c].$$

Рис. 5. Обозначение параметров во втором эксперименте

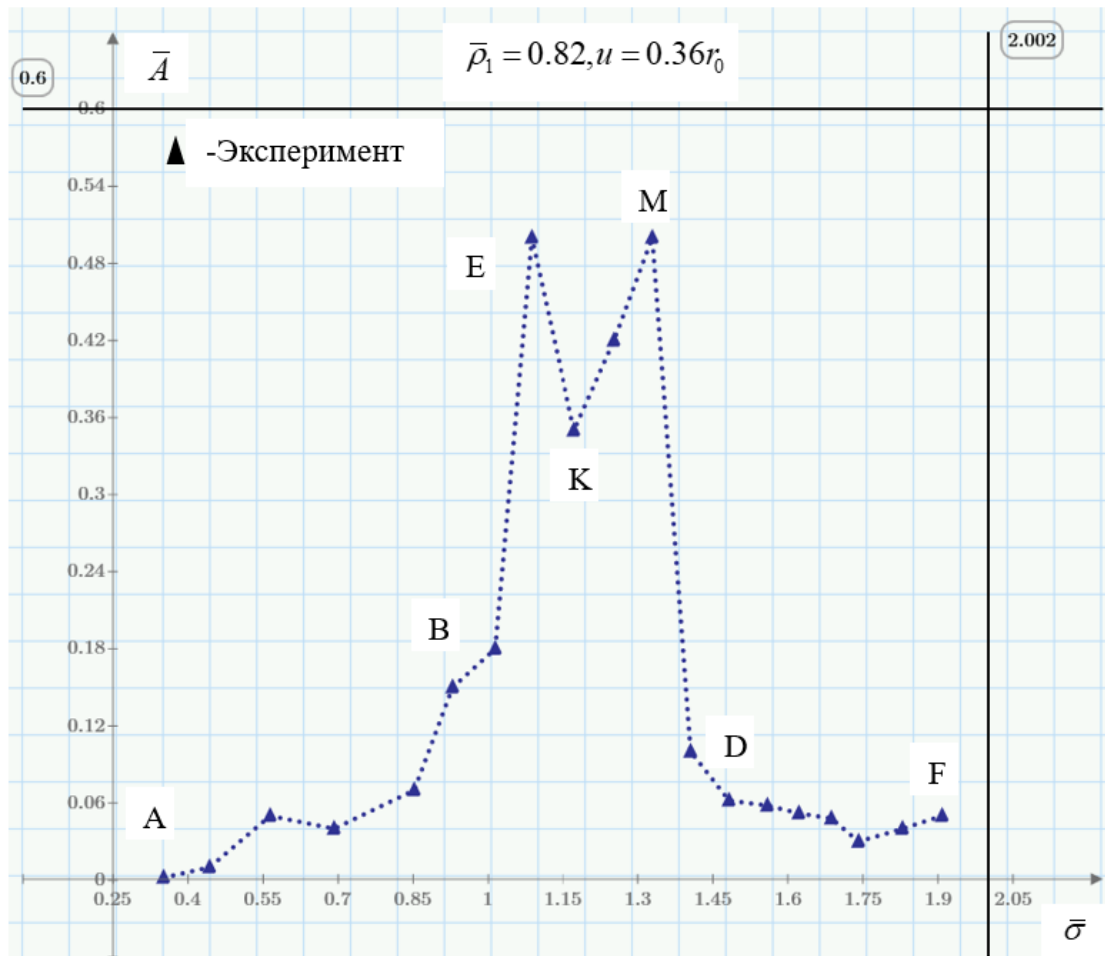


Рис. 6. Зависимость амплитуды колебаний жидкости от частоты колебаний в области основного тона при возбуждении основных гармоник α для $\bar{\rho}_1 = 0.82$ при $u = 0.36r_0$, $\bar{h}_1 = 0.94$, $\bar{h}_2 = 1.7$.

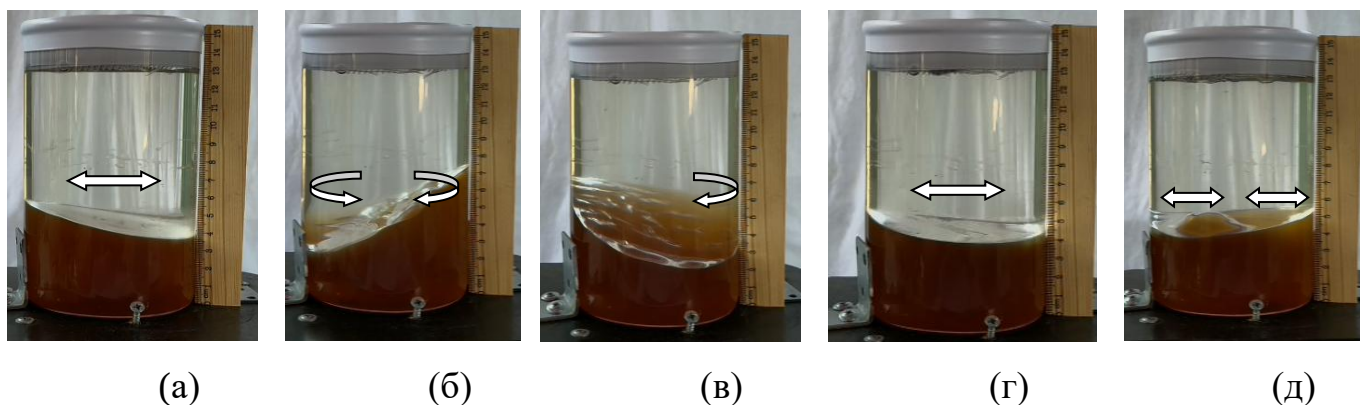


Рис. 7. Формы колебаний поверхности раздела жидкостей (а) на участке АВ, (б) на участке ВЕ, (в) на участке ЕК и КМ, (г) на участке МД, (д) на участке ДФ

На участке АВ происходят линейные колебания с увеличенной амплитудой как в случае (1).

На участке ВЕ колебания поверхности раздела происходит с большей амплитудой, чем на участке АВ, сопровождаются вращением узлового диаметра в одну и другую стороны, и разрушением поверхности раздела.

На участке ЕК колебания поверхности раздела жидкостей также происходит с переменным вращением узлового диаметра поверхности раздела, амплитуда колебаний жидкостей резко уменьшается с увеличением периода постоянного вращения в одну сторону.

На участке КМ поверхность раздела жидкостей вращаются в одну сторону, амплитуда круговой волны увеличивается, вращение замедляется с увеличением частоты возбуждения и достигается отсутствие вращения и резкий переход к линейной форме колебаний по первому тону – участок МД.

При амплитуде колебаний сосуда ($u = 0.36r_0$) на участке ДФ сначала наблюдались малые колебания поверхности раздела жидкостей по первому тону, а при увеличении частоты возбуждения возникали колебания по второму тону, сопровождаемые вращением поверхности раздела жидкостей.

3. Данные третьего эксперимента

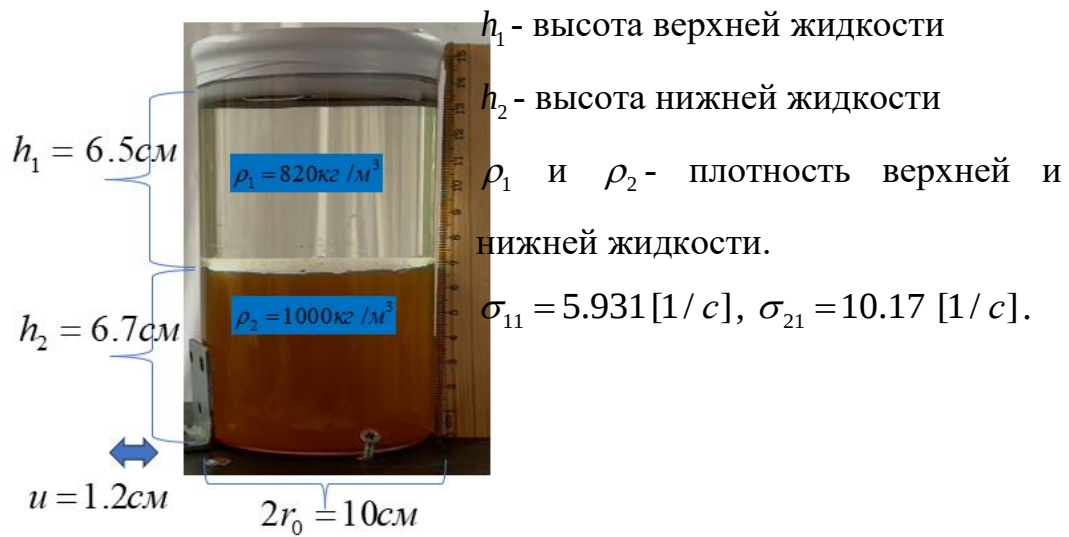


Рис. 8. Обозначение параметров в третьем эксперименте

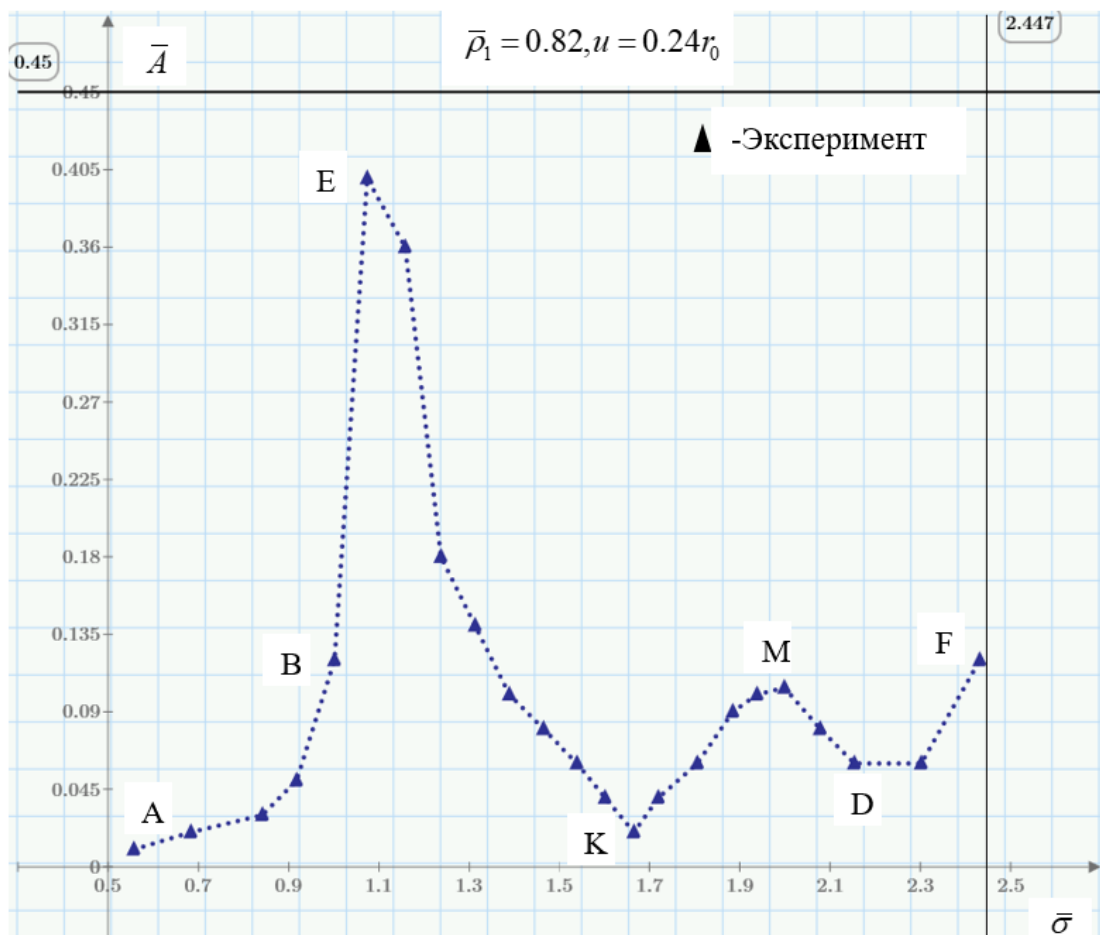


Рис. 9. Зависимость амплитуды колебаний жидкости от частоты колебаний в области основного тона при возбуждении основных

гармоник α для $\bar{\rho}_1 = 0.82$ при $u = 0.24r_0$, $\bar{h}_1, \bar{h}_2 = 1.4$.

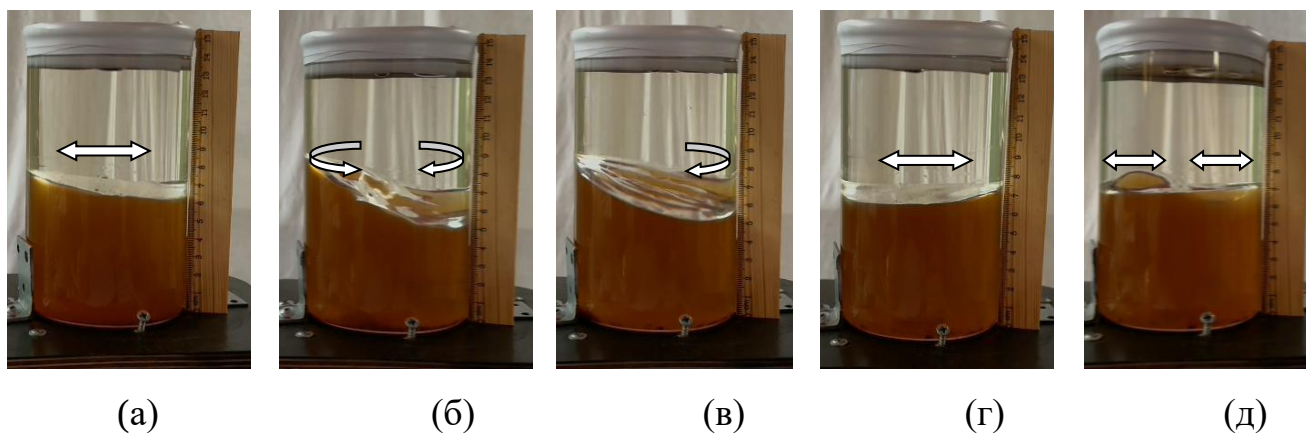


Рис. 10. Формы колебаний поверхности раздела жидкостей (а) на участке АВ, (б) на участке ВЕ, (в) на участке ЕК, (г) на участке КМ, (д) на участке МД и ДФ

На участке АВ амплитудной характеристики (см. рис. 10), колебания жидкостей происходят в плоскости возбуждения с одним узловым диаметром, перпендикулярным возбуждению. Каждой частоте соответствует своя определенная амплитуда колебаний жидкости. Колебания жидкостей являются устойчивыми. С дальнейшим ростом амплитуд колебаний жидкости экспериментальные кривые начинают расходиться с расчетами по линейной теории.

После точки В на участке ВЕ происходит срыв колебаний: устойчивые колебания жидкости переходят в неустойчивые. Амплитуды колебаний растут и достигают примерно половины радиуса цилиндра. Затем, с увеличением частоты возбуждения, наступает неустойчивость колебаний в окружном направлении: плоскость колебаний жидкостей начинает вращаться в ту или другую сторону относительно плоскости возбуждения. Начиная с амплитуд колебаний, превышающих 0,5 радиуса, с увеличением частоты возбуждения и приближением к резонансной частоте амплитуда колебаний продолжает увеличиваться.

На участке ЕК происходит перестройка колебаний с переменным по направлению вращения жидкостей, к вращению жидкостей в одну сторону.

На участке КМ вращения жидкостей происходит в одну сторону и наблюдается увеличение амплитуды круговой волны с увеличением частоты возбуждения.

На участке MD наблюдается замедление вращения и переход к форме колебаний поверхности раздела, отвечающей колебанию всей поверхности раздела по первому тону.

При амплитуде колебаний сосуда ($u = 0.24r_0$) в начале участка DF поверхность раздела жидкостей продолжала малые колебания по первому тону, а при увеличении частоты возбуждения колебания по первому тону прекращались и возникали колебания по второму тону, сопровождаемые вращением поверхности раздела жидкостей.

На рис. 3-10 показаны зависимости амплитуды колебаний двухслойной жидкости от частоты колебаний при основном резонансе, полученная для бака диаметром ($2r_0 = 10 \text{ см}$), **первый эксперимент** при глубинах заполнения ($h_1 = 6.5 \text{ см}$, $h_2 = 6.8 \text{ см}$) и амплитуде возбуждения бака ($u = 0.6r_0$), **второй эксперимент** при глубинах заполнения ($h_1 = 8.5 \text{ см}$, $h_2 = 4.7 \text{ см}$) и амплитуде возбуждения бака ($u = 0.36r_0$), **третий эксперимент** при глубинах заполнения ($h_1 = 6.5 \text{ см}$, $h_2 = 6.8 \text{ см}$) и амплитуде возбуждения бака ($u = 0.24r_0$).

Выводы

При больших амплитудах возбуждения ($u = 0.6r_0$), и немалых амплитудах возбуждения ($0.36r_0, 0.24r_0$) колебания поверхности раздела жидкостей отличаются от колебаний поверхности раздела жидкостей при малых амплитудах возбуждения. На частотах колебаний, отвечающих первому тону и выше (до значения частоты, отвечающей второму тону малых колебаний поверхности раздела жидкостей), наблюдается вращательное движение поверхности раздела двух жидкостей в одну сторону и малые колебания по первому тону. С уменьшением амплитуды возбуждения, колебания поверхности раздела становятся ближе к формам малых колебаний первого и второго тонов.

Список источников

1. Микишев Г.Н, Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. - М.: Машиностроение, 1968. - 532 с.

2. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. - М.: Машиностроение, 1977. - 208 с.
3. Луковский И.А. К исследованию движения твердого тела с жидкостью, совершающей нелинейные колебания // Прикладная механика. 1967. Т. 3, № 6. С. 119-127.
4. Ambrason H.N. The Dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA SP-106, Washington, D.C., 1966, 467 p.
5. Калиниченко В.А. Кинематика первой волновой моды Фарадея на боковой стенке прямоугольного сосуда // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2024. № 5. С. 15–24. DOI: [10.31857/S1024708424050025](https://doi.org/10.31857/S1024708424050025)
6. Калиниченко В.А., Данилова Е.А. О низшей волновой моде Фарадея в прямоугольном сосуде // Десятая международная научная конференция-школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» (Москва, 23-25 октября 2024): сборник материалов. – М.: ИПМех РАН, 2024. С. 100-103.
7. Калиниченко В.А. Частоты и профили стоячих изгибно-гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 5. С. 103-109. DOI: [10.31857/S1024708423600306](https://doi.org/10.31857/S1024708423600306)
8. Нестеров С.В., Калиниченко В.А. Колебания жидкости в круговом цилиндре с возвышением на дне // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2024. № 1. С. 91–98. DOI: [10.31857/S1024708424010063](https://doi.org/10.31857/S1024708424010063)
9. Вин Ко Ко. Колебания многослойной жидкости в полостях неподвижных и подвижных тел: дис. канд. ф-м.н. Институт проблем механики Российской академии наук, Москва, 2018. 157 с.
10. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Экспериментальные исследования немалых движений двух жидкостей при больших амплитудах возбуждения // 15-ая Международная научная конференция–школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 19–22 ноября 2024): сборник трудов. – Москва: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, 2024. С. 48–50.

11. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объёме // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. DOI: [10.17223/19988621/69/8](https://doi.org/10.17223/19988621/69/8)
12. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Об устойчивости движений механической модели тела с двумя жидкостями // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183456>
13. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=84412>
14. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода отсеков к расчёту колебаний жидкостных ракет-носителей. – М.: Изд-во МАИ, 2017. - 100 с.
15. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159785>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08)
16. M. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Physics of Fluids. 2005. No. 17. P. 062101. DOI: [10.1063/1.1922887](https://doi.org/10.1063/1.1922887)
17. Barannyk L.L., Papageorgiou D.T. Fully nonlinear gravity-capillary solitary waves in a two-fluid system of finite depth // Journal of Engineering Mathematics. 2002. V. 42, P. 321–339. DOI: [10.1023/A:1016191131656](https://doi.org/10.1023/A:1016191131656)
18. Dongxi Liu, Xiaoying Wang, Yujiao Chen. An Experimental Study of Three-Dimensional Separation Surface Sloshing in the Wet Storage Tank of a Floating Offshore Platform // Journal of Marine Science and Engineering. 2024. V. 12 (588), P. 1-18. DOI: [10.3390/jmse12040558](https://doi.org/10.3390/jmse12040558)
19. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // Journal of Ocean Engineering and Marine Energy. 2018. V. 4, P. 243–257. DOI: [10.48550/arXiv.1805.11733](https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.11733)

20. Eisaku Yokose, Yusuke Saito, Tatsuo Sawada. Frequency response of a liquid sloshing in a rotating, laterally oscillating, cylindrical vessel // MATEC Web of Conferences 211, 15003 (VETOMAC XIV). 2018. DOI: [10.1051/matecconf/201821115003](https://doi.org/10.1051/matecconf/201821115003)
21. Yusuke Saito, Tatsuo Sawada. Liquid Sloshing in a Rotating, Laterally Oscillating Cylindrical Container // Universal Journal of Mechanical Engineering. 2017. V. 5(3), P. 97-101. DOI: [10.13189/ujme.2017.050304](https://doi.org/10.13189/ujme.2017.050304)
22. Aude Royon-Lebeaud, Emil J. Hopfinger, Alain H. Cartellier Liquid sloshing and wave breaking in cylindrical and square-base containers // Journal of Fluid Mechanics. 2007. V. 577, P.467-494. DOI: [10.1017/S00222112007004764](https://doi.org/10.1017/S00222112007004764) [hal-00265298](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00265298)
23. Hutton R.E. An investigation of resonant, nonlinear, non-planar free surface oscillations of a fluid, NASA Tech Note D-1870. 1963. URL: <https://books.google.ru/books?id=ufKriKPL5i8C&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>

References

1. Mikishev G.N, Rabinovich B.I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'* (Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1968. 532 p.
2. Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskii I.A. *Nelineinaya dinamika letatel'nogo apparata s zhidkost'yu* (Nonlinear dynamics of an aircraft with liquid). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1977. 208 p.
3. Lukovskii I.A. On the study of the motion of a solid body with a liquid performing nonlinear oscillations. *Prikladnaya mekhanika*. 1967. V. 3, No. 6. P. 119-127. (In Russ.)
4. Ambrason H.N. *The Dynamic behavior of liquids in moving containers*. NASA SP-106, Washington, D.C., 1966, 467 p.
5. Kalinichenko V.A. Kinematics of the first Faraday wave mode on the side wall of a rectangular vessel. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 2024. No. 5. P. 15–24. (In Russ.). DOI: [10.31857/S1024708424050025](https://doi.org/10.31857/S1024708424050025)

6. Kalinichenko V.A., Danilova E.A. On the lowest Faraday wave mode in a rectangular vessel. *Desyataya mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya-shkola molodykh uchenykh «Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie protsessov v geosredakh»*: sbornik materialov. Moscow: IPMekh RAN Publ., 2024. P. 100-103.
7. Kalinichenko V.A. Frequencies and profiles of standing flexural-gravity waves. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 2023. No. 5. P. 103-109. (In Russ.). DOI: [10.31857/S1024708423600306](https://doi.org/10.31857/S1024708423600306)
8. Nesterov S.V., Kalinichenko V.A. Fluid oscillations in a circular cylinder with an elevation at the bottom. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 2024. No. 1. P. 91–98. (In Russ.). DOI: [10.31857/S1024708424010063](https://doi.org/10.31857/S1024708424010063)
9. Vin Ko Ko. *Kolebaniya mnogoslonoj zhidkosti v polostyakh nepodvizhnykh i podvizhnykh tel* (Oscillations of a multilayer fluid in cavities of stationary and moving bodies) dis. cand. Phys.-Math. Sciences. Institut problem mekhaniki Rossiiskoi akademii nauk, Moscow, 2018. 157 p. (In Russ.)
10. Vin Ko Ko, Temnov A.N. Experimental studies of large motions of two fluids at large excitation amplitudes. *15-aya Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya-shkola molodykh uchenykh «Volny i vikhri v slozhnykh sredakh»*: sbornik trudov. Moscow: Institut problem mekhaniki im. A.Yu. Ishlinskogo Publ., 2024. P. 48–50.
11. Vin Ko Ko, Temnov A.N. Theoretical investigation of the effects of vibrations of two immiscible liquids in a limited volume. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 2021. No. 69. (In Russ.). DOI: [10.17223/19988621/69/8](https://doi.org/10.17223/19988621/69/8)
12. Vin Ko Ko, Temnov A.N. On the stability of motions of a mechanical model of a body with two fluids. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183456>
13. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. On axisymmetric parametric oscillations of a fluid in a cylindrical vessel. *Trudy MAI*. 2017. No. 95. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>
14. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Primenenie metoda otsekov k raschetu kolebanii zhidkostnykh raket-nositelei* (Application of the compartment method to the calculation of

oscillations of liquid-propellant launch vehicles). Moscow: Izd-vo MAI Publ., 2017. 100 p.

15. Pak Songi, Grigor'ev V.G. Stability of thin-walled axisymmetric coaxial structures containing liquid under multifactor loads. *Trudy MAI*. 2021. No. 119. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785>. DOI: [10.34759/trd-2021-119-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08)
16. M. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. *Physics of Fluids*. 2005. No. 17. P. 062101. DOI: [10.1063/1.1922887](https://doi.org/10.1063/1.1922887)
17. Barannyk L.L., Papageorgiou D.T. Fully nonlinear gravity-capillary solitary waves in a two-fluid system of finite depth. *Journal of Engineering Mathematics*. 2002. V. 42, P. 321–339. DOI: [10.1023/A:1016191131656](https://doi.org/10.1023/A:1016191131656)
18. Dongxi Liu, Xiaoying Wang, Yujiao Chen. An Experimental Study of Three-Dimensional Separation Surface Sloshing in the Wet Storage Tank of a Floating Offshore Platform. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2024. V. 12 (588), P. 1-18. DOI: [10.3390/jmse12040558](https://doi.org/10.3390/jmse12040558)
19. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2018. V. 4, P. 243–257. DOI: [10.48550/arXiv.1805.11733](https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.11733)
20. Eisaku Yokose, Yusuke Saito, Tatsuo Sawada. Frequency response of a liquid sloshing in a rotating, laterally oscillating, cylindrical vessel. *MATEC Web of Conferences* 211, 15003 (VETOMAC XIV). 2018. DOI: [10.1051/mateconf/201821115003](https://doi.org/10.1051/mateconf/201821115003)
21. Yusuke Saito, Tatsuo Sawada. Liquid Sloshing in a Rotating, Laterally Oscillating Cylindrical Container. *Universal Journal of Mechanical Engineering*. 2017. V. 5 (3), P. 97-101. DOI: [10.13189/ujme.2017.050304](https://doi.org/10.13189/ujme.2017.050304)
22. Aude Royon-Lebeaud, Emil J. Hopfinger, Alain H. Cartellier Liquid sloshing and wave breaking in cylindrical and square-base containers. *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. V. 577, P.467-494. DOI: [10.1017/S0022112007004764](https://doi.org/10.1017/S0022112007004764) [hal-00265298](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00265298)
23. Hutton R.E. *An investigation of resonant, nonlinear, non-planar free surface oscillations of a fluid*, NASA Tech Note D-1870. 1963. URL:

<https://books.google.ru/books?id=ufKriKPL5i8C&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>

Статья поступила в редакцию 27.03.2025

Одобрена после рецензирования 31.03.2025

Принята к публикации 25.04.2025

The article was submitted on 27.03.2025; approved after reviewing on 31.03.2025; accepted for publication on 25.04.2025