Труды МАИ. 2023. № 129
Trudy MAI, 2023, no. 129

Научная статья
УДК 539.3;517.9
DOI: 10.34759/trd-2023-129-05

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В СТЕНКАХ СООСНЫХ КОЛЬЦЕВОГО И КРУГОВОГО КАНАЛОВ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ НЕСЖИМАЕМ И ИМЕЕТ ДРОБНУЮ ФИЗИЧЕСКУЮ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

Татьяна Викторовна Быкова[1], Лев Ильич Могилевич[2]✉,
Екатерина Владимировна Евдокимова[3], Елизавета Викторовна Попова[4],
Мария Викторовна Попова[5]

[1,2,3,4,5]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., СГТУ, Саратов, Россия

[5]Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

[1]tbykova69@mail.ru

[2]mogilevichli@gmail.com✉

[3]eev2106@mail.ru

[4]elizaveta.popova.97@bk.ru

[5]mari.popova.2004@internet.ru

Аннотация. В работе развиваются подходы к математическому моделированию распространения нелинейных волн деформации в сплошных разнородных средах. Данные модели актуальны и научно значимы для перспективной авиакосмической техники в связи с все более широким применением современных композитных

материалов, обладающих существенно нелинейными физико-механическими свойствами. Предложена математическая модель применительно к каналам кольцевого и круглого сечений, полностью заполненным вязкими жидкостями, и образованными двумя соосными цилиндрическими оболочками. Материал оболочек считается несжимаемым и обладает физическим законом с дробной степенной нелинейностью, связывающим напряжения, деформации и интенсивность деформаций. Для разработки модели осуществлен вывод уравнений динамики цилиндрической оболочки с дробной нелинейностью (нелинейность Шамеля). Сформулирована связанная задача гидроупругости двух коаксиальных цилиндрических оболочек, заполненных вязкими жидкостями. Динамика жидкости рассмотрена в рамках модели нюьтоновской несжимаемой жидкости. Движение жидкости в кольцевом и круговом каналах изучается как ползущее. Проведен асимптотический анализ задачи гидроупругости и получена система двух нелинейных эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля. Теоретически показано, что в рассматриваемой постановке наличие вязкой жидкости в круговом канале не оказывает влияние на нелинейный волновой процесс в оболочках-стенках канала. Предложена новая разностная схема для решения полученной системы двух нелинейных уравнений, на основе применения техники базисов Гребнера. Проведена серия вычислительных экспериментов, которые показали, что уединенные нелинейные волны деформации в стенках рассматриваемых каналов являются солитонами.

***Ключевые слова*:** математическое моделирование, нелинейные волны деформации, соосные оболочки, вязкая жидкость, дробная нелинейность, несжимаемый материал

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РНФ проект № 23-29-00140

Для цитирования: Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Евдокимова Е.В., Попова Е.В., Попова М.В. Моделирование волн деформации в стенках соосных кольцевого и кругового каналов с вязкой жидкостью, материал которых несжимаем и имеет дробную физическую нелинейность // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: 10.34759/trd-2023-129-05

Original article

SIMULATION OF STRAIN WAVES EVOLUTION IN THE WALLS OF COAXIAL ANNULAR AND CIRCULAR CHANNELS FILLED WITH VISCOUS FLUID AND MADE FROM INCOMPRESSIBLE MATERIAL WITH FRACTIONAL PHYSICAL NONLINEARITY

Tatiana V. Bykova[1], Lev I. Mogilevich[2]✉, Ekaterina V. Evdokimova[3], Elizaveta V. Popova[4], Maria V. Popova[5]

[1,2,3,4,5]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Saratov, Russia

[5]Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky,
Saratov, Russia

[1]tbykova69@mail.ru

[2]mogilevichli@gmail.com✉

[3]eev2106@mail.ru

[4]elizaveta.popova.97@bk.ru

[5]mari.popova.2004@internet.ru

Abstract. The article being presented develops approaches to mathematical modeling of nonlinear strain waves propagation in the continuous heterogeneous media. These models are up-to-date and scientifically significant for the prospective aerospace engineering due to the more-and-more increasing application of modern composite materials with significantly nonlinear physical and mechanical properties. The authors proposed a mathematical model for circular and annular channels completely filled with viscous fluids and formed by the two coaxial cylindrical shells. The shell material is considered incompressible and possessing the physical law with fractional degree nonlinearity, associating stresses, strains and strain intensity. Derivation of equations of the shell with fractional nonlinearity dynamics (Schamel nonlinearity) was performed to develop a model. The coupled hydroelasticity problem for the two coaxial cylindrical shells filled with viscous fluids was formulated. The fluid dynamics were considered within the framework of the Newtonian incompressible fluid model. Fluid motion in annular and circular channels is being studied as creeping one. The authors performed an asymptotic analysis of the hydroelasticity problem, and obtained a system of two nonlinear evolution equations generalizing the Schamel equation. It was demonstrated theoretically that in the considered statement, the presence of a viscous fluid in a circular channel has no effect on the nonlinear wave process in the shell-walls of the channel. The article proposes a new difference scheme for solving the obtained system of the two nonlinear equations based on application of the Grebner bases technique has been proposed. A series of computational experiments have been carried out, which revealed that the nonlinear strain waves in the walls of the considered channels are solitons.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear strain waves, coaxial shells, viscous fluid,

fractional nonlinearity, incompressible material

Funding: the study was funded by Russian Science Foundation (RSF) according to the project No. 23-29-00140

For citation: Bykova T.V., Mogilevich L.I., Evdokimova E.V., Popova E.V., Popova M.V. Simulation of strain waves evolution in the walls of coaxial annular and circular channels filled with viscous fluid and made from incompressible material with fractional physical nonlinearity. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. DOI: 10.34759/trd-2023-129-05

Введение

Неразрушающие технологии мониторинга состояния реальных конструкций и их элементов [1] имеют важное значения для контроля работоспособности и долговечности объектов современной авиакосмической техники. Особое место среди данных технологий занимают методы волновой диагностики, применяемые для упругих элементов конструкций, основанные на изучении характера распространения волн деформации в их материале [2]. Теоретической базой для данных методов является волновая динамика, линейные задачи которой достаточно хорошо изучены и составляют классический курс эволюции волн в сплошных средах [3]. С другой стороны, новые материалы, применяемые в авиакосмической промышленности для изготовления упругих элементов конструкций, часто работают за пределами линейной теории упругости. Поэтому особую значимость имеет развитие методов и подходов для исследования эволюции волн в рамках нелинейной волновой динамики, которая в настоящее время находится в процессе своего становления. Обзор современных теоретических и экспериментальных исследований по распространению нелинейных волн деформации в основных элементах расчетных

схем реальных конструкций, таких как нелинейно-упругие стержни, пластины и оболочки приведен в [4,5]. В [6] изучено влияние магнитного поля на волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде на базе исследования задачи магнитоупругости. Вывод эволюционного уравнения накопления повреждений с учетом геометрической и физической нелинейности материала, а также качественная оценка влияния поврежденности материала на скорость волны деформации выполнены в [7]. Исследование эволюции возмущения от поверхности шара, внутри которого находится псевдоупругая среда Коссера, с целью развития моделей поведения конструкций из композиционных материалов выполнено в [8]. Исследование эволюции волн деформации в цилиндрической оболочке с физической кубической нелинейностью и конструктивной анизотропией, окруженной нелинейно-упругой средой выполнено в [9]. В осесимметричной постановке получено новое эволюционное уравнение для упругих волн и найдены его точные частные решения в виде нелинейных уединенных волн деформации. Новые эволюционные уравнения волн деформации в ребристых цилиндрических оболочках, материал обшивки которых имеет дробную физическую нелинейность, получены и исследованы в [10, 11]. Особый интерес представляют динамические задачи с разнородными сплошными средами, так как такие случаи часто встречаются в объектах авиационной и ракетно-космической техники. Например, в [12] исследована эволюция упругих волн, вызванных поверхностным возмущением, в упруго-пористой среде, заполненной сжимаемой жидкостью. Моделирование распространения уединенных упругих волн в цилиндрической оболочке с геометрической нелинейностью, транспортирующей идеальную несжимаемую жидкость, проведено в [13] в рамках осесимметричной

задачи гидроупругости. Численно-аналитические исследования эволюции нелинейных вол деформации в цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость выполнены в работах [14-16]. А именно, в [14] рассмотрен волновой процесс в геометрически нелинейной вязкоупругой оболочке, окруженной упругой средой Винклера, а в [15] исследована эволюция волн деформации в оболочке с квадратичной нелинейностью и окруженной упругой средой с кубической нелинейностью в продольном направлении. В [16] проведено моделирование распространения уединенных продольных волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с кубической физической нелинейностью и конструкционным демпфированием, а также окруженной упругой средой Винклера. Кольцевой зазор между оболочками заполнен вязкой жидкостью постоянной плотности, а внутренняя оболочка «сухая». В предлагаемой работе изучается проблема разработки математической модели и проведения численного исследования эволюции уединенных гидроупругих волн в двух коаксиальных оболочках, выполненных из несжимаемого материала с дробной физической нелинейностью, в условиях, когда кольцевой и круговой канал, образованные данными оболочками, заполнены вязкими жидкостями.

Вывод уравнений динамики оболочки и постановка задачи гидроупругости

Будем исследовать каналы кольцевого и кругового сечений, образованные двумя коаксиальными цилиндрическими оболочками (см. рис.1). Полагаем, что внешняя оболочка имеет толщину $h_0^{(1)}$ и радиус срединной поверхности $R^{(1)}$, внутренняя оболочка – $h_0^{(2)}$ и $R^{(2)}$, а стенки каналов выполнены из одного и того же материала. Каналы полностью заполнены вязкой ньютоновской жидкостью,

плотность которой принимаем постоянной. Рассматриваем распространение упругих волн деформаций в стенках каналов, вызванных некоторым, заданным в начальный момент времени, возмущением без учета краевых эффектов, т.е. считаем оболочки бесконечно протяженными. Движение вязкой жидкости будем моделировать как ползущее. Декартову систему координат *xyz* связываем с осью симметрии каналов, так что ось *x* совпадает с осью симметрии, ось *z* направлена по нормали к срединной поверхности оболочек при отсутствии возмущений. Совместно с декартовой системой будем рассматривать соответствующую ей цилиндрическую систему координат $r\theta x$. Кольцевой канал характеризуется расстоянием $\delta = R_1 - R_2$ между внутренней поверхностью радиуса R_1 внешней оболочки и внешней поверхностью радиуса R_2 внутренней оболочки. Вследствие осевой симметрии рассматриваемых каналов будем изучать осесимметричную задачу. Далее, в целях сокращения выкладок, принимаем для параметров внешней оболочки обозначение с верхним индексом i = 1, а для параметров внутренней оболочки с i = 2.

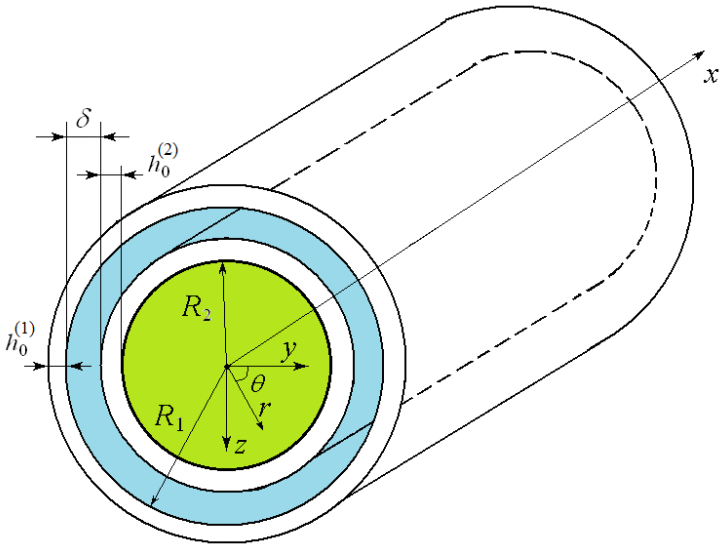

Рис.1. Кольцевой и круговой каналы, образованные цилиндрическими оболочками

Для получения уравнений динамики оболочек считаем, что для оболочек справедливы гипотезы Кирфгофа-Лява. В этом случае уравнения динамики элемента срединной поверхности i-ой оболочки для осесимметричного случая могут быть записаны в усилия и моментах путем применения принципа Даламбера и учета нормальных и касательных напряжений жидкостей в кольцевом и круговом каналах, спроецированных на срединную поверхность i-ой оболочки, в следующем виде [17]

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - (q_x^{(i)} + (i-1) q_x^c)\Big|_{R^{(i)}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)}\right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\theta^{(i)} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - ((-1)^{i-1} q_n + (i-1) q_n^c)\Big|_{R^{(i)}}, \text{ где } i = 1,2.$$

Здесь $W^{(i)}$ – прогиб i-ой оболочки, положительное направление которого принято к центру ее кривизны, $U^{(i)}$ – продольное упругое перемещение i-ой оболочки, $q_x^{(i)}$, q_n – касательное и нормальное напряжения жидкости в кольцевой щели, q_x^c, q_n^c – касательное и нормальное напряжения жидкости во внутренней оболочке, t – время, ρ_0 – плотность материала оболочки, $M_x^{(i)}$ – изгибающий момент, действующий на элемент срединной поверхности i-ой оболочки, $N_x^{(i)}$, $N_x^{(\theta)}$ – нормальные усилия, действующие на элемент срединной поверхности i-ой оболочки в направлении осей x и θ соответственно.

Выражения для $M_x^{(i)}$, $N_x^{(i)}$, $N_x^{(\theta)}$ имеют вид

$$M_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} z dz, \; N_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} dz, \; N_\theta^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_\theta^{(i)} dz, \tag{2}$$

где $\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_\theta^{(i)}$ – напряжения в материале элемента i-ой оболочки, z – локальная координата перпендикулярная срединной поверхности i-ой оболочки и изменяющаяся от $-h_0^{(i)}/2$ до $h_0^{(i)}/2$.

Для записи уравнений динамики оболочек (1) в перемещениях требуется знать связь напряжений и деформаций (физический закон) в элементе i-ой оболочки, а также связь деформаций с упругими перемещениями (геометрический закон) для элемента i-ой оболочки.

Задаваясь физическим законом примем во внимание, что многие современные материалы работают за пределами линейной теории упругости и требуют учета нелинейных эффектов в рамках нелинейной теории [18]. Например, ряд современных композитов имеют физический закон с дробной нелинейностью [19, 20]. Поэтому, считая материал оболочек несжимаемым (т.е. полагая коэффициент Пуассона материала i-ой оболочки μ_0 равным ½), представим связь напряжений σ_x, σ_θ с деформациями ε_x, ε_θ и интенсивностью деформаций ε_u в виде физического закона с дробным показателем степени у нелинейного члена. Тогда имеем следующие выражения [10, 21]

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{4E}{3}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_x^{(i)}\right)\left(1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2}\frac{m}{E}\right),\ \sigma_\theta^{(i)} = \frac{4E}{3}\left(\varepsilon_\theta^{(i)} + \frac{1}{2}\varepsilon_x^{(i)}\right)\left(1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2}\frac{m}{E}\right), \tag{3}$$

$$\varepsilon_u^{(i)} = 2((\varepsilon_\theta^{(i)})^2 + (\varepsilon_x^{(i)})^2 + \varepsilon_\theta^{(i)}\varepsilon_x^{(i)})^{1/2} \big/ \sqrt{3}\,.$$

Параметр m в (1) имеет размерность напряжения и представляет собой экспериментально определяемую константу материала из опытов на растяжение-сжатие [18], а также обозначено E - модуль Юнга материала, ρ_0 - его плотность.

Связь деформаций и упругих перемещений элемента i-ой оболочки представим в виде

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2},\ \varepsilon_\theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z\frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}}, \tag{4}$$

принимая во внимание, как отмечалось ранее, что в (4) $-h_0^{(i)}/2 \le z \le h_0^{(i)}/2$.

Осуществляя подстановку (3), (4) в (1), (4), с учетом того, что в [16] показано, что для рассматриваемой постановки интенсивность деформаций, можно исследовать на срединной поверхности, т.е. для $z = 0$, получим следующие уравнения оболочек в перемещениях

$$\frac{4Eh_0^{(i)}}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}\left\{\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right]\left[\left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \right.\right.\right. \tag{5}$$

$$\left.\left.\left. + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right)^2\right) - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right]^{1/4}\right\}\right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)}\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - (q_x^{(i)} + (i-1)q_x^c)\Big|_{R^{(i)}},$$

$$\frac{Eh_0^{(i)}}{12(3/4)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle -\frac{h_0^{(i)2}}{12}\left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_0\frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}}\right)\right\rangle + .$$

$$+\frac{4Eh_0}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}\left\{\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right]\left[\left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}\right)^2 + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right)^2\right) - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right]^{1/4}\right\}\right]\right\rangle + \frac{4Eh_0^{(i)}}{3}\frac{1}{R^{(i)}}\left\langle \frac{1}{2}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}\left\{\left[\frac{1}{2}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right]\left[\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{W}{R}\right)^2\right) - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right]^{1/4}\right\}\right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - ((-1)^{i-1}q_n + (i-1)q_n^c)\Big|_{R^{(i)}}.$$

Изучая движение жидкости в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке как осесимметричное и ползущее запишем уравнения динамики вязкой жидкости в виде [22]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2}\right),\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}V_r + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Здесь V_x, V_r – проекции скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат, p – давление в жидкости. Если рассматривается жидкость в кольцевом зазоре, то в (6) полагаем ее плотность ρ и ее кинематический коэффициент вязкости ν, а для жидкости во внутренней оболочке в (6) полагаем – ρ_c и ν_c соответственно.

Дополним (6) краевыми условиями прилипания жидкости к стенкам для кольцевого и кругового канала, которые имеют вид

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t},\ V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \text{ при } r = R_i - W^{(i)}, \tag{7}$$

и краевыми условия ограниченности параметров потока на оси симметрии для канала кругового сечения

$$r\frac{\partial V_x}{\partial r} = 0,\ r\frac{\partial V_r}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0. \tag{8}$$

Напряжения жидкости $q_x^{(i)}$, q_n и q_x^c, q_n^c в (5) запишем как [22]

$$q_n = -p + 2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r},\ q_x^{(i)} = -\rho\nu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x}\right) \text{ при } r=R^{(i)}, \tag{9}$$

$$q_n^c = -p + 2\rho_c\nu_c\frac{\partial V_r}{\partial r},\ q_x^c = -\rho_c\nu_c\left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x}\right) \text{ при } r=R^{(2)}.$$

Исследование задачи гидроупругости методом возмущений и вывод эволюционных уравнений

Для уравнений оболочек введем в рассмотрение следующие характерные малые параметры и безразмерные переменные

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon << 1,\ \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon^{1/2}),\ \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1),\ \frac{u_m}{l}\frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} = O(1),\ \frac{m}{E} = O(1), \tag{11}$$

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)},\ U^{(i)} = u_m u_1^{(i)},\ x^* = x/l,\ t^* = t\,c_0/l,\ r^* = r/R^{(i)},$$

где $c_0 = E/\sqrt{\rho 3/4}$ – скорость звука в материале оболочки, l – длина волны, ε – малый

параметр задачи.

Проведем анализ уравнений методом возмущений [23] рассматривая разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{11}^{(i)} + \ldots,\ u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{31}^{(i)} + \ldots, \tag{12}$$

и вводя новые переменные $\xi = x^* - \sqrt{3/4}t^*$, $\tau = \varepsilon^{1/2} t^*$.

Учитывая в (5) новые переменные и (11), (12) ограничиваясь первыми двумя членами разложений (12) из (5) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}u_{31}^{(i)}\right) + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi} - \mu_0 u_{30}^{(i)}\right)\left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial x^*}\right)^2 + u_{30}^{(i)2} - \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi}u_{30}^{(i)}\right]^{\frac{1}{4}}\right\rangle =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u_{11}^{(i)}}{\partial\xi^2} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi\partial\tau} - \frac{l}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \varepsilon}(q_x^{(i)} + (i-1)q_x^c)\Big|_{R^{(i)}}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi} - u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial\xi} - u_{31}^{(i)}\right) + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi} - u_{30}^{(i)}\right)\left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial x^*}\right)^2 + u_{30}^{(i)2} - \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi}u_{30}^{(i)}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{R^{(i)}}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 u_{30}^{(i)}}{\partial\xi^2} - \frac{R^{(i)}}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \varepsilon}((-1)^{i-1} q_n^{(i)} + (i-1)q_n^c)\Big|_{R^{(i)}}$$

Ограничиваясь первым членом в разложениях (12) из (13) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi} = u_{30}^{(i)},\ \frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}u_{30}\right\rangle = \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^2} \tag{14}$$

Исключая из (14) прогиб получаем тождество и делаем вывод, что продольное перемещение $u_{10}^{(i)}$ может быть произвольной функцией.

Учитывая (14) и рассматривая следующее приближение по ε получим

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial\xi} - u_{31}^{(i)}\right) + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}\frac{3}{4}\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi}\left[\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi}\right)^2\right]^{1/4}\right\rangle + \tag{15}$$

$$+\sqrt{3}\,\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi\partial\tau}=-\frac{l}{\varepsilon^{3/2}\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}\,(q_x^{(i)}+(i-1)q_x^c)\Big|_{R^{(i)}},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial\xi}-u_{31}^{(i)}-\frac{3}{8}\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\left(\frac{R^{(i)}}{l}\right)^2\frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^3}=-\frac{R^{(i)}}{\varepsilon^{3/2}\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}\,((-1)^{i-1}q_n^{(i)}+(i-1)q_n^c)\Big|_{R^{(i)}}.$$

Исключая из (15) u_{11}, u_{31} имеем

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{4}\right)^{5/4}\left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi}\right)^{1/2}\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^2}+\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^4}= \tag{16}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{l}{\varepsilon^{3/2}\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}\left[q_x^{(i)}+(i-1)q_n^c-\frac{1}{2}\varepsilon^{1/4}\frac{\partial((-1)^{i-1}q_x^{(i)}+(i-1)q_n^c)}{\partial\xi}\right]_{R^{(i)}}.$$

Систему (16) можно рассматривать как систему двух обобщенных уравнений Шамеля для продольной деформации. В частном случае, когда жидкость отсутствует правые части данных уравнений равны нулю мы имеем независимые уравнения Шамеля для каждой из оболочек.

Проведем решение уравнений динамики вязкой жидкости вводя следующие безразмерные переменные и параметры для кольцевого канала

$$V_r=h_0^{(i)}\frac{c_0}{l}v_r,\ V_x=h_0^{(i)}\frac{c_0}{\delta}v_x,\ r^*=\frac{r-R^{(2)}}{\delta},\ t^*=\frac{c_0}{l}t,\ x^*=\frac{x}{l},\ p=\frac{\rho\nu c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3}P_0, \tag{17}$$

$$\psi=\frac{\delta}{R^{(2)}}=\varepsilon^{1/2},\ \lambda=\frac{h_0^{(i)}}{\delta}=\varepsilon^{1/2},\ \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}}=\varepsilon,\ \frac{h_0^{(i)}}{l}=\varepsilon^{5/4},\ \frac{\delta}{l}=\varepsilon^{3/4},$$

а для кругового будем рассматривать

$$V_r=h_0^{(i)}\frac{c_0}{l}v_r,\ V_x=h_0^{(i)}\frac{c_0}{R^{(2)}}v_x,\ r^*=\frac{r}{R^{(2)}},\ t^*=\frac{c_0}{l}t,\ x^*=\frac{1}{l}x,\ p=\frac{\rho_c\nu_c c_0 l h_0^{(i)}}{R^{(2)3}}P, \tag{18}$$

$$\frac{R^{(2)}}{l}=\psi_c=O(\varepsilon^{1/4}),\ \lambda_c=h_0^{(i)}/R^{(2)}=\varepsilon.$$

В результате с учетом (17) для кольцевого канала получим с точностью до ψ, ε уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*}=0\,,\ \frac{\partial P^0}{\partial x^*}=\frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}\,,\ \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*}+\frac{\partial v_x^0}{\partial x^*}=0\,, \tag{19}$$

краевые условия для них

$$v_r^0=-\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}\,,\ v_x^0=0\ \text{при}\ r^*=1,\ \ v_r^0=-\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}\,,\ v_x^0=0\ \text{при}\ r^*=0\,, \tag{20}$$

а также напряжения на стенках кольцевого канала

$$q_x^{(i)}=-\rho\nu\frac{h_0^{(i)}c_0}{\delta^2}\frac{\partial v^0{}_x{}^*}{\partial r^*}\ \text{при}\ r^*=1\ \text{(i=1) или при}\ r^*=0\ \text{(i=2)},\ q_n=-\frac{\rho\nu c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3}P^0\,. \tag{21}$$

Решая задачу (19), (20) получаем

$$P^0=12\int\left[\int\left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}-\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}\right)dx^*\right]dx^*,\ \ \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*}=6\left(r^{*2}-r^*\right)\int\left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}}-\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}}\right)dx^*\,. \tag{22}$$

Принимая во внимание (12), новые переменные ξ, τ и запишем (22) с точностью до $\varepsilon^{1/2}$

$$P^0=6\sqrt{3}\int\left(u_{30}^{(1)}-u_{30}^{(2)}\right)d\xi\,,\ \frac{\partial P^0}{\partial\xi}=6\sqrt{3}\left(u_{30}^{(1)}-u_{30}^{(2)}\right),\ \ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}=3\sqrt{3}\left(2r^*-1\right)\left(u_{30}^{(1)}-u_{30}^{(2)}\right), \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}\right|_{r^*=1}=3\sqrt{3}\left(u_{30}^{(1)}-u_{30}^{(2)}\right),\ \left.\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}\right|_{r^*=0}=-\left.\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}\right|_{r^*=1}.$$

Учитывая (14), малость параметров ψ, λ и полагая $R^{(1)}=R^{(2)}\approx R$, $h_0^{(1)}=h_0^{(2)}\approx h_0$, для слагаемых $q_x^{(i)}$, q_n правой части (16) при i = 1, имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{l}{\varepsilon^{3/2}\rho_0 h_0^{(i)}c_0^2}\left[q_x^{(1)}-\frac{1}{2}\varepsilon^{1/4}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}\right]_{R^{(1)}}=-\frac{3}{2}\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon^{1/2}}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right]. \tag{24}$$

а для слагаемыми $q_x^{(i)}$, q_n правой части (16) при i = 2, получим

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{l}{\varepsilon^{3/2}\rho_0 h_0^{(i)}c_0^2}\left[q_x^{(2)}-\frac{1}{2}\varepsilon^{1/4}\frac{\partial(q_n)}{\partial\xi}\right]_{R^{(2)}}=-\frac{3}{2}\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon^{1/2}}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}\right]. \tag{25}$$

Для кругового канала с учетом (18) в (6), (8)-(10) и малости параметров ψ_c, λ_c получим упрощенные уравнения динамики вязкой жидкости

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*}=0,\ \frac{\partial P^0}{\partial x^*}=\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}\right),\ \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* v_r^0\right)+\frac{\partial v_x^0}{\partial x^*}=0, \tag{26}$$

соответствующие им граничные условия

$$r^*\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*}=r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}=0 \text{ при } r^*=0,\ v_r^0=-\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*},\ v_x^0=\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \text{ при } r^*=1, \tag{27}$$

и напряжения жидкости q_x^c, q_n^c с точностью до ψ, ε

$$q_x^c=-\lambda_c\frac{\nu_c}{R^{(2)}c_0}\rho_c c_0^2\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*},\ q_n^c=-\frac{\lambda_c}{\psi_c}\frac{\nu_c}{R^{(2)}c_0}\rho_c c_0^2 P^0 \text{ при } r^*=1. \tag{28}$$

Решая (26), (27) имеем

$$P^0=16\int\frac{\partial}{\partial t^*}\left[\frac{1}{2}u_1^{(2)}-\int u_3^{(2)}dx^*\right]dx^*,\ \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*}=4(r^{*2}-1)\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\left[\frac{1}{2}u_1^{(2)}-\int u_3^{(2)}dx^*\right]+\frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial t^{*2}}. \tag{29}$$

Принимая во внимание (12), новые переменные ξ, τ и запишем (29) с точностью до $\varepsilon^{1/2}$

$$\frac{\partial P^0}{\partial\xi}=4\sqrt{3}\left(2u_{30}^{(2)}-\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right),\ \left.\frac{\partial v_x}{\partial r^*}\right|_{r^*=1}=2\sqrt{3}\left(2u_{30}^{(2)}-\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right). \tag{30}$$

Учитывая (14), малость параметров ψ_c, λ_c и принимая во внимание (28), (30) для слагаемых q_x^c, q_n^c правой части (16) при i = 2 имеем

$$q_x^c-\frac{1}{2}\frac{R^{(2)}}{l}\frac{\partial q_n^c}{\partial\xi}=0. \tag{31}$$

Таким образом, согласно (31), в рассматриваемой постановке, вязкая жидкость в круговом канале не оказывает влияние на волновой процесс в оболочках.

Подставляя (24), (25) и (31) в систему (16) получаем

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{m}{E}\frac{3}{4}\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}\right)^{1/2}\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^2}+\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^4}=-\frac{3}{2}\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon^{1/2}}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right], \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{m}{E}\frac{3}{4}\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right)^{1/2}\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^2}+\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^4}=-\frac{3}{2}\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon^{1/2}}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}\right].$$

Численное моделирование эволюции волн деформации в оболочках

Вводя обозначения $\partial u_{10}^{(1)}/\partial\xi = c_3\phi^{(1)}$, $\partial u_{10}^{(2)}/\partial\xi = c_3\phi^{(2)}$, $\eta = c_1\xi$, $t = c_2\tau$, $c_1 = (c_2 16/\sqrt{3})^{1/3}$,

$c_2 = \frac{3}{2}\frac{\rho l}{\rho_0 h_0\varepsilon^{3/2}}\frac{\nu}{\delta c_0}$, $c_3 = 64\left(\frac{E}{m}\frac{c_2}{c_1}\right)^2$ представим систему уравнений (36) в следующем виде

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t}+6\phi^{(1)^{1/2}}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\phi^{(1)}}{\partial\eta^3}+\phi^{(1)}-\phi^{(2)}=0,\ \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial t}+6\phi^{(2)^{1/2}}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\phi^{(2)}}{\partial\eta^3}+\phi^{(2)}-\phi^{(1)}=0. \qquad (33)$$

При «сухом» кольцевом канале два последних слагаемых в каждом из уравнений (33) равны нулю, и мы получаем два несвязанных уравнения, для которых имеет место точное частное решение солитонного характера

$$\varphi^{(1)}=\varphi^{(2)}=\frac{25k^4/4}{(1+\mathrm{ch}k(\eta-4k^2t))^2}. \qquad (34)$$

При учете жидкости система (33) имеет то же частное решение (34), но для исследования эволюции волн требуется ее численное решение при начальных условиях $t = 0$ в виде (в каждой оболочке задана волна)

$$\varphi^{(1)}(0,\eta)=\varphi^{(2)}(0,\eta)=\frac{25k^4/4}{(1+\mathrm{ch}k\eta)^2}, \qquad (35)$$

или в виде (волна задана только во внутренней оболочке)

$$\varphi^{(1)}(0,\eta)=0,\ \varphi^{(2)}(0,\eta)=\frac{25k^4/4}{(1+\mathrm{ch}k\eta)^2}. \qquad (36)$$

Для численного решения системы (33) аналогично [15, 13] была сгенерирована новая разностная схема с помощью базисов Грёбнера [24], которая имеет вид

$$\frac{u^{(1)}{}_j^{n+1}-u^{(1)}{}_j^{n}}{\tau}+4\frac{(u^{(1)3/2}{}_{j+1}^{n+1}-u^{(1)3/2}{}_{j-1}^{n+1})+(u^{(1)3/2}{}_{j+1}^{n}-u^{(1)3/2}{}_{j-1}^{n})}{4h}+\frac{(u^{(1)}{}_{j+2}^{n+1}-2u^{(1)}{}_{j+1}^{n+1}+2u^{(1)}{}_{j-1}^{n+1}-u^{(1)}{}_{j-2}^{n+1})}{4h^3}+$$

$$+\frac{(u^{(1)}{}^{n}_{j+2}-2u^{(1)}{}^{n}_{j+1}+2u^{(1)}{}^{n}_{j-1}-u^{(1)}{}^{n}_{j-2})}{4h^3}+\frac{u^{(1)}{}^{n+1}_{j}+u^{(1)}{}^{n}_{j}}{2}-\frac{u^{(2)}{}^{n+1}_{j}+u^{(2)}{}^{n}_{j}}{2}=0 \qquad (37)$$

$$\frac{u^{(2)}{}^{n+1}_{j}-u^{(2)}{}^{n}_{j}}{\tau}+4\frac{(u^{(2)3/2}{}^{n+1}_{j+1}-u^{(2)3/2}{}^{n+1}_{j-1})+(u^{(2)3/2}{}^{n}_{j+1}-u^{(2)3/2}{}^{n}_{j-1})}{4h}+\frac{(u^{(2)}{}^{n+1}_{j+2}-2u^{(2)}{}^{n+1}_{j+1}+2u^{(2)}{}^{n+1}_{j-1}-u^{(2)}{}^{n+1}_{j-2})}{4h^3}+$$

$$+\frac{(u^{(2)}{}^{n}_{j+2}-2u^{(2)}{}^{n}_{j+1}+2u^{(2)}{}^{n}_{j-1}-u^{(2)}{}^{n}_{j-2})}{4h^3}+\frac{u^{(2)}{}^{n+1}_{j}+u^{(2)}{}^{n}_{j}}{2}-\frac{u^{(1)}{}^{n+1}_{j}+u^{(1)}{}^{n}_{j}}{2}=0\,.$$

В рамках данной схемы нелинейность 3/2 линеаризовалась как

$$v_{k+1}^{3/2}=v_{k+1}^{3/2}-v_k^{3/2}+v_k^{3/2}=(v_{k+1}^{1/2}-v_k^{1/2})(v_{k+1}+v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2}+v_k)+v_k^{3/2}= \qquad (38)$$

$$=(v_{k+1}^{1/2}-v_k^{1/2})\frac{v_{k+1}^{1/2}+v_k^{1/2}}{v_{k+1}^{1/2}+v_k^{1/2}}(v_{k+1}+v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2}+v_k)+v_k^{3/2}\approx(v_{k+1}-v_k)\frac{3}{2}v_k^{1/2}-2v_k^{3/2}=\frac{3}{2}v_k^{1/2}v_{k+1}-\frac{1}{2}v_k^{3/2}\,.$$

Численное решение системы (33) при задании начальных условий (35) с $k = 0{,}2$ представлены на рис. 2, а при начальных условиях (26) с $k = 0{,}2$ (при t=0 задана уединенная волна только во внутренней оболочке) приведены на рис. 3.

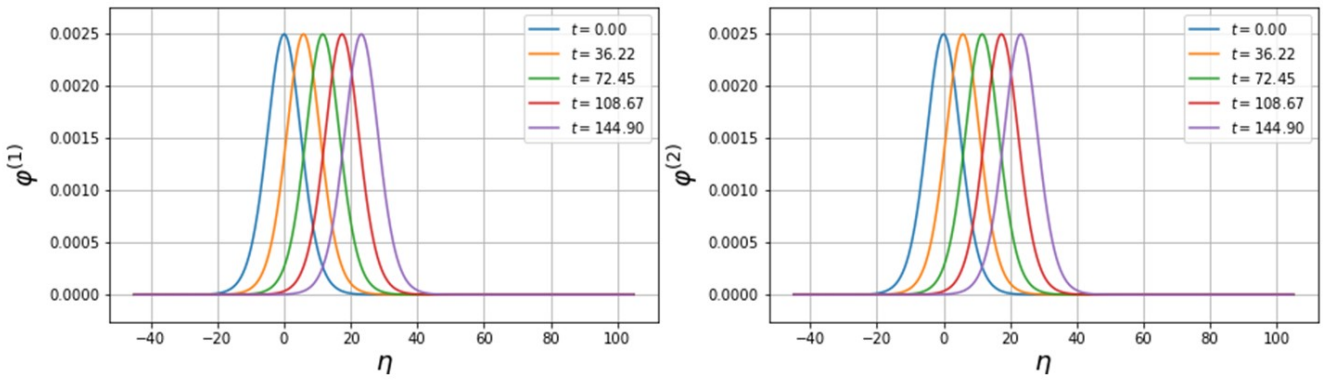

Рис. 2. Результаты численного решения системы (33) с начальными условиями (35)

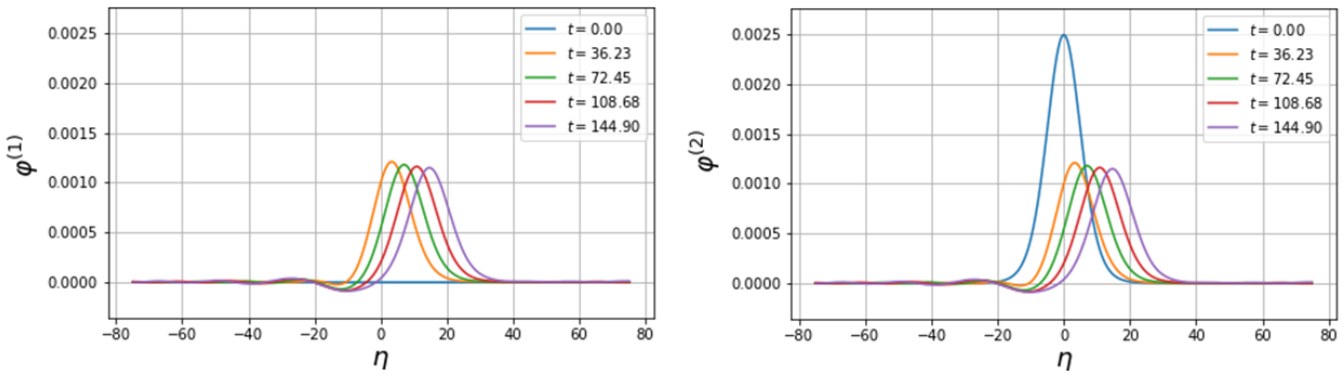

Рис. 3. Результаты численного решения системы (33) с начальными условиями (36)

Выводы и заключение

Представленные на рис.2-3 результаты решений системы обобщенных эволюционных уравнений Шамеля позволяют сделать следующие выводы. Согласно расчетам, нелинейные волны деформации в рассмотренных случая движутся в правую сторону, что указывает на то, что их скорость сверхзвуковая. Если в каждой из двух оболочек на начальный момент времени заданы по одной уединенной волне (см. рис.2), то с течением времени их эволюция происходит с сохранением скорости волн и их амплитуды, т.е. волны распространяются, сохраняя свою начальную форму. Если в начальный момент времени задана волна только в одной из оболочек, например, внутренней (см. рис. 3), то с течением времени во внешней оболочке генерируется волна деформации, амплитуда которой возрастает. Появление волны во внешней оболочке сопровождается падением амплитуды волны деформации, заданной в начальный момент времени, в противостоящей оболочке-стенки канала. Затем амплитуды и скорости уединенных волн деформации в каждой из оболочек выравниваются. Расчеты также показали, что аналогичная картина наблюдается если в начальный момент времени задана волна только во внешней оболочке. Таким

образом, проведенное численное моделирование указывает на перекачивание энергии между оболочками через слой вязкой жидкости, заполняющей кольцевой канал. Описанное поведение волн подтверждает, что в оболочках наблюдаются уединенные волны в виде солитонов, которые двигаются со сверхзвуковой скоростью.

В результате проведенного исследования в работе осуществлена постановка задачи гидроупругости кольцевого и кругового каналов, заполненных вязкими жидкостями, образованных двумя соосными оболочками, которые выполнены из несжимаемого материала с дробной физической нелинейностью. На базе асимптотического анализа данной задачи получена система нелинейных эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля, для изучения волнового процесса в оболочках-стенках рассматриваемых каналов. Показано, что при рассмотрении материала оболочек несжимаемым и движения жидкости в каналах ползущим наличие жидкости во внутренней оболочке (канал круглого сечения) не сказывается на характере распространения нелинейных уединенных волн в оболочках. Предложена новая разностная схема для решения системы двух нелинейных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что уединенные волны в рассматриваемых оболочках являются сверхзвуковыми солитонами.

Предложенная в работе математическая модель и результаты вычислительных экспериментов могут использоваться для совершенствования волновых неразрушающих методов диагностики состояния упругих конструкций из современных полимерных материалов, содержащих вязкие жидкости, и в частности, трубопроводов кольцевого и кругового сечений, образованных коаксиальными

оболочками.

Список источников

1. Клюев В.В., Соснин Ф.Р., Румянцев С.В. и др. Неразрушающий контроль. Россия. 1990-2000: справочник. – М.: Машиностроение, 2001. - 616 с.

2. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. – М.: Наука, 2009. - 280 с.

3. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. - 472 с.

4. Ерофеев В.И., Клюева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48. № 6. С. 725-740.

5. Ерофеев В.И., Кажаев В.В. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 127-136. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.11

6. Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Морозов А.Н. Локализация волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=22860

7. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Никитина Е.А. Учет влияния поврежденности материала на скорость распространения в нем упругой волны // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=22861

8. Лай Т.Т., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера //

Труды МАИ. 2012. № 52. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=29267

9. Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 2. С. 145-151. DOI: 10.7868/S0320791917020022

10. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 98 (1), pp. 185-194. DOI: 10.1007/s11071-019-05181-5

11. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration, 2021, vol. 491, pp. 115752. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115752

12. Тарлаковский Д.В., Данг К.З. Распространение осесимметричных поверхностных возмущений в упруго-пористом полупространстве // Труды МАИ. 2014. № 76. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=49960

13. Кореньков А.Н. Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6. № 1. С. 131-143.

14. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=53486

15. Быкова Т.В., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование продольных волн в оболочке с физически квадратичной нелинейностью, заполненной жидкостью и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2020. № 111. URL:

https://trudymai.ru/published.php?ID=115113. DOI: 10.34759/trd-2020-111-3

16. Mogilevich L., Ivanov S. Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them // Symmetry, 2020, vol. 12 (3), pp. 335. DOI: 10.3390/sym12030335

17. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М: Наука, 1972. - 432 с.

18. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik, Berlin, Springer, 1958, 684 p.

19. Singh V.K., Bansal G., Agarwal M., Negi P. Experimental determination of mechanical and physical properties of almond shell particles filled biocomposite in modified epoxy resin // Journal Material Sciences & Engineering, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 1000246. DOI: 10.4172/2169-0022.1000246

20. Tournat V., Zaitsev V., Gusev V., Nazarov V., Bequin P., Castagnede B. Probing weak forces in granular media through nonlinear dynamic dilatancy: clapping contacts and polarization anisotropy // Physical Review Letters, 2004, vol. 92, no. 8, pp. 085502. DOI: 10.1103/physrevlett.92.085502

21. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.

22. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.

23. Nayfeh A.H. Perturbation methods. New York, Wiley, 1973, 425 p.

24. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006, vol. 2, pp. 051. DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051

References

1. Klyuev V.V., Sosnin F.R., Rumyantsev S.V. et al. *Nerazrushayushchii kontrol'. Rossiya. 1990-2000*: spravochnik (Nondestructive testing. Russia. 1990-2000: handbook). Moscow, Mashinostroenie, 2001, 616 p.

2. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskii kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii* (Acoustic Control of Equipment during Manufacturing and Operation), Moscow, Nauka, 2009, 280 p.

3. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media), Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.

4. Erofeev V.I., Klyueva N.V. *Akusticheskii zhurnal*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 725-740.

5. Erofeev V.I., Kazhaev V.V. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 127-136. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.11

6. Erofeev V.I., Mal'khanov A.O., Morozov A.N. *Trudy MAI,* 2010, no. 40. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22860

7. Erofeev V.I., Morozov A.N., Nikitina E.A. *Trudy MAI*, 2010, no. 40. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22861

8. Lai T.T., Tarlakovskii D.V. *Trudy MAI*, 2012, no. 52. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29267

9. Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. *Akusticheskii zhurnal,* 2017, vol. 63, no. 2, pp. 145-151. DOI: 10.7868/S0320791917020022

10. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells, *Nonlinear Dynamics,* 2019, vol. 98 (1), pp. 185-194. DOI: 10.1007/s11071-019-05181-5

11. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration,* 2021, vol. 491, pp. 115752. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115752

12. Tarlakovskii D.V., Dang K.Z. *Trudy MAI*, 2014, no. 76. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49960

13. Koren'kov A.N. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 131-143.

14. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI,* 2014, no. 78, URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53486

15. Bykova T.V., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115113. DOI: 10.34759/trd-2020-111-3

16. Mogilevich L., Ivanov S. Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them, *Symmetry*, 2020, vol. 12 (3), pp. 335. DOI: 10.3390/sym12030335

17. Vol'mir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* (Nonlinear dynamics of plates and shells: studies. Manual for undergraduate and graduate), Moscow, Nauka, 1972, 432 p.

18. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*, Berlin, Springer, 1958, 684 p.

19. Singh V.K., Bansal G., Agarwal M., Negi P. Experimental determination of mechanical and physical properties of almond shell particles filled biocomposite in modified epoxy resin, *Journal Material Sciences & Engineering*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 1000246. DOI: 10.4172/2169-0022.1000246

20. Tournat V., Zaitsev V., Gusev V., Nazarov V., Bequin P., Castagnede B. *Physical Review Letters*, 2004, vol. 92, no. 8, pp. 085502. DOI: 10.1103/physrevlett.92.085502

21. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy* (Continuum mechanics), Moscow, Izd-vo MGU, 1990, 310 p.

22. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. (Mechanics of Liquids and Gases), Moscow, Drofa, 2003, 840 p.

23. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*, New York, Wiley, 1973, 425 p.

24. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2006, vol. 2, pp. 051. DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051

Статья поступила в редакцию 14.03.2023
Одобрена после рецензирования 15.03.2023
Принята к публикации 27.04.2023
The article was submitted on 14.03.2023; approved after reviewing on 15.03.2023; accepted for publication on 27.04.2023