

Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории

Фирсанов Вал.В.^{1*}, Фам В.Т.^{1}, Чан Н.Д.²**

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

²*Государственный технический университет им. Ле Куи Дона,*

ул. Хоанг Куок Вьет, 236, Ханой, Вьетнам

** e-mail: k906@mai.ru*

*** e-mail: pvthien88@gmail.com*

Статья поступила 18.09.2020

Аннотация

Разработан вариант уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния сферических оболочек из слоистых композиционных материалов. При построении математической модели оболочки применяются трехмерные уравнения теории упругости. Компоненты искомым перемещений аппроксимируются полиномами по нормальной к срединной поверхности оболочки координате на две степени выше относительно классической теории Кирхгофа – Лява. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия и соответствующие граничные условия. Решение сформулированной краевой задачи проводится последовательным применением методов конечных разностей и матричной прогонки. Проведено

сравнение результатов, полученных по предлагаемой уточненной теории, с данными, приведенными в публикациях других авторов.

Ключевые слова: сферическая оболочка, слоистый композиционный материал, вариант уточненной теории, вариационный принцип Лагранжа, метод конечных разностей, метод матричной прогонки, прогиб оболочки, поперечные нормальные напряжения.

Введение

В настоящее время благодаря многим преимуществам, таким как высокая прочность и низкая плотность, многослойные композитные оболочки широко применяются в различных областях машиностроения, в том числе авиационно-космической техники, а также в строительном деле. Например, в аэрокосмической промышленности 50 процентов деталей коммерческого самолета производятся из композиционных материалов, так как их использование для изготовления корпуса и крыльев самолетов нового поколения может снизить до 20% его общую массу относительно массы самолета, изготавливаемого из алюминиевых сплавов.

Инженерные расчеты оболочек базируются на результатах классической теории типа Кирхгофа – Лява [1,2], в основу которой была положена гипотеза о сохранении нормального элемента, позволившая привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. В результате поперечные нормальные напряжения растяжения (сжатия) обнуляются, а касательными напряжениями поперечных сдвиговых деформаций пренебрегают из-за их малости. Теоретические и

экспериментальные исследования показали, что при определении напряженного состояния пластин и оболочек, особенно в зонах соединений (фланцевых, сварных), локального и быстро изменяющегося нагружения, а также выполненных из неоднородных материалов, классическая теория не дает удовлетворительного соответствия с практикой.

Для композитных многослойных оболочек достоверное определение нормальных и касательных напряжений, соответствующих поперечным деформациям, представляет собой актуальную проблему. Известно [3-5,18-21], что эти напряжения по величине одного порядка с напряжениями, соответствующими классической теории. Эти дополнительные напряжения могут вызвать расслоение материала оболочки и привести к ее разрушению. По этой причине основные усилия исследователей были направлены на построение уточненной теории пластин и оболочек, свободной от гипотез Кирхгофа – Лява.

Один из возможных путей построения указанной теории состоит в применении асимптотических методов, в том числе метода прямого асимптотического интегрирования уравнений трехмерной теории упругости. В рамках вариационно-асимптотического метода с помощью специально построенной аппроксимирующей полиномиальной функции Вал. В. Фирсановым [3-5] были сформулированы варианты приближенной теории, уточняющие результаты классической теории не только во внутренних областях пластин и оболочек постоянной и переменной толщины, но и в их узких краевых зонах. Установлено, что дополнительное НДС вблизи защемленного края вносит существенный вклад в

общее напряженное состояние. Асимптотические методы являются основным аппаратом преобразования уравнений теории упругости в работах Гольденвейзера А.Л. [6,7], Агаловяна Л.А. [8], Wu [9,10], А.Н. Sofiyev [11] и других ученых.

Другой подход построения математически обоснованной теории представляет теория сдвиговых деформаций первого порядка (FSDT) [12-14]. Эта теория основана на гипотезах Тимошенко – Рейсснера, что поперечные отрезки прямых линий после деформации остаются прямыми, но не будут нормальными к срединной поверхности. Теория FSDT требует использовать поправочные коэффициенты сдвига, от которых зависит точность результатов расчета. Ограничения классической теории и FSDT убедили исследователей разработать теорию сдвиговых деформаций высокого порядка (HSDT). На её основе Редди [15], J.L. Mantari [16], Sayyad [17] исследовали слоистые композитные пластины и оболочки. Однако их предположения не позволяют удовлетворить естественным граничным условиям на поверхностях пластин и оболочек.

Иной подход, называемый в [18,19] энергетически согласованным, заключается в аппроксимации искомым перемещений полиномиальными функциями по нормальной координате и определении количества слагаемых в этих аппроксимациях по тангенциальным и поперечному направлениям. Одна из особенностей этого подхода состоит в том, что поперечные нормальные и касательные напряжения определяются непосредственно интегрированием уравнений равновесия трёхмерной теории упругости. На основе этого подхода в работах [20-21] построена уточненная теория расчета НДС цилиндрических

оболочек. В работе [20] в рамках уточненной теории для цилиндрической оболочки получено частотное уравнение, позволяющее определить высокие тона свободных колебаний, не описываемых классической теорией.

Следует отметить также работы [22-25], в которых рассматриваются другие методы уточненного расчета пластин и оболочек.

В данной работе в рамках подхода, представленного в [18-21], построена уточненная математическая модель НДС сферических оболочек из слоистых композиционных материалов. Основные уравнения уточненной теории оболочки получаются с помощью вариационного принципа Лагранжа и разложения искомых перемещений по нормальной к срединной поверхности оболочки координате в полиномы на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Основные уравнения уточненной теории сферической оболочки

Рассматривается сферическая оболочка постоянной толщины $2h$, отнесенная к ортогональной системе координат θ, φ, ξ (рис. 1). Основное направление армирования волокон каждого слоя, соответственно, совпадает с направлением локальной системы координат $O123$.

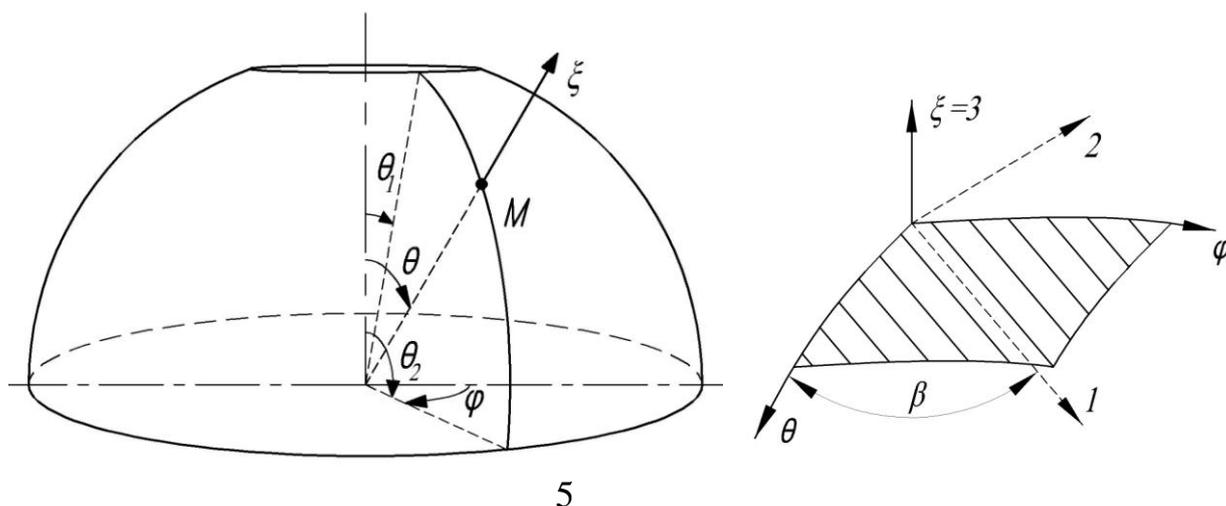


Рис.1. Композитная многослойная сферическая оболочка

Здесь θ представляет собой угол между осью оболочки и нормалью к поверхности оболочки, φ - угол, определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге, а ось ξ направлена по внешней нормали к срединной поверхности радиуса R . Обозначим через A_1, A_2 - коэффициенты первой квадратичной формы, имеем $A_1 = R, A_2 = R \sin \theta, N$ - количество слоев.

Полагаем, что по внутренней и внешней поверхностях оболочки, а также на торцевых плоскостях действуют внешние распределенные нагрузки $q_{i3}^{\pm}, q_{ji}, i = \overline{1,3}, j = 1,2$, соответственно.

Представим искомые упругие перемещения в виде:

$$\begin{aligned} U_1(\theta, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^3 u_k(\theta, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \\ U_2(\theta, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^3 v_k(\theta, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \\ U_3(\theta, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^2 w_k(\theta, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \end{aligned} \quad (1)$$

В аппроксимациях (1) индексы 1, 2, 3 соответствуют осям θ, φ , и ξ .

Деформации оболочки определяются как

$$\{e\} = \{e_{\theta\theta}, e_{\varphi\varphi}, e_{\xi\xi}, e_{\varphi\xi}, e_{\theta\xi}, e_{\theta\varphi}\}^T,$$

где, компоненты деформаций находятся с помощью геометрических соотношений

$$\begin{aligned}
e_{\theta\theta} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} U_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_3, e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \theta} U_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_3, \\
e_{\xi\xi} &= \frac{\partial U_3}{\partial \xi}, e_{\theta\varphi} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} U_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \theta} U_2 \right], \\
e_{\theta\xi} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_1, e_{\varphi\xi} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_2,
\end{aligned} \tag{2}$$

и коэффициенты Ламе H_k ($k = \overline{1,3}$) определяются формулами

$$H_i = A_i a_i, H_3 = 1, a_i = 1 + \frac{\xi}{R_i}, i = 1, 2.$$

Закон Гука для k -го слоя в локальной системе координат O123 имеет следующий вид:

$$\{\sigma_{123}^{(k)}\} = [C^{(k)}] \{e_{123}^{(k)}\}.$$

Здесь $\{\sigma_{123}^{(k)}\} = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T$ - вектор напряжений k -го слоя

оболочки, $\{e_{123}^{(k)}\} = [e_{11}^{(k)}, e_{22}^{(k)}, e_{33}^{(k)}, e_{23}^{(k)}, e_{13}^{(k)}, e_{12}^{(k)}]^T$ - вектор деформаций k -го слоя, $[C^{(k)}]$ -

матрица жесткости k -го слоя

$$[C^{(k)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$C_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} (1 - \mu_{23}^{(k)} \mu_{32}^{(k)})}{\mu^{(k)}}, C_{12}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} (\mu_{21}^{(k)} + \mu_{31}^{(k)} \mu_{23}^{(k)})}{\mu^{(k)}}, C_{13}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} (\mu_{31}^{(k)} + \mu_{21}^{(k)} \mu_{32}^{(k)})}{\mu^{(k)}},$$

$$C_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} (1 - \mu_{13}^{(k)} \mu_{31}^{(k)})}{\mu^{(k)}}, C_{23}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} (\mu_{32}^{(k)} + \mu_{12}^{(k)} \mu_{31}^{(k)})}{\mu^{(k)}}, C_{33}^{(k)} = \frac{E_3^{(k)} (1 - \mu_{12}^{(k)} \mu_{21}^{(k)})}{\mu^{(k)}},$$

$$C_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)}, C_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, C_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)}, \mu^{(k)} = (1 - \mu_{12}^{(k)} \mu_{21}^{(k)} - \mu_{23}^{(k)} \mu_{32}^{(k)} - \mu_{13}^{(k)} \mu_{31}^{(k)} - 2\mu_{13}^{(k)} \mu_{32}^{(k)} \mu_{21}^{(k)}),$$

где $E_i^{(k)}$ - модуль Юнга, $G_{ij}^{(k)}$ - модуль сдвига, $\mu_{ij}^{(k)}$ - коэффициенты Пуассона материала k -го слоя.

Связь между напряжениями и деформациями k -го слоя в общей системе координат $O\theta\varphi\xi$ определяется следующей формулой [15]:

$$\{\sigma_{\theta\varphi\xi}^{(k)}\} = [T^{(k)}]^T [C^{(k)}] [T^{(k)}] \{e\}. \quad (3)$$

Здесь $[T^{(k)}]$ - матрица перехода, принимаемая в виде

$$[T^{(k)}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta^{(k)} & \sin^2 \beta^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \sin \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)} \\ \sin^2 \beta^{(k)} & \cos^2 \beta^{(k)} & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta^{(k)} & -\sin \beta^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \beta^{(k)} & \cos \beta^{(k)} & 0 \\ -\sin 2\beta^{(k)} & \sin 2\beta^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \beta^{(k)} - \sin^2 \beta^{(k)} \end{bmatrix}$$

и $\{\sigma_{\theta\varphi\xi}^{(k)}\} = \{\sigma_{\theta\theta}^{(k)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}, \sigma_{\xi\xi}^{(k)}, \sigma_{\varphi\xi}^{(k)}, \sigma_{\theta\xi}^{(k)}, \sigma_{\theta\varphi}^{(k)}\}^T$, - вектор напряжений k -го слоя оболочки в общей системе координат $O\theta\varphi\xi$.

Для построения основных уравнений уточненного варианта теории сферических оболочек используется вариационный принцип Лагранжа

$$\begin{aligned}
\delta L = & \sum_{k=1}^N \iiint (\sigma_{\theta\theta}^{(k)} \delta e_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \delta e_{\varphi\varphi} + \sigma_{\xi\xi}^{(k)} \delta e_{\xi\xi} + \sigma_{\theta\varphi}^{(k)} \delta e_{\theta\varphi} + \sigma_{\theta\xi}^{(k)} \delta e_{\theta\xi} + \\
& + \sigma_{\varphi\xi}^{(k)} \delta e_{\varphi\xi}) A_1 A_2 a_1 a_2 d\theta d\varphi d\xi - \sum_{k=1}^N \iint (q_{11} \delta U_1 + q_{12} \delta U_2 + q_{13} \delta U_3) A_2 a_2 d\varphi d\xi - \\
& - \sum_{k=1}^N \iint (q_{21} \delta U_1 + q_{22} \delta U_2 + q_{23} \delta U_3) A_1 a_1 d\theta d\xi - \iint \left\{ q_{13}^+ [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=+h)} - \right. \\
& - q_{13}^- [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=-h)} + q_{23}^+ [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=+h)} - q_{23}^- [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=-h)} + \\
& \left. + q_{33}^+ [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=+h)} - q_{33}^- [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=-h)} \right\} A_1 A_2 a_1 a_2 d\theta d\varphi = 0
\end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя выражения (1) последовательно в (2), (3), а затем полученный результат в (4), после преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений теории сферических оболочек в перемещениях:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_2^{v_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) v_k + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w_n = Ki^{q_{13}^+} q_{13}^+ - Ki^{q_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{1,4} \\
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_2^{u_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_0^{v_k} + Ki_1^{v_k} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\
& + \sum_{n=0}^2 Ki_2^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = Ki^{q_{23}^+} q_{23}^+ - Ki^{q_{23}^-} q_{23}^-, \quad i = \overline{5,8} \\
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 Ki_2^{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial \theta} + Ki_{11}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{22}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n \\
& = Ki^{q_{33}^+} q_{33}^+ - Ki^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9,11}
\end{aligned} \quad (5)$$

Здесь переменные коэффициенты Ki представляют собой функции, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и угла θ . Ввиду их многочисленности и громоздкости соответствующих формул

здесь они не приводятся. В уравнении (5) u_m, v_k, w_n - коэффициенты разложений искомых перемещений в выражениях (1).

Решение сформулированной краевой задачи

Приведем систему двумерных уравнений (5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов. С этой целью представим внешние нагрузки и перемещения в виде:

$$\begin{aligned}
 q_{13}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)13}^{\pm}(\theta) \cos(z\varphi), \\
 q_{23}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)23}^{\pm}(\theta) \sin(z\varphi), \\
 q_{33}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)33}^{\pm}(\theta) \cos(z\varphi), \\
 u_m(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} U_{mz}(\theta) \cos(z\varphi), \quad m = \overline{0,3}, \\
 v_k(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} V_{kz}(\theta) \sin(z\varphi), \quad k = \overline{0,3}, \\
 w_n(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} W_{nz}(\theta) \cos(z\varphi), \quad n = \overline{0,2},.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (6) в систему (5) и сравнивая коэффициенты тригонометрических рядов в левых и правых частях, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} - z^2 Ki_{22}^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{d}{d\theta} + Ki_{11}^{u_m} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 \left(Ki_2^{v_k} + Ki_{12}^{v_k} \frac{d}{d\theta} \right) V_{kz} + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{d}{d\theta} \right) W_{nz} = Ki^{q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - Ki^{q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1,4} \\
& z \sum_{m=0}^3 \left(-Ki_2^{u_m} - Ki_{12}^{u_m} \frac{d}{d\theta} \right) U_{mz} + \sum_{k=0}^3 \left(Ki_0^{v_k} - z^2 Ki_{22}^{v_k} + Ki_1^{v_k} \frac{d}{d\theta} + Ki_{11}^{v_k} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) V_{kz} - \\
& - z \sum_{n=0}^2 Ki_2^{w_n} W_{nz} = Ki^{q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - Ki^{q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5,8} \\
& \sum_{m=0}^3 \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{d}{d\theta} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 Ki_2^{v_k} V_{kz} + \sum_{n=0}^2 \left(Ki_0^{w_n} - z^2 Ki_{22}^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{d}{d\theta} + \right. \\
& \left. + Ki_{11}^{w_n} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) W_{nz} = Ki^{q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - Ki^{q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9,11}, \quad z = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

Система уравнений (7) решается конечно-разностным методом. Производные 1-ого и 2-ого порядков аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности:

$$\frac{dy_j}{d\theta} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2s}, \quad \frac{d^2 y_j}{d\theta^2} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{s^2}.$$

Из уравнений (7) получим следующую конечно-разностную систему:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} - \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + Ki_0^{u_m} - z^2 Ki_{22}^{u_m} \right) U_{mz}^j + \left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{k=0}^3 \left(\frac{-zKi_{12}^{v_k}}{2s} V_{kz}^{j-1} + zKi_2^{v_k} V_{kz}^j + \frac{zKi_{12}^{v_k}}{2s} V_{kz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-Ki_1^{w_n}}{2s} W_{nz}^{j-1} + Ki_0^{w_n} W_{nz}^j + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} W_{nz}^{j+1} \right) = Ki^{q_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - Ki^{q_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1,4}, \\
& \quad \sum_{m=0}^3 \left(\frac{zKi_{12}^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} - zKi_2^{u_m} U_{mz}^j - \frac{zKi_{12}^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{k=0}^3 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{v_m}}{s^2} - \frac{Ki_1^{v_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{v_m}}{s^2} + Ki_0^{v_m} - z^2 Ki_{22}^{v_m} \right) V_{kz}^j + \left(\frac{Ki_{11}^{v_m}}{s^2} + \frac{Ki_1^{v_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j+1} \right) - \\
& \quad - \sum_{n=0}^2 zKi_2^{w_n} W_{nz}^j = Ki^{q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - Ki^{q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5,8}, \\
& \quad \sum_{m=0}^3 \left(\frac{-Ki_1^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} + Ki_0^{u_m} U_{mz}^j + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 zKi_2^{v_m} V_{kz}^j + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} - \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + Ki_0^{w_n} - z^2 Ki_{22}^{w_n} \right) W_{nz}^j + \left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j+1} \right) = \\
& \quad = Ki^{q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - Ki^{q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9,11}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad z = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{8}$$

где s , $(M+1)$ – соответственно шаг конечно-разностной схемы и число узлов.

Система (8) является системой линейных алгебраических уравнений. Её матрица имеет одиннадцатый порядок и решается методом матричной прогонки с помощью программы для ЭВМ.

В результате получены перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Деформации оболочки находится с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения определяются из соотношений закона Гука. Поперечные напряжения получаются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Пример расчета

В качестве примера расчета рассматривается многослойная композитная оболочка, жестко защемленная на двух краях $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 90^\circ$. Эта оболочка рассматривается в работах Alwar [13,14] на основе теории FSDT и в работах Wu [9] в рамках асимптотического метода.

Значения безразмерных прогибов и напряжений определяются по следующим формулам:

$$\bar{w} = \frac{wE_2(2h)^3 \times 10^4}{q_0 R^4 (\theta_2 - \theta_1)^4}, \quad (\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{q_0 S^4} (\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \bar{\sigma}_{\theta\xi} = \frac{\sigma_{\theta\xi}}{q_0 S}, \quad \bar{\sigma}_{\xi\xi} = \frac{\sigma_{\xi\xi}}{q_0},$$

$$S = \frac{R}{2h}, \quad \theta_3 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

В таблице 1 приведены результаты расчета безразмерного прогиба в точке $\theta = \theta_3$, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки q_0 на наружной поверхности. Материал каждого слоя имеет следующие параметры: модули упругости $E_1 / E_2 = 5, 10, 15, 30, E_3 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = 0.428E_2$, коэффициенты Пуассона $\mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.28$, относительная толщина $S = 20$.

В таблице 2 приведен результат расчета безразмерного прогиба в точке $\theta = \theta_3$ двухслойной оболочки $[90^\circ/0]$, находящейся под действием асимметричной нагрузки $q = q_0 \cos \theta$ на наружной поверхности. Материал каждого слоя имеет следующие параметры: модули упругости $E_1 / E_2 = 20, E_3 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = 0.5E_2$, коэффициенты Пуассона $\mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.28$, относительной толщиной $S = 30$.

Таблица 1

E_1/E_2	Alwar [13]	Wu [9]	В данной работе
[90°/0]			
5	1.1541	1.1495	1.1503
10	0.6480	0.6432	0.6411
15	0.4500	0.4454	0.4439
30	0.2443	0.2327	0.2309
[90°/0/90°/0]			
5	1.1710	1.1715	1.1821
10	0.6650	0.6630	0.6618
15	0.4636	0.4621	0.4574
30	0.2429	0.2420	0.2351
[90°/0/0/90°]			
5	1.1470	1.1435	1.1530
10	0.6463	0.6438	0.6456
15	0.4500	0.4479	0.4474
30	0.2354	0.2349	0.2319

Таблица 2

	R.S. Alwar [14]	В данной работе
\bar{w}	0.50788	0.50788

Из анализа данных таблиц 1 и 2, можно установить, что численные результаты, полученные в данной работе при симметричной и асимметричной нагрузках, практически совпадают с результатами, представленными [9] и [13,14].

На рис. 2-5 показаны графики изменений по толщине безразмерных напряжений на краю $\theta = \theta_2$ и в точке $\theta = \theta_3$, изготовленной из материала AS/3501 [15], с различными относительными толщинами S . Оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки q_0 на наружной поверхности.

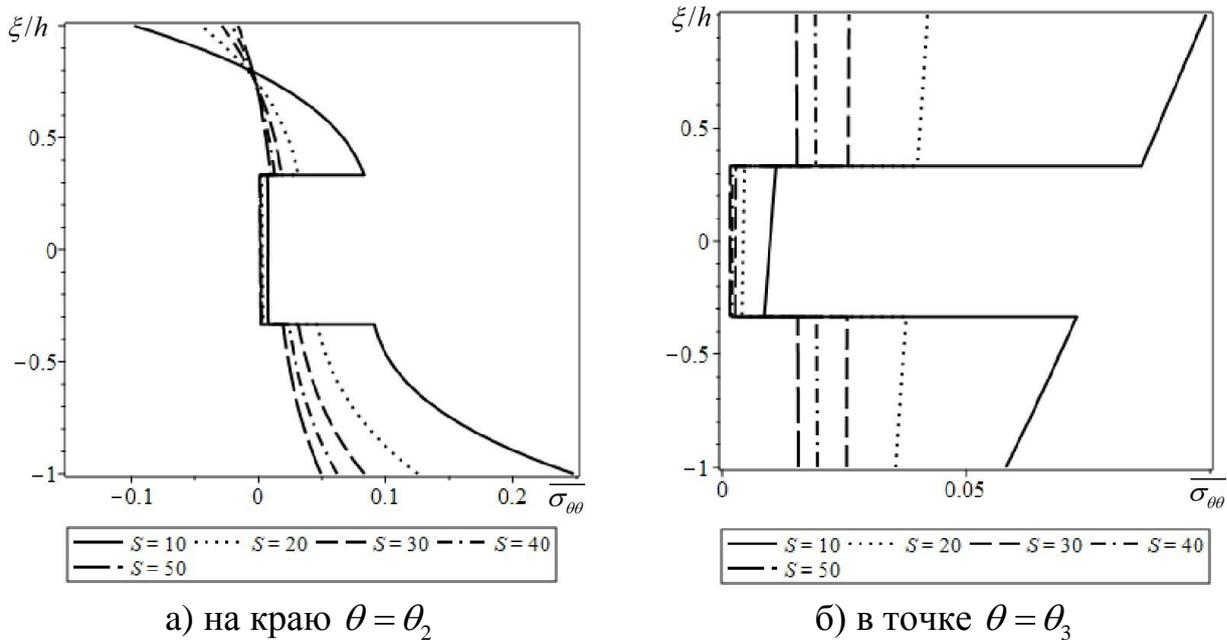


Рис. 2. Изменение $\overline{\sigma_{\theta\theta}}$ по толщине

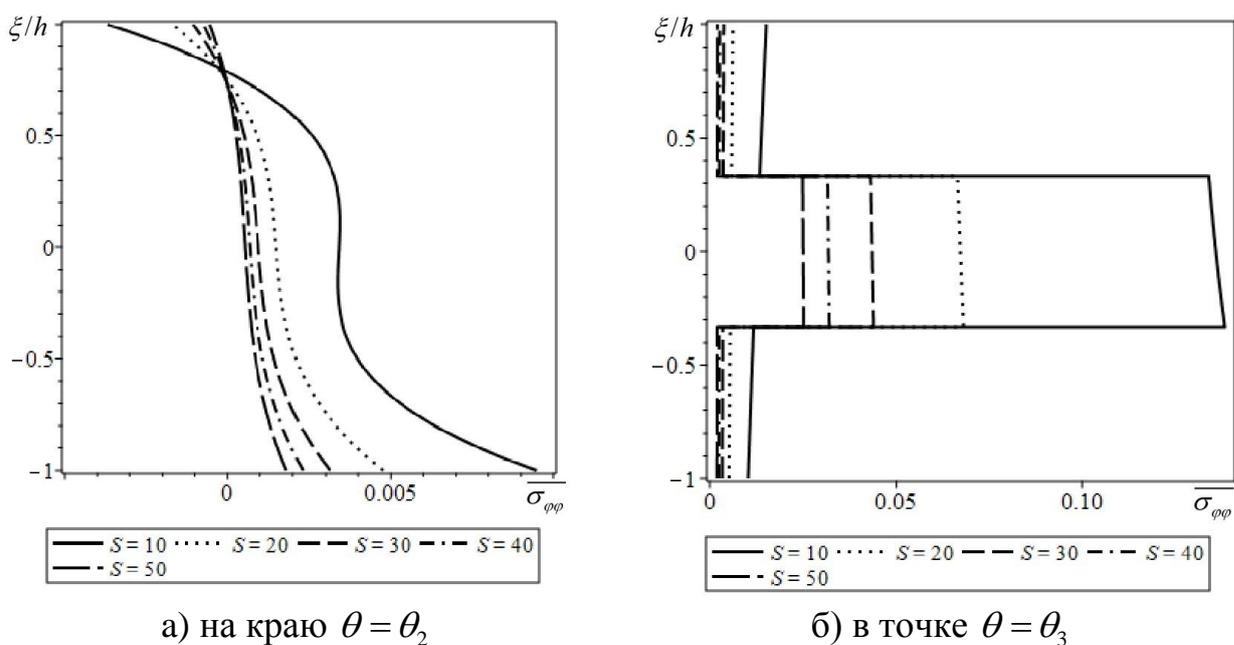


Рис. 3. Изменение $\overline{\sigma_{\varphi\varphi}}$ по толщине

- Поперечные нормальные и касательные напряжения принимаются существенное значение на краях оболочек.

Выводы

На основании полученных результатов можно установить следующее:

- Построена математическая модель уточненной теории определения НДС сферических оболочек из слоистых композиционных материалов. Основные уравнения получены с помощью вариационного принципа Лагранжа и представления перемещений полиномами по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории. Сформулированная краевая задача решается последовательным применением методов конечных разностей и матричной прогонки.

- Численные результаты расчета безразмерного прогиба оболочек под действием симметричной и асимметричной нагрузок, практически совпадают с опубликованными результатами исследователей, использующих другие методы, что подтверждает достоверность предлагаемой уточненной теории.

- Исследуется влияние толщины на напряжения оболочки. Дается непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки, это очень важно для композитных материалов. Установлено, что в краевой зоне многослойных оболочек возникают значительные по величине поперечные нормальные и касательные напряжения, для определения которых рекомендуются использовать предлагаемую уточненную теорию.

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиационных специальностей вузов. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
3. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 515 - 522.
4. Firsanov V.V. The Basic Stress - Strain State of a Circular Plate of Variable Thickness Based on a Nonclassical Theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2019, vol. 48, no. 1, pp. 54 - 60. DOI: [10.3103/S1052618819010072](https://doi.org/10.3103/S1052618819010072)
5. Фирсанов В.В. Напряженное состояние «пограничный слой» - краевое кручение цилиндрической оболочки // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 6. С. 144 – 153.
6. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластики методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 4. С. 668 - 686.
7. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 4. С. 593 - 608.

8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотические решения связанных динамических задач термоупругости для тонких тел из анизотропных, в плане неоднородных материалов // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. №. 5. С. 858 - 871.
9. Chih-Ping Wu, Jyh-Yeuan Lo. Three-dimensional elasticity solutions of laminated annular spherical shells // Journal of Engineering Mechanics, 2000, vol. 126 (8), pp. 882 - 885. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2000\)126:8\(882\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:8(882))
10. Chih-Ping Wu, Yi-Hwa Tsai. Asymptotic DQ solutions of functionally graded annular spherical shells // European Journal of Mechanics, A/Solids, 2004, vol. 23(2), pp. 283 - 299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2003.11.002>
11. Akhmedova N.K., Sofiyev A.H. Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres // Thin-Walled Structures, 2019, vol. 139, pp. 232 - 241. DOI: [10.1016/j.tws.2019.03.022](https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.03.022)
12. Reissner E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates // ASME Journal of Applied Mechanics, 1945, vol. 12, pp. 68 – 77.
13. Alwar R.S., Narasimhan M.C. Application of Chebyshev polynomials to the analysis of laminated axisymmetric spherical shells // Computers and Structures, 1990, vol. 15 (3), pp. 215 - 237.
14. Alwar, R.S., Narasimhan M.C. Analysis of laminated orthotropic spherical shells subjected to asymmetric loads // Computers and Structures, 1991, vol. 41 (4), pp. 611 - 620.

15. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis, (2nd ed.), New York, CRC Press, 2004, 831 p.
16. Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates // Composites Part B: Engineering, 2012, vol. 43 (3), pp. 1489 - 1499. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017>
17. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static and free vibration analysis of laminated composite and sandwich spherical shells using a generalized higher-order shell theory // Computers and Structures, 2019, vol. 219, pp. 129 - 146.
18. Васильев В.В., Лурье С.А. О теории тонких пластин // Известия АН. Механика твердого тела. 1992. № 3. С. 26 - 47.
19. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Известия АН. Механика твердого тела. 1990. № 6. С. 139 - 146.
20. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2015, vol. 6 (2), pp. 135 – 166. DOI: [10.1615/CompMechComputApplIntJ.v6.i2.40](https://doi.org/10.1615/CompMechComputApplIntJ.v6.i2.40)
21. Doan T.N., Van Thom D., Thanh N.T., Van Chuong P., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory // Composite Structures, 2020, vol. 232, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111526>

22. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53459>
23. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55762>
24. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
25. Иванов Д.А. Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105643>

Strain-stress state analysis of multilayer composite spherical shells based on the refined theory

Firsanov Val.V.^{1*}, Pham V.T.^{1}, Tran N.D.²**

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University),*

MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia

²*Le Quy Don Technical University, 236, Hoang Quoc Viet, Hanoi, Vietnam*

**e-mail: k906@mai.ru*

***e-mail: pvthien88@gmail.com*

Abstract

Nowadays, due to such advantages as high strength and low density, multilayer composite shells are widely used in various fields of mechanical engineering, including aerospace engineering. Theoretical and experimental studies have shown that when determining the stress condition of plates and shells, especially in the areas of joints (flanged, welded), local and rapidly changing load, as well as those made of non-homogeneous materials, the classical theory is not in line with the practice.

For multilayer composite shells, reliable determination of normal and shear stresses corresponding to lateral deformations represents an urgent issue. This article presents an option of the refined theory of the strain-stress state calculation of spherical shells made of layered composite materials. When creating mathematical model of the shell, the three-dimensional equations of linear elasticity are used. Components of the required displacements are being approximated by polynomials at a coordinate normal to the middle surface of the shell by the two degrees higher than the classical Kirchhoff–Love theory. A system of differential equations of equilibrium and corresponding

boundary conditions have been obtained using the Lagrange variation principle. The formulated boundary value problem is being solved by successive application of finite difference and matrix sweep methods. The calculations were performed using a computer program.

A multilayer composite shell, rigidly pinched at two edges was considered as calculation example. The numerical results of the calculation of dimensionless shells deflection under the action of symmetric and asymmetric loads are practically identical to the published results of researchers, employing the other methods, which confirms the validity of the proposed refined theory.

The thickness impact on the stress condition of the shell is being studied. The article presents the graphs of the continuous stress distribution over the thickness of the shell are presented, which is of great importance for the composite materials. It has been established that lateral, normal and tangential stresses of significant value occurred in the edge zone of the multilayer shells. The authors recommend employing the proposed refined theory for their determining.

Keywords: spherical shell, layered composite material, variant of the refined theory, Lagrange variation principle, finite difference method, matrix sweep method, shell deflection, lateral normal stresses.

References

1. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. *Plastinki i obolochki* (Plates and Shells), Moscow, Nauka, 1966, 636 p.
2. Obraztsov I.F., Bulychev L.A., Vasil'ev V.V. et al. *Stroitel'naya mekhanika letatel'nykh apparatov: uchebnik dlya aviatsionnykh spetsial'nostei vuzov* (Structural mechanics of flying vehicles. Test book for aviation branch of study), Moscow, Mashinostroenie, 1986, 536 p.
3. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory, *Journal of machinery, manufacture and reliability*, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 515 - 522.
4. Firsanov V.V. The Basic Stress - Strain State of a Circular Plate of Variable Thickness Based on a Nonclassical Theory, *Journal of machinery, manufacture and reliability*, 2019, vol. 48, no. 1, pp. 54 - 60. DOI: [10.3103/S1052618819010072](https://doi.org/10.3103/S1052618819010072)
5. Firsanov V.V. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2017, no. 6, pp. 144 – 153.
6. Gol'denveizer A.L. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1962, vol. 26, no. 4, pp. 668 - 686.
7. Gol'denveizer A.L. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1963, vol. 27, no. 4, pp. 593 - 608.
8. Agalovyan L.A., Gevorkyan R.S. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 858 - 871.

9. Chih-Ping Wu, Jyh-Yeuan Lo. Three-dimensional elasticity solutions of laminated annular spherical shells, *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, vol. 126 (8), pp. 882-885. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2000\)126:8\(882\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:8(882))
10. Chih-Ping Wu, Yi-Hwa Tsai. Asymptotic DQ solutions of functionally graded annular spherical shells, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2004, vol. 23 (2), pp. 283 - 299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2003.11.002>
11. Akhmedova N.K., Sofiyev A.H. Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres, *Thin-Walled Structures*, 2019, vol. 139, pp. 232 - 241. DOI: 10.1016/j.tws.2019.03.022
12. Reissner E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1945, vol. 12, pp. 68 – 77.
13. Alwar R.S., Narasimhan M.C. Application of Chebyshev polynomials to the analysis of laminated axisymmetric spherical shells, *Computers and Structures*, 1990, vol. 15 (3), pp. 215 - 237.
14. Alwar, R.S., Narasimhan M.C. Analysis of laminated orthotropic spherical shells subjected to asymmetric loads, *Computers and Structures*, 1991, vol. 41 (4), pp. 611 - 620.
15. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*, (2nd ed.), New York, CRC Press, 2004, 831 p.
16. Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates, *Composites Part B: Engineering*, 2012, vol. 43 (3), pp. 1489 - 1499. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017>

17. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static and free vibration analysis of laminated composite and sandwich spherical shells using a generalized higher-order shell theory, *Computers and Structures*, 2019, vol. 219, pp. 129 - 146.
18. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. *Izvestiya AN. Mekhanika tverdogo tela*, 1992, no. 3, pp. 26 - 47.
19. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. *Izvestiya AN. Mekhanika tverdogo tela*, 1990, no. 6, pp. 139 - 146.
20. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory, *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 2015, vol. 6(2), pp. 135 – 166. DOI: [10.1615/CompMechComputApplIntJ.v6 i2.40](https://doi.org/10.1615/CompMechComputApplIntJ.v6 i2.40)
21. Doan T.N., Van Thom D., Thanh N.T., Van Chuong P., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory, *Composite Structures*, 2020, vol. 232, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111526>
22. Zveryaev E.M. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53459>
23. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55762>
24. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)