

УДК 533.6.011.8

**Нелинейные явления в разреженном газе в задаче Куэтта****Вьонг Ван Тьен<sup>\*</sup>, Горелов С.Л.<sup>\*\*</sup>**

*Московский физико-технический институт (национальный университет),  
Институтский переулок, 9, Долгопрудный, Московская область, 141701, Россия.*

*<sup>\*</sup>e-mail: [tienbom@mail.ru](mailto:tienbom@mail.ru)*

*<sup>\*\*</sup>e-mail: [gorelovsl@yandex.ru](mailto:gorelovsl@yandex.ru)*

**Аннотация**

Исследуются процессы тепломассопереноса в разреженном газе, заключенному между двумя бесконечными параллельными пластинами, которые имеют разные температуры и движутся относительно друг друга. Методом прямого статистического моделирования (DSMC) вычисляются распределения плотности, скорости, температуры газа, потоков тепла и тензора напряжений в широком диапазоне чисел Кнудсена и при различных значениях отношений температур и скоростей движения пластин. Полученные результаты, сравнены с аналитическими для свободномолекулярного предела, а для широкого диапазона чисел Кнудсена, расчеты для теплового потока и напряжения трения были сопоставлены с результатами, полученными методом самоподобной интерполяции. Установлено, что в переходной области между свободномолекулярным и сплошнородным пределами, кроме касательной составляющей тензора напряжений присутствует нормальная составляющая (которой нет ни в свободномолекулярном случае, ни в случае сплошной среды) причем, и нормальная и касательная составляющие

существенно немонотонны по числам Кнудсена. Величина максимума этих напряжений зависит от скорости движения пластин и отношения температуры между пластинами. Кроме этого, направление теплового потока, по отношению к горячей стенке, зависит от числа Кнудсена и может менять свое направление при определенном соотношении перепада температур и скоростей движения пластин.

**Ключевые слова:** задача Куэтта, разреженный газ, потоки импульса и тепла.

### **Введение**

Динамика разреженного газа изучает явления, имеющие место при произвольном отношении длины пробега (времени между столкновениями) молекул к характерному размеру (времени) явления. В круг задач динамики разреженного газа входят, например, задачи об обтекании летательных аппаратов, движущихся на больших высотах, о движении газов в вакуумных аппаратах, ультразвуковых колебаниях в газах, структуре ударных волн и т.д. Исследование таких явлений требует учета молекулярной структуры газа, кинетического описания применения уравнения Больцмана. Решение уравнения Больцмана для таких задач крайне сложно, даже в настоящее время с использованием современной вычислительной техники. С другой стороны, ряд явлений, возникающих в разреженном газе можно выявить, исследуя простейшие течения, к которым относится течение Куэтта.

Течение газа между бесконечными параллельными пластинами, возникающее при их продольном движении (задача Куэтта), хорошо изучено теоретически в

линейной постановке (когда скорости движения пластин много меньше скорости звука, а перепад температуры пластин, отнесенный к температуре газа существенно меньше единицы). При этом, данные исследования проводились как в рамках постановки сплошной среды, так и с помощью моделей динамики разреженного газа [1, 2]. В линейной постановке задача Куэтта распадается на две отдельные задачи: задача о чистом сдвиге (температура пластин одинакова) и задачу о теплопередаче (пластины неподвижны) [1-7]. Однако, необходимо отметить, что при больших скоростях и при большой относительной разнице температур пластин в газе возникают нелинейные эффекты [8-11]. В частности, кроме напряжения трения, которое присутствует и в линейном случае, появляется напряжение давления, которого нет как в свободномолекулярной, так и в сплошносредной моделях. За счет работы внутренних напряжений повышается температура газа, что приводит к появлению переноса тепла по нормали к пластинам даже в случае их одинаковой температуры. Если пластины движутся с достаточно большой скоростью и имеют разные температуры, нормальный к пластинам тепловой поток складывается из двух частей: “диффузионный” (направленный от “горячей” пластины к холодной) и “конвективный” (направленный к пластинам). Таким образом, на горячей стенке диффузионный и конвективный тепловые потоки направлены в противоположные стороны. При определенных значениях относительной температуры и скорости движения пластин, поток тепла на горячей стенке может стать равным нулю или поменять свой знак. Полученные результаты позволили выявить ряд новых эффектов разреженности в течениях газа и дали больше знаний о изучении

механизмов процессов тепломассопереноса необходимых для совершенствования вакуумной и авиационно-космической техники.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим течение Куэтта в горизонтальной плоскости [1, 2], которую совместим с плоскостью  $xu$ . Ось  $x$  направлена вдоль пластин. Газ движется между двумя параллельными плоскими стенками на расстоянии  $h$  друг от друга. Пластина при  $y = 0$  покоится и нагрета до постоянной температуры  $T_0$ , а другая движется в собственной плоскости с постоянной скоростью  $W$  и нагрета до температуры  $T_1$ . Поскольку пластины имеют постоянные температуры и скорость движущейся пластины также постоянна, состояние газа является стационарным. Так как размеры пластин бесконечны (размеры пластин вдоль осей  $x$  и  $u$  существенно больше  $h$ ) задача становится одномерной, то есть все физические величины зависят лишь от одной переменной  $y$ . Состояние газа описывается функцией распределения молекулярных скоростей  $f(y, \xi)$ , удовлетворяющей уравнению Больцмана

$$\xi_y \frac{\partial f}{\partial y} = J(f)$$

где  $J(f)$  – интеграл столкновений.

Будем считать, что отражение молекул от стенок диффузное. Тогда можно считать, что функции распределения отраженных молекул по скоростям могут быть описаны распределением Максвелла с температурами соответствующих стенок:

$$f_0(y=0, \xi_y > 0) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\xi^2}{2kT_0}\right) \quad (1.1)$$

$$f_1(y=h, \xi_y < 0) = n_1 \left( \frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT_1} \left[ (\xi_x - W)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 \right]\right\} \quad (1.2)$$

здесь  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  – декартовы компоненты скорости молекул, причем  $\xi_y$  направлена перпендикулярно граничным поверхностям,  $\xi^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$  – полная скорость молекул.  $T_0, T_1$  – температуры нижней и верхней пластин.  $n_0$  и  $n_1$  – числовая плотность отраженных молекул.  $W$  – скорость движения верхней пластины.

Параметры  $n_0$  и  $n_1$  определяются из условий непротекания на стенках (равенство нулю нормальной составляющей скорости газа):

$$\int_{\xi_y > 0} \xi_y f_0 d\xi + \int_{\xi_y < 0} \xi_y f(0, \xi) d\xi = 0, \quad \int_{\xi_y < 0} \xi_y f_1 d\xi + \int_{\xi_y > 0} \xi_y f(h, \xi) d\xi = 0$$

В работе вычисляются плотность, скорость, температура газа, две компоненты тензора напряжений (касательная составляющая (напряжение трения), нормальная составляющая (напряжение давления) тензора напряжений) а также тепловой поток к стенкам.

Введем некоторые безразмерные параметры

$$t = \frac{T_0}{T_1}, \quad S_w = \frac{W}{\sqrt{2kT_1}}, \quad P_{xy} = \frac{P_{xy}}{p}, \quad P_{yy} = \frac{P_{yy}}{p} - 1, \quad p = nk\sqrt{T_0 T_1}, \quad Q = \frac{q}{q_1}, \quad q_1 = nkT_1 \sqrt{\frac{2kT_1}{m}}$$

где  $t$  – отношение температур пластин,  $S_w$  – относительная скорость,  $P_{xy}, P_{yy}$  – соответственно безразмерные касательная и нормальная составляющие тензора напряжений (компоненты тензора напряжений – напряжение трения и напряжение давления), и  $Q$  – безразмерный тепловой поток к нижней пластине.

## 2. Сильно разреженный газ

Рассмотрим свободномолекулярное течение газа [11] в постановке п.1 с краевыми условиями (1.2) и (1.3), тогда функция распределения в газе определяется

$$f = f_0 + f_1$$

Решение задачи Куэтта приведено в аналитическом виде в [2]. Для сильно разреженных газов функция распределения молекул  $f$  не зависит от нормальной координаты и при  $\xi_y > 0$  имеет вид (1.1) с числовой плотностью  $n_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{t}} n$ .

При  $\xi_y < 0$  функция распределения  $f_1$  задается в форме (1.2) с числовой плотностью  $n_1 = \frac{2\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} n$

Тогда скорость потока газа по  $x$  может быть вычислена как:

$$u = \frac{1}{n} \int \xi_x f d\xi = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} W, S = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} S_w, S = u \sqrt{\frac{m}{2kT_1}} \text{ или } \frac{S}{S_w} = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \quad (2.1)$$

Температура газа равна:

$$\frac{3}{2} nkT = \frac{m}{2} \int [(\xi_x - u)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2] f d\xi = \frac{3}{4} n_0 kT_0 + \frac{3}{4} n_1 kT_1 \left( 1 + \frac{2}{3} S_w^2 \right)$$

$$\frac{T}{T_1} = \sqrt{t} + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{t}}{(1 + \sqrt{t})^2} S_w^2 \quad (2.2)$$

Напряжение трения определяется как:

$$p_{xy} = m \int \xi_x \xi_y f d\xi, \quad \frac{p_{xy}}{p} = -\frac{2}{1+\sqrt{t}} \frac{S_w}{\sqrt{\pi}} = P_{xy}, \quad \text{или} \quad \frac{P_{xy}}{S_w} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}(1+\sqrt{t})} = -P_{cm} \quad (2.3)$$

Нормальная составляющая тензора напряжений (напряжение давления)  $P_{yy} = 0$

Аналогично вычисляется тепловой поток:

$$q = \int \frac{m}{2} \xi_y \xi^2 f d\xi, \quad Q = \frac{q}{q_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \left( t - 1 - \frac{1}{2} S_w^2 \right) (1 + \sqrt{t})^{-1} \quad (2.4)$$

это уравнение можно записать несколько иначе

$$\frac{q}{q_1} = q_{cm}^+ - q_{cm}^-, \quad q_{cm}^+ = a(t)(t-1), \quad q_{cm}^- = a(t) \frac{1}{2} S_w^2, \quad a(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \quad (2.5)$$

Из формулы (2.4) получается что тепловой поток направлен от нижней пластины к верхней при  $t > 1 + S_w^2 / 2$ , ( $q_{cm}^+ > q_{cm}^-$ ), и от верхней пластины к нижней при  $t < 1 + S_w^2 / 2$ , ( $q_{cm}^+ < q_{cm}^-$ ). Величина теплового потока немонотонна в зависимости от отношения температур  $t$  и относительной скорости  $S_w$ .

На рис. 1 и 2 показаны графики зависимости температуры  $T/T_1$  газа от относительной скорости  $S_w$  и отношения температур  $t$ . Сплошными кривыми нанесены результаты, полученные по формуле (2.2), а точками – методом прямого статистического моделирования.

На рис. 3 и 4, показаны зависимости скорости  $S/S_w$  и напряжения трения  $P_{xy}/S_w$  от отношения температур  $t$ , Сплошными кривыми нанесены результаты, полученные по формуле (2.1) и (2.3), а точками – методом прямого статистического моделирования.

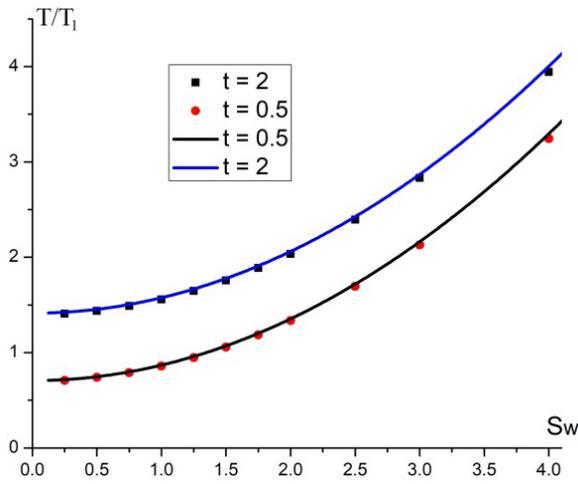


Рис. 1. Зависимость  $T/T_1$  от относительной скорости  $S_w$  при определенном отношении  $t = 0.5$  и  $t = 2$

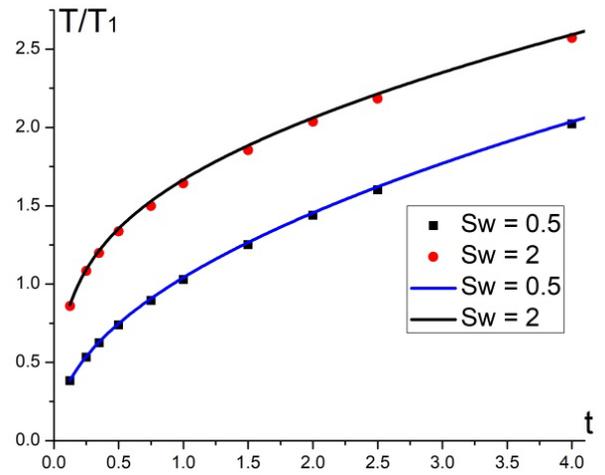


Рис. 2. Зависимость  $T/T_1$  от отношения температур  $t$  при определенном относительной скорости  $S_w = 0.5$  и  $S_w = 2$

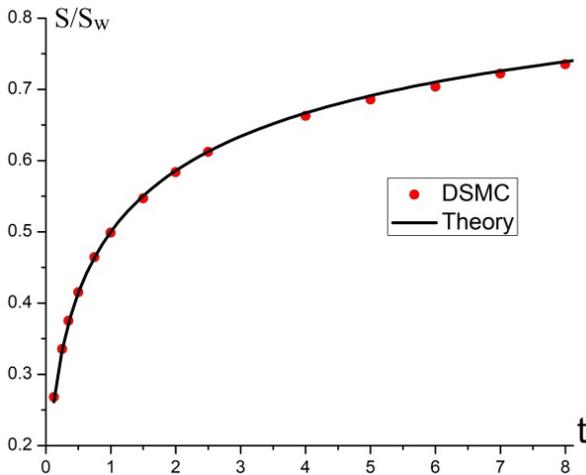


Рис. 3. Зависимость  $S/S_w$  от отношения температур  $t$

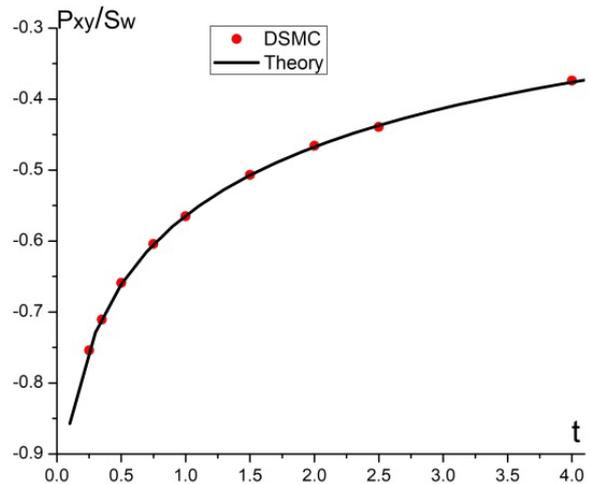


Рис. 4. Зависимость  $P_{xy}/S_w$  от отношения температур  $t$

На рис. 5 и 6 показаны графики зависимости теплового потока  $Q$  газа от относительной скорости  $S_w$  и отношения температур  $t$ . Сплошными кривыми нанесены результаты, полученные по формуле (2.4), а точками – методом прямого статистического моделирования.

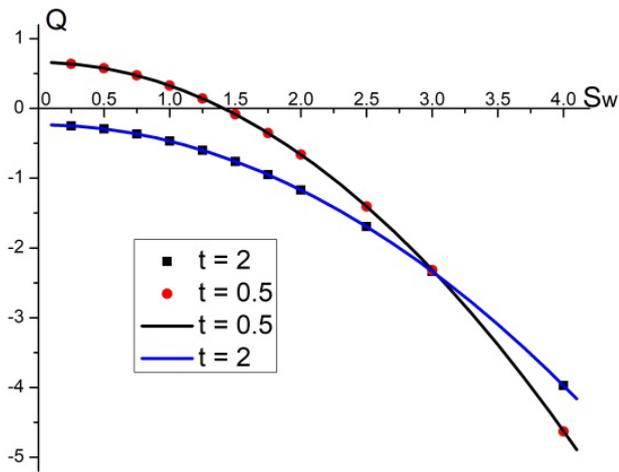


Рис. 5. Зависимость  $Q$  от относительной скорости  $S_w$  при определенном отношении температур  $t = 0.5$  и  $t = 2$

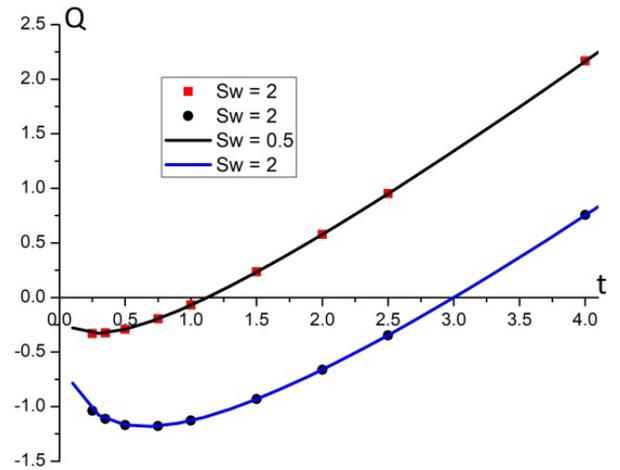


Рис. 6. Зависимость  $Q$  от отношения температур  $t$  при определенном относительной скорости  $S_w = 0.5$  и  $S_w = 2$

Как видно из приведенных выше рисунков, все расчеты, полученные методом прямого статистического моделирования при свободномолекулярном случае, хорошо согласуются с аналитическими результатами.

### 3. Вязкий газ

Рассмотрим стационарное плоское течение Куэтта несжимаемого газа в горизонтальной плоскости [12], которую совместим с плоскостью  $xu$ . Ось  $x$  направлена вдоль пластин. Газ движется между двумя параллельными плоскими стенками на расстоянии  $h$  друг от друга, одна из которых покоится, а другая движется в собственной плоскости с постоянной скоростью  $W$ , давление вдоль пластин постоянное. Для такого течения система уравнений имеет вид [12]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.1)$$

с граничными условиями:

$$u(y=0) = 0, u(y=h) = W, T(y=0) = T_0, T(y=h) = T_1 \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) с граничными условиями (3.2) имеют решение:

$$u = W \frac{y}{h}, T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{y}{h} + \frac{\mu}{2\lambda} W^2 \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности

Для теплового потока к нижней стенке можно записать (при  $y = 0$ ):

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{h} - \frac{\mu W^2}{2h} \quad (3.3)$$

Таким образом, тепловой поток складывается из диффузионной части (газ покоится,  $W = 0$ ) и конвективной части (температуры стенок одинаковы,  $T_0 = T_1$ ).

- 1) Если  $W = 0$  и  $T_1 > T_0$ , газ покоится, тепловой поток направлен к стенке  $y = 0$ , то есть от горячей стенки к холодной.
- 2) Если  $T_0 = T_1$ , то тепловой поток направлен к стенке  $y = h$ , то есть, эта стенка нагревается за счет трения.
- 3) При  $T_1 - T_0 > \mu W^2 / 2\lambda$  поток тепла направлен к стенке  $y = 0$ , при  $T_1 - T_0 < \mu W^2 / 2\lambda$  тепловой поток направлен к стенке  $y = h$ .

Запишем уравнение (3.3) в безразмерном виде

$$\frac{q}{q_1} = Kn \left[ \frac{15}{8} (t - 1) - \frac{1}{2} S_w^2 \right] = Kn (q_{hc}^+ - q_{hc}^-) \quad (3.4)$$

где  $q_{hc}^+ = \frac{15}{8}(t-1)$ ,  $q_{hc}^- = \frac{1}{2}S_w^2$  и  $Kn = \frac{\mu}{hnkT_1} \sqrt{\frac{2kT_1}{m}}$ ,  $S_w = W \sqrt{\frac{m}{2kT_1}}$ ,  $\lambda = \frac{15}{4} \frac{k}{m} \mu$ ,  $t = \frac{T_0}{T_1}$ ,  $m$

— масса молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $n$  — числовая плотность,  $Kn$  — число Кнудсена.

Величина теплового потока может иметь разный знак в зависимости от отношения температуры пластин. При  $t > 1 + 4S_w^2/15$  тепловой поток положителен, а при  $t < 1 + 4S_w^2/15$  тепловой поток отрицателен.

Для напряжения трения можно записать:

$$p_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\mu \frac{W}{h}, \quad \frac{P_{xy}}{S_w} = \frac{p_{xy}}{pS_w} = -\frac{Kn}{\sqrt{t}} = -Kn p_{hc}, \quad p_{hc} = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (3.5)$$

Для получения решения в аналитической форме используется метод “самоподобной интерполяции” [13, 14].

Имея в виду формулы (2.5) и (3.4), получаем:

$$\frac{q}{q_1} = q^+ - q^-, \quad q^+ = \begin{cases} q_{hc}^+ Kn, & Kn \rightarrow 0 \\ q_{cm}^+, & Kn \rightarrow \infty \end{cases}, \quad q^- = \begin{cases} q_{hc}^- Kn, & Kn \rightarrow 0 \\ q_{cm}^-, & Kn \rightarrow \infty \end{cases}$$

Интерполяционная формула первого порядка будет:

$$Q = \left( \frac{q}{q_1} \right)^* = \frac{q_{cm}^+ q_{hc}^+ Kn}{q_{cm}^+ + q_{hc}^+ Kn} - \frac{q_{cm}^- q_{hc}^- Kn}{q_{cm}^- + q_{hc}^- Kn} \quad (3.6)$$

величины  $q_{hc}^+$ ,  $q_{hc}^-$ ,  $q_{cm}^+$ ,  $q_{cm}^-$  определены формулами (2.5) и (3.4).

Аналогично, для напряжения трения, с учетом (2.3) и (3.5) получаем:

$$\frac{P}{S_w} = \frac{1}{S_w} \left( \frac{P_{xy}}{p} \right)^* = -\frac{p_{cm} p_{hc} Kn}{p_{cm} + p_{hc} Kn} \quad (3.7)$$

## 4. Результаты и обсуждение

Рассмотрим задачу Куэтта в широком диапазоне чисел Кнудсена при фиксированных значениях отношения температур  $t$  и относительной скорости  $S_w$ .

Задача решалась методом прямого статистического моделирования (DSMC) [15-20].

Для данной постановки вычислим плотность, скорость, и температуру газа для трех характерных случаев:

- 1)  $Kn = 0.001$  (типичный случай, область которого близка к сплошной среде);
- 2)  $Kn = 1$  (типичный случай, область которого называется переходной);
- 3)  $Kn = \infty$  (свободномолекулярный случай).

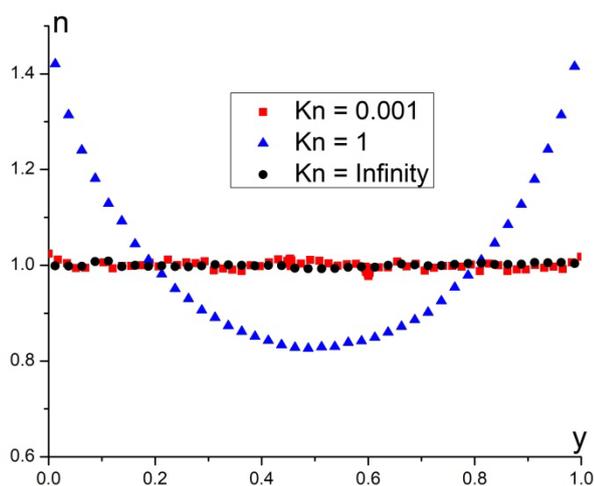


Рис. 7. Распределение плотности газа по  $y$  для разных значений числа Кнудсена при  $t = 1$  и  $S_w = 10$

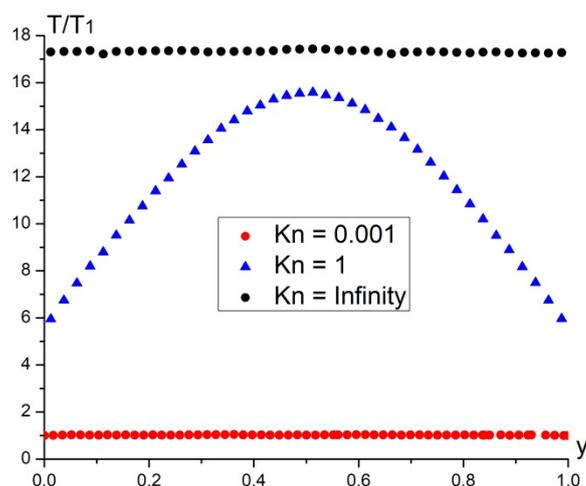


Рис. 8. Распределение температуры газа по  $y$  для разных значений числа Кнудсена при  $t = 1$  и  $S_w = 10$

На рис. 7, 8 и 9 показаны графики распределения плотности, скорости и температуры газа по  $y$  для указанных выше значений числа Кнудсена ( $Kn = 0.001, 1, \infty$ ), при отношении температур  $t = 1$  и относительной скорости  $S_w = 10$ .

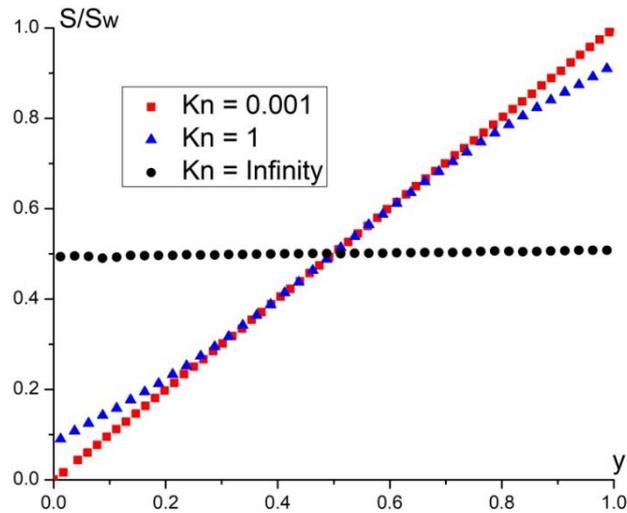


Рис. 9. Распределение скорости газа по  $y$  для разных значений числа Кнудсена при  $t = 1$  и  $S_w = 10$

Из этих графиков видно, что в переходной области ( $Kn = 1$ ), распределение плотности и температуры газа между пластинами неравномерное. Такое неравномерное распределение плотности и температуры влияет на присутствие нормальной составляющей тензора напряжений, которой нет ни в свободномолекулярном случае, ни в случае сплошной среды.

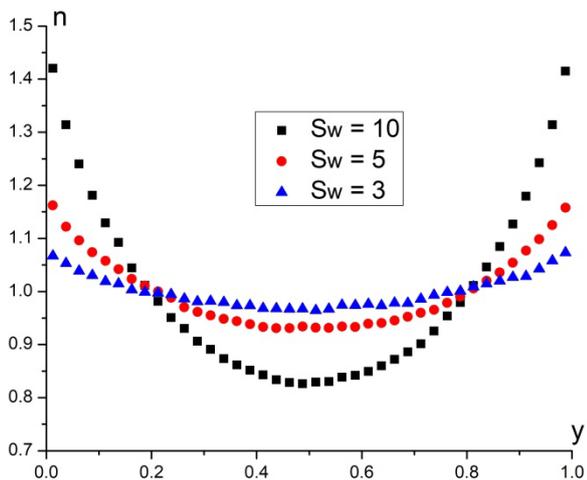


Рис. 10. Распределение плотности газа по  $y$  для разных значений  $S_w$  при  $t = 1$  и

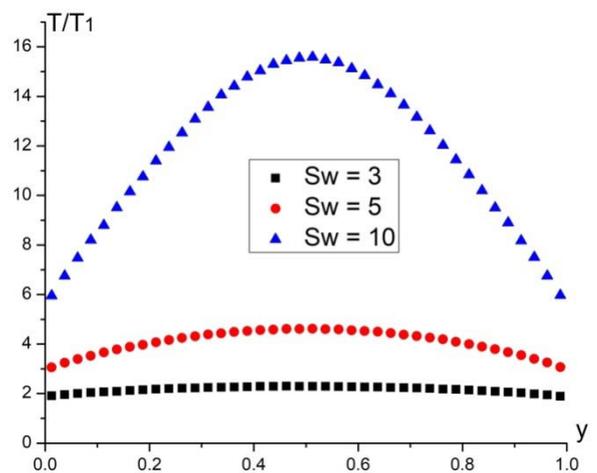


Рис. 11. Распределение температуры газа по  $y$  для разных значений  $S_w$  при  $t = 1$  и  $Kn = 1$

При увеличении скорости движения верхней пластины  $S_w$ , неравномерное распределение плотности и температуры газа становится еще сильнее. На рис. 10 и 11 показаны распределения плотности и температуры по  $y$  от разных значений относительной скорости  $S_w$  в переходной области ( $Kn = 1$ ).

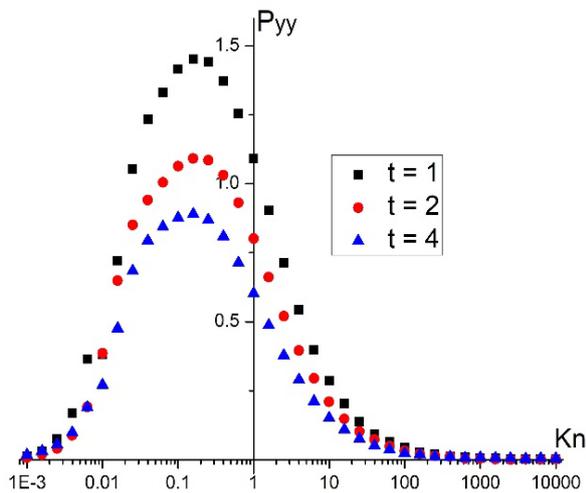


Рис. 12 Зависимость напряжения давления от числа Кнудсена при  $S_w = 5$  и разных значениях отношений температур  $t$

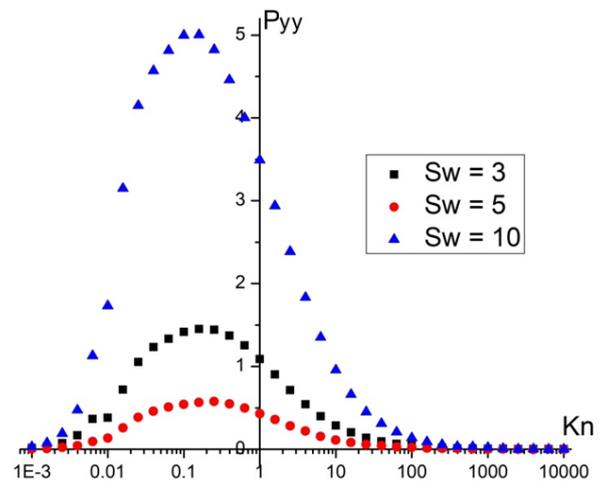


Рис. 13 Зависимость напряжения давления от числа Кнудсена при  $t = 1$  и разных значениях относительной скорости  $S_w$

Интересный эффект, который обнаружен в данной работе, это присутствие напряжения давления  $P_{yy}$  в переходной области (рис.12, 13). Он приводит к тому, что в переходной области две пластины не просто движутся относительно друг от друга, а ещё и отталкиваются. Максимальное значение  $P_{yy}$  зависит от относительной скорости  $S_w$  и отношения температуры  $t$ .

На рис. 14, 15 и 16 сопоставлены результаты, полученные в рамках метода прямого статистического моделирования (точки) и метода самоподобной интерполяции (сплошные линии) (формулы (3.6) и (3.7)).

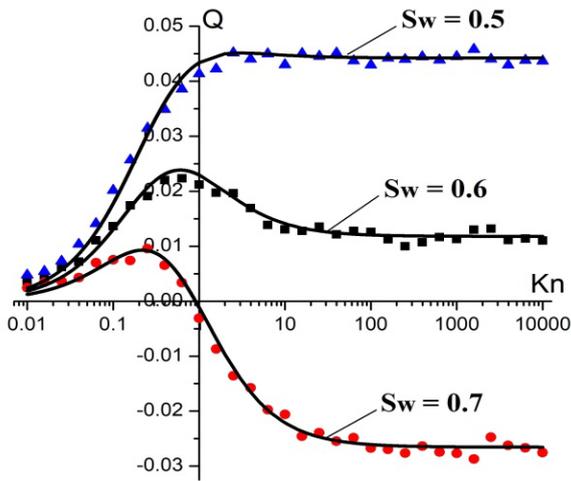


Рис. 14. Зависимость  $Q$  от числа Кнудсена для разных значений относительной скорости  $S_w$  при отношении  $t = 1.2$

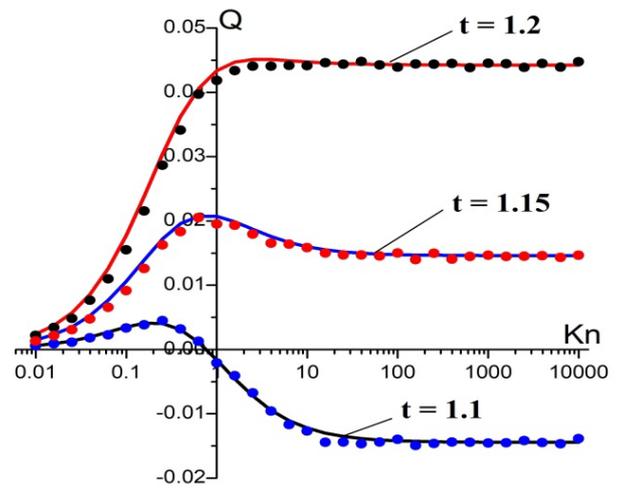


Рис. 15. Зависимость  $Q$  от числа Кнудсена для разных значений отношения температур  $t$  при относительной скорости  $S_w = 0.5$

На рис.14 представлен график зависимости величины теплового потока  $Q$  от относительной скорости  $S_w$  при фиксированных значениях отношения температур пластин  $t$ , а на рис. 15 – от отношения температур пластин  $t$  при фиксированных значениях относительной скорости  $S_w$ . Отчетливо виден немонотонный характер этой зависимости и изменение знака теплового потока  $Q$  в зависимости от чисел Кнудсена  $Kn$ .

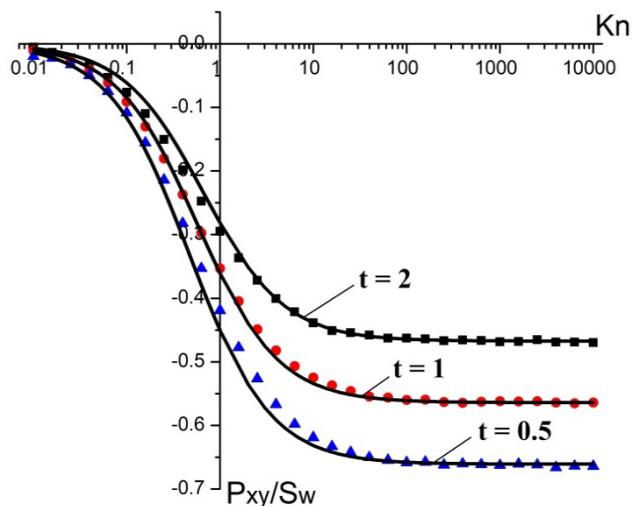


Рис. 16. Зависимость  $P_{xy} / S_w$  от числа Кнудсена для разных значений отношения температур  $t$  при определенной относительной скорости  $S_w = 0.5$

На рис. 16 показан график для касательной составляющей тензора напряжений (напряжение трения) от числа Кнудсена при разных значениях отношений температуры  $t$ .

### **Выводы**

Рассмотрены нелинейные процессы тепломассопереноса в разреженном газе, заключенном между бесконечными параллельными пластинами, которые имеют разные температуры и движутся относительно друг друга. Найдены следующие эффекты, которые могут быть обнаружены только в рамках нелинейной постановки:

- Обнаружено напряжение давления, которого нет как в свободномолекулярном случае, так и в случае сплошной среды. Причем, данное явление имеет существенно немонотонный характер по числам Кнудсена и его максимальное значение увеличивается с ростом скорости движения пластины и отношения их температур.
- При определенных условиях (соотношение между величиной скорости движения пластин и отношения их температур) тепловой поток на поверхности горячей пластины меняет свой знак на противоположный.
- Тепловой поток на горячей стенке может менять свой знак в зависимости от степени разреженности газа (числа Кнудсена).

### **Библиографический список**

1. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. - М: Наука, 1967. - 440 с.

2. Cercignani C. The Boltzmann Equation and Its Applications, Springer, New York/Berlin, 1988, 476 p.
3. Yoshio Sone. Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques and Applications, Birkhäuser, 2007, 667 p.
4. Горелов С.Л., Коган М.Н. Течение разреженного газа между двумя параллельными пластинами // Ученые записки ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 6. С. 126 - 130.
5. Горелов С.Л., Выонг Ван Тьен. Течение Куэтта и теплопередача между параллельными пластинами в разреженном газе // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 10. С. 33 - 46.
6. Выонг Ван Тьен, Горелов С.Л. Теплопередача в цилиндрическом течении Куэтта разреженного газа // Механика жидкости и газа. 2016. № 6. С. 101 - 107.
7. Haviland J.K., Lavin M.L. Application of the Monte Carlo Method to Heat Transfer in a Rarefied Gas // Physics of Fluids, 1962, vol. 5, no. 11, pp. 1399 - 1405.
8. Ivchenko I.N., Loyalka S.K., Tompson R.N. Analytical methods for problems of molecular transport, Springer, 2007, 409 p.
9. Абрамов А.А., Бутковский А.В. Эффекты немонотонности и изменения знака потока энергии в переходном режиме в задаче Куэтта с теплопередачей // Механика жидкости и газа. 2010. № 1. С. 168 - 175.
10. Абрамов А.А., Бутковский А.В. Эффекты немонотонности потока энергии и нормального импульса в переходном режиме в задаче Куэтта при больших числах Маха // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 2. С. 274 - 278.

11. Черняк В.Г., Поликарпов А.Ф. Нелинейные явления в газах в проблеме Куэтта // Журнал экспериментальной и технической физики. 2010. Т. 137. № 1. С. 165 - 176.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М: Наука, 1974. - 711 с.
13. William W. Liou, Yichuan Fang. Microfluid Mechanics: Principles and Modeling, The McGraw-Hill Companies, Inc, 2006, 353 p.
14. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. - М.: Машиностроение, 1977. - 184 с.
15. Шидловский В.П. Введение в динамику разреженного газа. - М: Наука, 1965. - 220 с.
16. Bird G.A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows, Clarendon press, Oxford, 1994, 458 p.
17. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. - М: Мир, 1981. - 320 с.
18. Bird G.A. Monte Carlo simulation of gas flows // Annual Review of Fluid Mechanics, 1978, vol. 10, pp. 11 - 31.
19. Березко М.Э., Никитченко Ю.А., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80922>
20. Sharipov F., Cumin L.M.G., and Kalempa D. Plane Couette flow of binary gaseous mixture in the whole range of the Knudsen number // European Journal of Mechanics B/Fluids, 2004, no. 23, pp. 899 - 906.

21. Егоров И.В., Ерофеев А.И. Исследование гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе сплошнородного и кинетического подходов // Ученые записки ЦАГИ. 1997. № 2. С. 23 - 39.

22. Shen C. Rarefied Gas Dynamics: Fundamentals, Simulations and Micro Flows, Springer, Berlin Heidelberg, New York, 2005, 406 p.