

УДК 532.533.2

Влияние параметра автомодельности на критические характеристики сжимаемого течения типа Гамеля

Брутян М.А.*, Ибрагимов У.Г.**

Московский физико-технический институт,

Институтский переулок, 9, Долгопрудный, Московская область,

141701, Россия

**e-mail: m_brut@mail.ru*

***e-mail: umar.ibragimov333@yandex.ru*

Аннотация

Рассматривается осесимметричное течение вязкого сжимаемого газа от источника, расположенного в вершине конуса. Проведен анализ определяющей системы нелинейной обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые описывают автомодельные решения. Для разных значений параметра автомодельности, соответствующих различным моделям взаимодействия молекул газа, определены области существования решения и установлен характер зависимости критических характеристик течения от параметра автомодельности.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, точные решения, осесимметричное течение вязкого газа.

Введение

Известно, что течение Гамеля в клине (стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклоненными под углом друг к другу) является автомодельным и представляет собой один из немногих классических случаев, в котором удается построить точное решение уравнений Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [1, 2]. Что же касается аналогичного осесимметричного течения в конусе, то оно оказывается неавтомодельным [3].

Течение типа Гамеля для случая вязкого сжимаемого газа представляет собой редкий случай, в котором удастся получить точные решения уравнений Навье – Стокса. Такого рода решения изучались ранее в работах [4 – 10]. Наиболее близкими к теме настоящего исследования являются работы [5 – 7]. В [5] дано численное решение задачи об истечении газа от осесимметричного источника в канале с отводом/притоком массы и заданной температурой стенок. В работе [6] рассмотрена аналогичная задача для течения газа с граничным условием проскальзывания [11, 12] и температурного скачка на поверхности конуса. В недавно опубликованной работе авторов [7] рассмотрено автомодельное течение газа твердых сфер в конусе с непроницаемой границей от источника с заданным расходом.

Другими редкими случаями точных решения уравнений Навье – Стокса являются работы [13 – 16]. Примерами моделирования осесимметричных струйных течений являются работа [17].

Целью настоящей работы является исследование задачи об истечении газа из источника, расположенного в вершине конуса для различных моделей взаимодействия молекул газа. Полученные точные автомодельные решения могут

быть использованы для верификации численных схем, применяемых при расчете элементов летательных аппаратов, а также при проектировании диффузоров аэродинамических труб.

Постановка задачи

Следуя работе [7], рассмотрим радиальное течение вязкого сжимаемого совершенного газа в конусе с углом полураствора α . На рис. 1 изображена схема течения (истечение газа с расходом Q происходит из вершины конуса).

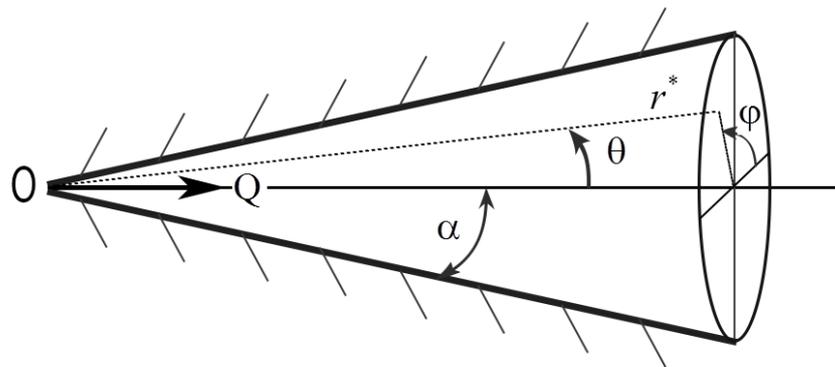


Рис. 1 Схема течения Гамеля в конусе

В сферических координатах (r^*, θ, φ) уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r^*}(r^{*2} \rho^* u^*) = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*}(r^{*2} \sigma_{rr}) + \frac{1}{r^*} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{r\theta} \sin \theta) - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} \right] = \rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \frac{1}{r^{*3}} \frac{\partial}{\partial r^*}(r^{*3} \sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r^*} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta \right] = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho^* T^* u^* \frac{\partial S^*}{\partial r^*} = \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa^* r^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\kappa^* \sin \theta \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{2\eta^*} \left[(\sigma_{rr})^2 + (\sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi})^2 + 2(\sigma_{r\theta})^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для термодинамических переменных (ρ^*, T^*, p^*, S^* – плотность, температура, давление и энтропия единицы массы) и коэффициентов переноса (η^* – коэффициент сдвиговой вязкости, κ^* – коэффициент теплопроводности). Течение в конусе предполагается радиальным, так что вектор скорости $\mathbf{V}^* = (u^*, 0, 0)$. Компоненты тензора напряжений σ определяются следующими соотношениями:

$$\sigma_{rr} = \frac{4\eta^*}{3} r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{u^*}{r^*} \right); \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{2\eta^*}{3} r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{u^*}{r^*} \right); \quad \sigma_{r\theta} = \frac{\eta^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta}. \quad (5)$$

Перейдем к безразмерным переменным $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{T}, \bar{P}, \bar{r}$. В качестве масштабов выберем значения ρ_0^*, u_0^*, T_0^* в некоторой произвольной точке $r^* = r_0^*$ на оси конуса $\theta = 0$, к примеру $\bar{u} = u^* / u_0^*$. Величину r_0^* можно условно назвать «радиусом источника». В задаче встречаются безразмерные параметры подобия: число Прандтля, отношение теплоемкостей $\gamma = c_p / c_v$, число Рейнольдса $Re_0 = \rho_0^* u_0^* r_0^* / \eta_0^*$, число Маха $M_0 = u_0^* / \sqrt{\gamma R T_0^*}$, а также дополнительный геометрический параметр подобия α . Здесь R – универсальная газовая постоянная, а через η_0^* обозначено значение вязкости при $T^* = T_0^*$.

Коэффициент объемной вязкости ζ будем считать равным нулю. Исследование общего случая $\zeta \neq 0$ не вносит ничего принципиально нового и оказывается просто

более громоздким. Заметим также, что в тех случаях, когда изучается одноатомный газ, необходимость в предшествующем предположении отпадает, поскольку равенство $\zeta=0$ является известным следствием кинетической теории [18]. Кроме того, число Прандтля $Pr = c_p \eta^* / \kappa^*$ в одноатомном газе близко, а для максвелловских молекул в точности равно $2/3$ [18]. Поэтому далее газ будем предполагать одноатомным, подчиняющимся уравнению состояния $p^* = \rho^* RT^*$, тогда $\eta^* / \kappa^* = 4/15R$.

Коэффициенты переноса предполагаем зависящими от температуры по степенному закону Фроста $\eta^*, \kappa^* \sim T^{*k}$. В случае более сложной зависимости коэффициентов переноса от температуры, например, при выполнении закона Сазерленда, точного решения отыскать не удастся. Таким образом, автомодельное решение ищем в виде:

$$\bar{u} = \frac{u(\theta)}{\bar{r}^m}; \bar{p} = \frac{p(\theta)}{\bar{r}^{m+2}}; \bar{p} = \bar{r}^{m-2} p(\theta); \bar{T} = \frac{T(\theta)}{\bar{r}^{2m}}; \bar{\eta} = \left(\frac{T(\theta)}{\bar{r}^{2m}} \right)^k; \bar{\kappa} = \frac{\gamma}{Pr(\gamma-1)} \bar{\eta} \quad (6)$$

При подстановке соотношений (6) в уравнения (1) – (5) приходим к необходимому условию согласования:

$$2mk = 1.$$

Как показано в [7], исходные уравнения при этом редуцируются к системе ОДУ:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(T^k \frac{du}{d\theta} \sin \theta \right) + \frac{4}{3} (m^2 - 1) u T^k + \frac{Re_0}{(\gamma M_0^2)^k} [(m+2)p + m \rho u^2] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{Re_0}{(\gamma M_0^2)^k} \frac{dp}{d\theta} = (1-m) T^k \frac{du}{d\theta} + \frac{2}{3} (1+m) \frac{d}{d\theta} (u T^k) \quad (8)$$

$$\frac{\text{Re}_0}{(\gamma M_0^2)^k} pu \left(2 - m \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) = \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} \left[4m^2 T^{1+k} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(T^k \frac{dT}{d\theta} \sin \theta \right) \right] + \left[\frac{4}{3} (m + 1)^2 u^2 T^k + T^k \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (9)$$

с краевыми условиями на оси при $\theta = 0$

$$u = 1, \quad T = p = \frac{1}{\gamma M_0^2} \quad (10)$$

и на поверхности конуса при $\theta = \alpha$

$$u = 0, \quad T = T_w \quad (11)$$

Краевая задача (7)–(11) была исследована численно в работе [7] для случая течения газа твердых сфер, т.е. при $k=1/2$ (см., например, [18, 19]), что соответствует значению параметра автомодельности $m=1$. Там же было установлено, что для существования автомодельного решения достаточно задания любых двух их пяти определяющих параметров α , Re_0 , M_0 , T_w , Q . Кроме того обнаружено, что имеет место ограничение на величину угла полураствора конуса α и значение числа Маха M_0 . Установлено, что при угле $\alpha > \alpha_* \approx 0.9 (\approx 52 \text{ град})$ нарушается условие сплошности среды, а максимальное число Маха $M_0 \approx 2.2$ достигается на оси конуса при $\alpha \rightarrow 0$.

Численное исследование автомодельного течения типа Гамеля при различных значениях параметра m

Рассмотрим систему уравнений (7)–(11) при значении параметров автомодельности: $m=1/2$ ($k=1$) и $m \cong 0.66$ ($k=0.76$). Первая комбинация параметров соответствует модели взаимодействия максвелловских молекул, вторая

комбинация соответствует общеизвестной эмпирической модели Фроста, ($\eta \sim T^{0.76}$). Для решения нелинейной системы ОДУ (7)–(9) используется численный метод, предложенный в работе [20]. Как и в рассмотренном ранее в работе [7] случае газа твердых сфер ($m=1, k=1/2$), решение уравнений существует только при определенной комбинации определяющих параметров задачи ($\alpha, Re_0, M_0, T_w, Q$).

Для каждой заданной комбинации чисел Маха и угла полураствора конуса находим соответствующее число Рейнольдса и безразмерную температуру на стенке. Как и в случае газа твердых сфер, при увеличении угла полураствора α до значения α_* , число Кнудсена $Kn = M_0 / Re_0$ стремится к единице, что нарушает предположение сплошности среды ($Kn \sim 1$). При дальнейшем увеличении α до значения α^* температура на стенке уменьшается до нуля и решение системы определяющих уравнений перестает существовать. Решение имеющее физический смысл существует при углах $\alpha < \alpha_*$.

При увеличении числа Маха M_0 вплоть до некоторого значения M_0^* температура на стенке, как и в случае увеличения угла α , стремится к нулю. Это обстоятельство приводит к ограничению на диапазон допустимых чисел M_0 . Полученные приближенные значения M_0^* для различных углов полураствора при $m=0.5$, $m \cong 0.66$ и $m=1$ представлены на рис. 2. Откуда видно, что M_0^* стремится к некоторому максимальному значению $M_{0\max}^*$, которое достигается при $\alpha \rightarrow 0$.

На рис. 3, 4 представлены зависимости критических параметров: $M_{0\max}^*$ – максимально возможное число Маха, α_* – угол, при котором $Kn \rightarrow 1$ и α_* – угол, при котором решение системы (7) – (11) перестает существовать.

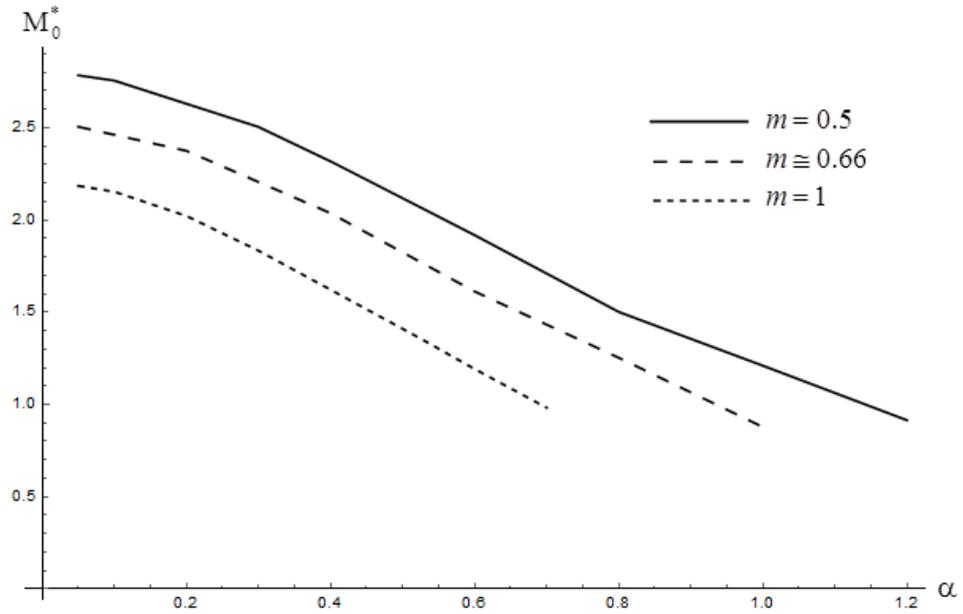


Рис. 2 Зависимость M_0^* от угла α при различных значениях параметра автотельности

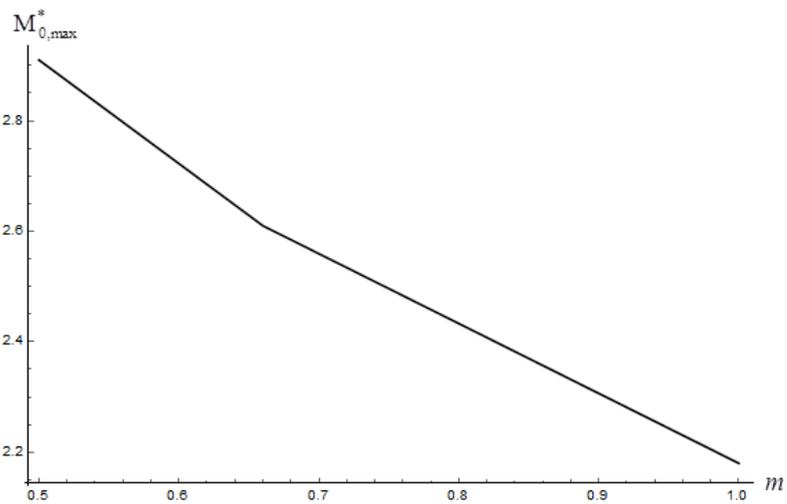


Рис. 3 Максимально возможное число Маха $M_{0\max}^*$ в зависимости от m

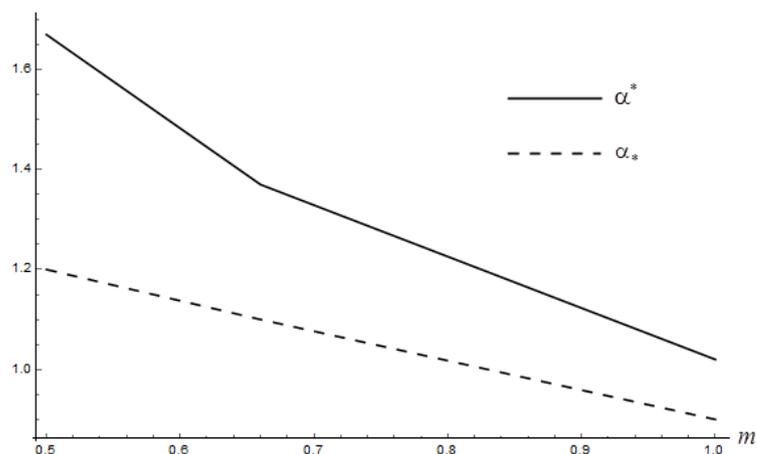


Рис. 4 Максимально возможные углы α^* и α_* в зависимости от m

Как видно из данных графиков, значения критических параметров в рассматриваемом диапазоне $0.5 < m < 1$ уменьшаются с ростом m , т.е. при уменьшении параметра m (или увеличении k) автомодельное решение существует в более широком диапазоне значений угла полураствора α и числа Маха M_0 .

Решения, соответствующие значениям параметра автомодельности $m < 0.5$ или $m > 1$ не представляют физического интереса. Тем не менее, несложно проанализировать вид уравнений (7) – (9) при $m \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow 0$) или $m \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Оказывается, что в обоих случаях решение краевой задачи (7) – (11) не существует, поскольку уравнения вырождаются – имеют тривиальное решение: $u, T, p = \text{const}$, которое не удовлетворяет граничным условиям.

Заключение

Рассмотрено осесимметричное автомодельное стационарное течение вязкого теплопроводного газа в конусе при различных значениях параметра автомодельности m . Как и в случае течения газа твердых сфер $m = 1$, установлено,

что решение соответствующей краевой задачи существует при задании любых двух из пяти $(\alpha, Re_0, M_0, T_w, Q)$ определяющих параметров. Найдены критические значения числа Маха M_0 на оси конуса и угла полураствора конуса α . Построены диаграммы зависимости критических характеристик $M_{0max}^* = M_{0max}^*(m)$, $\alpha_* = \alpha_*(m)$ и $\alpha^* = \alpha^*(m)$.

Библиографический список

1. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Handbuch der Physik. Band 8/2. Berlin: Springer, 1963, pp. 1 - 384.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986. - 735 с.
3. Ackerberg R.C. The viscous incompressible flow inside a cone // Journal Fluid Mechanics, 1965, vol. 21, pp. 47 – 81.
4. Брутян М.А. Автомодельные решения типа Джеффери–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Ученые Записки ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII. № 6. С. 13 – 22.
5. Быркин А.П. О точных решениях уравнений Навье–Стокса для течения сжимаемого газа в каналах // Ученые Записки ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 6. С. 15 – 21.
6. Williams J.C. Conical nozzle flow velocity slip and temperature jump // AIAA Journal, 1967, vol. 5, no. 12, pp. 2128 – 2134.
7. Брутян М.А., Ибрагимов У.Г. Автомодельные течения вязкого газа, истекающего из вершины конуса // Ученые Записки ЦАГИ. 2018. Т. XLIX. № 3. С. 26 – 35.

8. Быркин А.П. Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 1. С. 152 – 157.
9. Быркин А.П., Межиров И.О. О некоторых автомодельных течениях вязкого газа в канале // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 1. С. 100 – 105.
10. Щенников В.В. Об одном классе точных решений уравнений Навье–Стокса для случая сжимаемого теплопроводного газа // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 3. С. 582 – 584.
11. Street R.E. A study of boundary conditions in slip flow aerodynamics // Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of the First International Symposium on Rarefied Gas Dynamics at Nice. Pergamon Press. New York, 1960, pp. 276 - 292.
12. Mirels H. Estimate of slip effect on compressible laminar-boundary-layer skin friction. NASA TN 2609, 1952, pp.1 - 21.
13. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О сжимаемом течении Куэтта // Ученые Записки ЦАГИ. 2018. Т. XLIX. № 1. С. 27 - 38.
14. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Точное решение уравнений Навье – Стокса, описывающее эволюцию вихревой структуры в обобщенном сдвиговом течении // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. Т. 31. № 2. С. 326 - 329.
15. Wang C.Y. Exact solution of unsteady Navier–Stokes equation // ASME Applied Mechanics Reviews, 1989, vol. 58, pp. 269 – 282.

16. Wang C.Y., Exact solution of the steady-state Navier–Stokes equation // Annual Review of Fluid Mechanics, 1991, no. 23, pp. 159 – 177.
17. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75565>
18. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Т.10. - 528 с.
19. Чепмен С., Коулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. - 510 с.
20. Себиси Т., Бредшоу П. Конвективный теплообмен. - М.: Мир, 1987. - 592 с.