Труды МАИ. 2023. № 128
Trudy MAI, 2023, no. 128

Научная статья
УДК 531.36; 531.384
DOI: 10.34759/trd-2023-128-02

О ПРИВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ К СИСТЕМАМ ЛИУВИЛЛЯ

Александр Сергеевич Кулешов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

kuleshov@mech.math.msu.su; Alexander.Kuleshov@math.msu.ru

Аннотация: В работе рассмотрены несколько известных систем классической механики (случай Эйлера – Пуансо задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой, задача Якоби о геодезических на эллипсоиде, задача о качении шара Чаплыгина), которые путем замены переменных принимают вид систем Лиувилля с двумя степенями свободы. В результате исследование динамики этих систем можно проводить с помощью методов теории топологического анализа с разделением переменных по Лиувиллю.

Ключевые слова: система Лиувилля, задача Эйлера – Пуансо, задача Якоби, шар Чаплыгина

Для цитирования: Кулешов А.С. О приведении некоторых систем классической механики к системам Лиувилля // Труды МАИ. 2023. №128. DOI: 10.34759/trd-2023-128-02

Original article

ON THE REDUCTION OF SOME SYSTEMS OF CLASSICAL MECHANICS TO THE LIOUVILLIAN FORM

Alexander S. Kuleshov

Lomonosov Moscow State University,

Moscow, Russia

kuleshov@mech.math.msu.su; Alexander.Kuleshov@math.msu.ru

Abstract: In 1846, J. Liouville indicated a class of holonomic mechanical systems for which the Hamilton – Jacobi equation can be integrated by the method of separation of variables. Mechanical systems belonging to this class are called Liouvillian systems. In the case of two degrees of freedom, it is known, that the Liouvillian system admits, in addition to the energy integral, another first integral, quadratic in generalized velocities. The presence of two first integrals for a holonomic mechanical system with two degrees of freedom allows us to assert that such a system is integrable. Moreover, it is possible to study the bifurcations of the joint levels of the first integrals. The corresponding method for Liouvillian systems with two degrees of freedom was developed by Ya. V. Tatarinov and V. M. Alekseev. To use this method, it is necessary to reduce the studied mechanical system to the Liouvillian form.

The paper considers several well-known systems of classical mechanics (the Euler – Poinsot case of the problem of the motion of a rigid body about a fixed point, the Jacobi problem of geodesics on an ellipsoid, the problem of motion of the Chaplygin sphere on the perfectly rough horizontal plane), which, by changing variables, take the form of

Liouvillian systems with two degrees of freedom. Moreover, to reduce the problem of rolling motion of the Chaplygin sphere to the Liouvillian system, the theory of Chaplygin reducing multiplier is used. Previously this approach was not used in solving the Chaplygin sphere rolling problem. As a result, the study of the dynamics of the considered systems can be carried out using the methods of the theory of topological analysis with the separation of variables according to Liouville.

Keywords: Liouvillian system, Euler – Poinsot problem, Jacobi problem, Chaplygin sphere

For citation: Kuleshov A.S. On the reduction of some systems of classical mechanics to the Liouvillian form. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. DOI: 10.34759/trd-2023-128-02

1. Введение.

В 1846 году Ж. Лиувилль в своей работе [1] указал класс голономных механических систем, для которых уравнение Гамильтона – Якоби может быть проинтегрировано методом разделения переменных. Соответствующие системы получили название систем Лиувилля. В частном случае двух степеней свободы (системы с двумя степенями свободы довольно часто встречаются в механике, см., например, [2-4]) системой Лиувилля называется голономная механическая система, кинетическая энергия которой представляется в виде

$$T = \frac{1}{2}\left(f_1(q_1) + f_2(q_2)\right)\left(a_1(q_1) \ldots\right.$$

а потенциальная энергия имеет вид:

$$V=\frac{V_1(q_1)+V_2(q_2)}{f_1(q_1)+f_2(q_2)},$$

где q_1 и q_2 – обобщенные координаты, при помощи которых определяется соответствующая система, а $f_i(q_i)$, $a_i(q_i)$, $V_i(q_i)$, $i=1,2$ – некоторые функции обобщенных координат такие, что для них справедливы условия

$$\left(f_1(q_1)+f_2(q_2)\right)a_i(q_i)>0,\quad i=1,2.$$

Система Лиувилля с двумя степенями свободы обладает интегралом энергии

$$H=T+V=\frac{1}{2}\left(f_1(q_1)+f_2(q_2)\right)\left(a_1(q_1)\dot{q}_1^2+a_2(q_2)\dot{q}_2^2\right)+\frac{V_1(q_1)+V_2(q_2)}{f_1(q_1)+f_2(q_2)}=h=\text{const},\qquad(1)$$

и, кроме того, допускает независимый с интегралом энергии квадратичный по обобщенным скоростям первый интеграл

$$G=\frac{1}{2}\left(f_1(q_1)+f_2(q_2)\right)f_1(q_1)f_2(q_2)\left[\frac{a_1(q_1)}{f_1(q_1)}\dot{q}_1^2-\frac{a_2(q_2)}{f_2(q_2)}\dot{q}_2^2\right]$$
$$+\frac{f_2(q_2)V_1(q_1)-f_1(q_1)V_2(q_2)}{f_1(q_1)+f_2(q_2)}=g=\text{const}.\qquad(2)$$

Наличие у данной системы двух первых интегралов позволяет утверждать, что рассматриваемая система является интегрируемой. Более того, оказывается возможным провести исследование бифуркаций совместных уровней первых интегралов (1) и (2). Соответствующая техника получила своё развитие в работах Я.В. Татаринова [5-9] и В.М. Алексеева [10], примеры её применения можно найти в работах [11-15].

В настоящей работе рассмотрены несколько систем классической механики, которые путем замены переменных принимают вид систем Лиувилля с двумя степенями свободы. Таким образом, к данным системам могут быть применены результаты работ [5-10].

2. Возможная трактовка задачи Эйлера – Пуансо.

Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера, когда неподвижной точкой является центр масс тела [16]. Положение тела будем определять углами Эйлера θ, ψ, φ. Кинетическая энергия тела имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 \right),$$

где ω_1, ω_2, ω_3 – компоненты угловой скорости в проекции на главные центральные оси инерции. Воспользовавшись кинематическими формулами Эйлера

$$\omega_1 = \dot{\psi} \ldots, \qquad (3)$$

запишем кинетическую энергию следующим образом

$$T = \frac{1}{2}\Big(\left(A_1 \sin^2\varphi + A_2 \cos^2\varphi \right)\sin^2\theta + A_3 \cos^2\theta\Big)\dot{\psi} \ldots \frac{1}{2} \ldots$$
$$+\frac{1}{2}\left(A_1 \cos^2\varphi + A_2 \sin^2\varphi \right)\dot{\theta} \ldots \qquad (4)$$

Функция Лагранжа данной системы совпадает с ее кинетической энергией, т.е.

$$L = T.$$

Легко видеть, что координата ψ является циклической. Ей соответствует циклический интеграл – интеграл площадей

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=\Big(\big(A_1\sin^2\varphi+A_2\cos^2\varphi\big)\sin^2\theta+A_3\cos^2\theta\Big)\dot\psi+A_3\cos\theta\dot\varphi$$
$$+\big(A_1-A_2\big)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\dot\theta=c, \tag{5}$$

постоянную которого приравняем к нулю.

Понизим порядок рассматриваемой системы по Раусу. Для этого из соотношения (5) выразим циклическую скорость $\dot\psi$

$$\dot\psi=-\frac{\big(A_1-A_2\big)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\dot\theta+A_3\cos\theta\dot\varphi}{\big(A_1\sin^2\varphi+A_2\cos^2\varphi\big)\sin^2\theta+A_3\cos^2\theta}$$

и подставим в функцию Лагранжа (4). В результате получим следующее выражение для функции Рауса:

$$R=\frac{1}{2}\big(A_1\cos^2\varphi+A_2\sin^2\varphi\big)\dot\theta^2+\frac{1}{2}A_3\dot\varphi^2-\frac{1}{2}\frac{\Big(\big(A_1-A_2\big)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\dot\theta+A_3\cos\theta\dot\varphi\Big)^2}{\Big(\big(A_1\sin^2\varphi+A_2\cos^2\varphi\big)\sin^2\theta+A_3\cos^2\theta\Big)}. \tag{6}$$

Таким образом, нами получена система с двумя степенями свободы. Если ввести обозначения

$$\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi,\quad \gamma_2=\sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma_3=\cos\theta, \tag{7}$$

то данная система на сфере Пуассона

$$S^2=\left\{\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\right\}$$

может быть описана с помощью функции Рауса

$$R=\frac{A_1A_2A_3}{2\big(A_1\gamma_1^2+A_2\gamma_2^2+A_3\gamma_3^2\big)}\left(\frac{\dot\gamma_1^2}{A_1}+\frac{\dot\gamma_2^2}{A_2}+\frac{\dot\gamma_3^2}{A_3}\right). \tag{8}$$

Действительно, если в функцию (8) вместо γ_1, γ_2, γ_3 подставить их выражения (7) через углы Эйлера θ и φ, то в результате получим (6). Данная система может быть представлена в виде лиувиллевой системы. Докажем здесь этот факт. Сначала введем в выражении (8) новые переменные по формулам

$$\gamma_1 = x_1\sqrt{A_1}, \quad \gamma_2 = x_2\sqrt{A_2}, \quad \gamma_3 = x_3\sqrt{A_3}. \tag{9}$$

В результате функция Рауса задачи Эйлера – Пуансо, определяемая формулой (8), перепишется в виде

$$R = \frac{A_1 A_2 A_3}{2\left(A_1^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 + A_3^2 x_3^2\right)}\left(\qquad \right) \tag{10}$$

Функция (10) лишь множителем отличается от функции Лагранжа

$$L_J = \frac{m}{2}\left(\qquad \right) \tag{11}$$

задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде

$$\left\{A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = 1\right\}.$$

Покажем теперь, как обе эти системы – и система Якоби (11) и система Эйлера – Пуансо (10) приводятся к системе Лиувилля с двумя степенями свободы. Будем считать, что $A_1 < A_2 < A_3$. Введем так называемые эллиптические координаты Якоби [17] по формулам

$$\begin{gathered} x_1^2 = \frac{A_2 A_3 (1 - A_1 u)(1 - A_1 v)}{A_1 (A_2 - A_1)(A_3 - A_1)}, \quad x_2^2 = \frac{A_1 A_3 (1 - A_2 u)(1 - A_2 v)}{A_2 (A_3 - A_2)(A_1 - A_2)}, \\ x_3^2 = \frac{A_1 A_2 (1 - A_3 u)(1 - A_3 v)}{A_3 (A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}, \quad \frac{1}{A_3} < v < \frac{1}{A_2} < u < \frac{1}{A_1}. \end{gathered} \tag{12}$$

Тогда имеем:

$$A_1^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 + A_3^2 x_3^2 = A_1 A_2 A_3 uv,$$

и функция Рауса задачи Эйлера – Пуансо, определяемая формулой (10), перепишется в виде

$$R=\frac{A_1A_2A_3}{8}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{u}{(1-A_1u)(1-A_2u)(1-A_3u)}\dot{\imath}\qquad\frac{v}{(1-A_1v)(1-A_2v)(1-A_3v)}\cdot\right) \tag{13}$$

а функция Лагранжа задачи Якоби перепишется следующим образом

$$L_J=\frac{mA_1A_2A_3}{8}(u-v)\left(\frac{u}{(1-A_1u)(1-A_2u)(1-A_3u)}\dot{\imath}\qquad\frac{v}{(1-A_1v)(1-A_2v)(1-A_3v)}\cdot\right) \tag{14}$$

Следовательно, система Эйлера – Пуансо в случае нулевой постоянной интеграла площадей приводится к системе Лиувилля с двумя степенями свободы (13) и допускает квадратичный по скоростям первый интеграл

$$G=\frac{A_1A_2A_3}{8}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)\frac{1}{uv}\left(\frac{u^2}{(1-A_1u)(1-A_2u)(1-A_3u)}\dot{\imath}\qquad\frac{v^2}{(1-A_1v)(1-A_2v)(1-A_3v)}\cdot\right)$$

Аналогично, система Якоби приводится к лиувиллевой системе с двумя степенями свободы, функция Лагранжа которой имеет вид (14), а дополнительный квадратичный по скоростям первый интеграл может быть записан следующим образом:

$$L_J=\frac{mA_1A_2A_3}{8}(u-v)uv\left(\frac{\dot{\imath}}{(1-A_1u)(1-A_2u)(1-A_3u)}-\frac{\cdot}{(1-A_1v)(1-A_2v)(1-A_3v)}\right).$$

Тот факт, что задача Якоби траекторно эквивалентна задаче Эйлера – Пуансо (даже в случае ненулевой постоянной интеграла площадей), известен давно. Впервые он был установлен в работах А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [18-21].

Итак, мы показали здесь, как две классические задачи механики голономных систем – задача Якоби о геодезических на эллипсоиде и задача Эйлера – Пуансо –

приводятся к виду систем Лиувилля с двумя степенями свободы. Теперь покажем, как можно привести к системе Лиувилля с двумя степенями свободы одну из классических задач механики неголономных систем – задачу о движении тяжелого неоднородного шара (шара Чаплыгина) по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

3. Возможная трактовка задачи о качении шара Чаплыгина.

Рассмотрим задачу о движении тяжелого неоднородного шара по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Предполагаем, что центр тяжести шара лежит в его геометрическом центре. Главные центральные моменты инерции шара считаем различными. В дальнейшем шар с указанным распределением масс будем называть шаром Чаплыгина. Задача о движении такого шара была решена С.А. Чаплыгиным [22]. При этом для решения задачи Чаплыгин пользовался теорией последнего множителя Якоби [17]. Мы докажем интегрируемость задачи о шаре Чаплыгина путем приведения данной системы к системе Лиувилля с двумя степенями свободы и путем использования теории приводящего множителя С.А. Чаплыгина [23-25].

Пусть тяжелый неоднородный шар массы m и радиуса r катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Для описания движения шара введем две системы координат: неподвижную систему $Oxyz$ с началом в некоторой точке O опорной плоскости, по которой катится шар, и осью Oz, направленной вертикально вверх, и подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с шаром, начало которой в центре масс G шара, а оси направлены по главным центральным осям инерции. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные центральные моменты инерции шара. Положение шара будем определять координатами x и y его центра масс относительно неподвижной системы координат и углами Эйлера θ, ψ и φ, определяющими ориентацию системы координат $Gx_1x_2x_3$ относительно неподвижной системы координат $Oxyz$. Обозначим через ω_x, ω_y, ω_z проекции угловой скорости шара на оси неподвижной системы координат $Oxyz$, а через ω_1, ω_2, ω_3 – проекции угловой скорости шара на оси подвижной системы координат $Gx_1x_2x_3$. Соответствующие компоненты угловой скорости выражаются через углы Эйлера и их производные по формулам (3) и

$$\omega_x = \text{[illegible]}.$$

Радиус-вектор $\overrightarrow{OG}$ центра масс шара относительно неподвижной системы координат имеет вид

$$\overrightarrow{OG} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + r\mathbf{e}_z,$$

и следовательно, абсолютная скорость центра масс шара записывается следующим образом: $\mathbf{v}_G =$ [illegible].

По условию задачи, качение шара происходит без проскальзывания. Поэтому скорость той точки K шара, которой он в данный момент времени опирается о неподвижную плоскость, должна быть равна нулю. По формуле Эйлера имеем

$$\mathbf{v}_G + \left[\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GK}\right] = 0,$$

откуда

$$\mathbf{v}_G = \left[\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{KG} \right]. \tag{15}$$

Учитывая, что $\overrightarrow{KG} = r\mathbf{e}_z$, из соотношения (15) находим две наложенные на систему неголономные связи, выражающие условие качения без проскальзывания:

$$\tag{16}$$

Кинетическая энергия шара, вычисленная по формуле Кёнига, имеет вид:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dots \right) + \frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 \right).$$

Потенциальная энергия шара имеет вид: $V = mgz$ и является постоянной. Уравнения движения шара запишем в форме уравнений Чаплыгина. Уравнения связей (16) могут быть записаны в виде

$$\tag{17}$$

$$b_{11} = r\sin\psi,\quad b_{12} = -r\sin\theta\cos\psi,\quad b_{13} = 0,\quad b_{21} = -r\cos\psi,\quad b_{22} = -r\sin\theta\sin\psi,\quad b_{23} = 0.$$

Обозначим через Λ кинетическую энергию шара, вычисленную с учетом наложенных на систему неголономных связей (16). Тогда выражение Λ в явном виде записывается следующим образом:

$$\Lambda = \frac{mr^2}{2}\left(\dots \right) + \frac{1}{2}\left(\dots \right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\dots$$

Уравнения движения шара Чаплыгина, записанные в форме уравнений Чаплыгина, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial \dot{}}\right) - \frac{\partial\Lambda}{\partial} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{}}\right)\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial}\dots - \frac{\partial b}{\partial}\dots\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{}}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial}\dots - \frac{\partial b}{\partial}\dots\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial \Lambda}{\partial \ldots}=\left(\frac{\partial T}{\partial \ldots}\right)\left(\frac{\partial b_{12}}{\ldots}\ldots\right) \qquad (18)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial \Lambda}{\partial \ldots}=\left(\frac{\partial T}{\partial \ldots}\right)\left(-\frac{\partial b_{11}}{\ldots}\ldots\right)$$

В уравнениях (18) коэффициенты b_{ij} вычисляются по формулам (17), а обозначение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \ldots}\right) \ldots \left(\frac{\partial T}{\ldots}\right)$$

говорит о том, что соответствующие частные производные кинетической энергии T вычисляются с учетом неголономных связей (17). В результате уравнения (18) в явном виде могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial \Lambda}{\ldots}=-S\dot{\varphi} \ldots \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial \Lambda}{\ldots}=S\dot{\theta} \ldots \quad \ldots\right)=0. \qquad (19)$$

Здесь введено обозначение

$$S = mr^2\left(\dot{\psi} \ldots\right)\ldots\theta.$$

Из последнего уравнения системы (19) легко сделать вывод, что уравнения движения шара обладают первым интегралом

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}} = k.$$

Запишем данный интеграл в явном виде

$$\left(\left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta\right)\dot{\psi} \ldots \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta} \ldots$$

и будем считать его постоянную k равной нулю. Тогда выразим из этого интеграла обобщенную скорость $\dot{\psi}$

$$\dot\psi = \frac{(A_1 - A_2)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\theta - A_3\cos\theta\,\dot\varphi}{\left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta}. \qquad (20)$$

Подставляя выражение (20) в первые два уравнения движения шара и учитывая, что коэффициенты кинетической энергии Λ не зависят от ψ, получим замкнутую систему двух уравнений второго порядка:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda_*}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial\Lambda_*}{\partial\theta} = -S_*\dot\varphi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda_*}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial\Lambda_*}{\partial\varphi} = S_*\dot\theta. \qquad (21)$$

Здесь Λ_* и S_* означают, что соответствующие функции Λ и S вычисляются с учетом выражения (20) для обобщенной скорости $\dot\psi$.

Приведем теперь систему уравнений (21) к форме уравнений Лагранжа. Для этого воспользуемся теорией так называемого приводящего множителя С.А. Чаплыгина [23-25]. Напомним здесь некоторые элементы этой теории.

Предположим, что уравнения движения некоторой механической системы можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = \dot\theta S, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\theta} = -\dot\varphi S, \qquad (22)$$

$$T = T\left(\dot\varphi, \dots\right).$$

Если бы функция S была равна нулю, то мы имели бы обычные уравнения Лагранжа. Преобразуем уравнения (22) путем введения нового независимого переменного τ, которое определим, положив

$$N dt = d\tau$$

и будем считать N подлежащей определению функцией обобщенных координат φ и θ: $N = N(\varphi, \theta)$. Производные обобщенных координат по τ будем обозначать φ', θ'. Тогда, прежде всего, имеем

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{\varphi}^2 + 2a_{12}\dot{\varphi}\dot{\theta} + a_{22}\dot{\theta}^2\right) = \frac{N^2}{2}\left(a_{11}\varphi'^2 + 2a_{12}\varphi'\theta' + a_{22}\theta'^2\right) = \tilde{T}.$$

В результате уравнения (22) могут быть переписаны в виде

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \theta' Q, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\varphi' Q, \tag{23}$$

где введено обозначение

$$Q = NS - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta'}\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varphi'}\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial \theta}. \tag{24}$$

Если функция N введена так, чтобы имело место равенство

$$Q = 0,$$

то уравнения (23) принимают вид обычных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \tag{25}$$

Функция $N = N(\varphi, \theta)$, при помощи которой уравнения (22) приводятся к виду (25), носит название приводящий множитель Чаплыгина. Наша задача состоит в том, чтобы подобрать приводящий множитель для системы уравнений (21), а затем, приведя ее к лагранжевой системе, с помощью дальнейших преобразований привести ее к системе Лиувилля с двумя степенями свободы.

В нашем случае выражение Λ_* имеет вид

$$\Lambda_* = \frac{mr^2}{2}\Big(\dots \quad \frac{1}{2} \dots \quad \frac{1}{2} \dots$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\big((A_1 - A_2)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \dots\big)^2}{\big((A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta\big)},$$

$$S_* = mr^2\left(\dots \frac{(A_1 - A_2)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \dots}{(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta}\right)\sin\theta .$$

Представим выражение Λ_* в виде:

$$\Lambda_* = \frac{1}{2}\left(L_{11} \dots\right),$$

где L_{11}, L_{12}, L_{22} – коэффициенты, зависящие от φ и θ и легко вычисляемые на основе явного вида функции Λ_*. После замены независимой переменной по формуле $Ndt = d\tau$ получаем

$$\dots \frac{N^2}{2}\left(L_{11}\varphi'^2 + 2L_{12}\varphi'\theta' + L_{22}\theta'^2\right), \qquad (26)$$

$$S = mr^2N\left(\varphi'\cos\theta - \frac{(A_1 - A_2)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\theta' + A_3\cos\theta\varphi'}{(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta}\right)\sin\theta = \dots .$$

Таким образом, частные производные функции $\tilde{\Lambda}_*$ по обобщенным скоростям φ' и θ' равны

$$\frac{\partial\tilde{\Lambda}_*}{\partial\varphi'} = N^2\left(L_{11}\varphi' + L_{12}\theta'\right), \quad \frac{\partial\tilde{\Lambda}_*}{\partial\theta'} = N^2\left(L_{12}\varphi' + L_{22}\theta'\right).$$

Уравнение $Q = 0$ с учетом явного вида (24) для Q принимает вид

$$N^2 \dots \left(L_{11}\varphi' + L_{12}\theta'\right)\frac{\partial N}{\partial\theta} - N\left(L_{12}\varphi' + L_{22}\theta'\right)\frac{\partial N}{\partial\varphi} = 0 .$$

После сокращения на N окончательное уравнение для определения приводящего множителя в задаче о качении шара записывается следующим образом:

$$N\tilde{\Sigma} + \left(L_{11}\varphi' + L_{12}\theta'\right)\frac{\partial N}{\partial \theta} - \left(L_{12}\varphi' + L_{22}\theta'\right)\frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0\,, \qquad (27)$$

$$L_{11} = A_3 + mr^2\sin^2\theta - \frac{A_3^2\cos^2\theta}{\left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta},$$

$$L_{12} = \frac{A_3\left(A_2 - A_1\right)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{\left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta},$$

$$L_{22} = mr^2 + A_1\cos^2\varphi + A_2\sin^2\varphi - \frac{\left(A_2 - A_1\right)^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta}.$$

Несмотря на довольно сложный вид уравнения в частных производных (27), удается найти его решение. Это решение имеет вид

$$N = \frac{1}{\sqrt{N_1}},$$

где N_1 в явном виде записывается следующим образом:

$$N_1 = 1 + \frac{m^2r^4\left(\left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta + A_3\cos^2\theta\right)}{A_1A_2A_3} +$$
$$+\frac{mr^2\left(A_1A_2\sin^2\theta + \left(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi\right)A_3\sin^2\theta + A_3\left(A_1 + A_2\right)\cos^2\theta\right)}{A_1A_2A_3}.$$

Уравнения (21) будут иметь вид уравнений Лагранжа для функции Лагранжа, определяемой формулой (26). После приведения уравнений движения к виду уравнений Лагранжа имеет смысл говорить о приведении данной системы к системе Лиувилля с двумя степенями свободы.

Заметим, что выражение Λ_* может быть представлено в виде

$$\Lambda_* = \frac{mr^2}{2}\left(\quad \right) + R,$$

где R – функция Рауса задачи Эйлера – Пуансо. Таким образом, через переменные γ_1, γ_2, γ_3 данная функция записывается следующим образом:

$$\Lambda_* = \frac{mr^2}{2}\left(\quad \right) \quad \frac{A_1 A_2 A_3}{2\left(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2 \right)}\left(\frac{\quad}{A_1} + \frac{\quad}{A_2} + \frac{\quad}{A_3} \right).$$

Вводя новые переменные по формулам (9) перепишем выражение Λ_* в виде:

$$\Lambda_* = \frac{mr^2}{2}\left(A_1 \quad \right) \quad \frac{A\ A\ A}{2\left(A_1^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 + A_3^2 x_3^2 \right)}\left(\quad \right)$$

Вводя теперь эллиптические координаты Якоби по формулам (12), приведем выражение для Λ_* к виду:

$$\Lambda_* = \frac{A_1 A_2 A_3}{8}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right)\left(mr^2 u + 1 \right)\left(mr^2 v + 1 \right) \times$$

$$\times\left(\frac{u\dot{}}{\left(mr^2 u + 1 \right)\left(1 - A_1 u \right)\left(1 - A_2 u \right)\left(1 - A_3 u \right)} - \frac{\quad}{\left(mr^2 v + 1 \right)\left(1 - A_1 v \right)\left(1 - A_2 v \right)\left(1 - A_3 v \right)} \right).$$

Множитель $\left(mr^2 u + 1 \right)\left(mr^2 v + 1 \right)$ нарушает лиувиллевость данной системы. Именно поэтому возникает логичное предположение, что в эллиптических координатах Якоби приводящий множитель Чаплыгина записывается следующим образом (так он и был найден):

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(mr^2 u + 1 \right)\left(mr^2 v + 1 \right)}},$$

то есть

$$dt = d\tau\sqrt{\left(mr^2u+1\right)\left(mr^2v+1\right)}\,.$$

С учетом этого, функция Лагранжа рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$\Lambda_* = \frac{A_1A_2A_3}{8}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{uu'^2}{\left(mr^2u+1\right)\left(1-A_1u\right)\left(1-A_2u\right)\left(1-A_3u\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{vv'^2}{\left(mr^2v+1\right)\left(1-A_1v\right)\left(1-A_2v\right)\left(1-A_3v\right)}\right).$$

Уравнения движения будут иметь вид уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\Lambda_*}{\partial u'}\right)-\frac{\partial\Lambda_*}{\partial u}=0,\quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\Lambda_*}{\partial v'}\right)-\frac{\partial\Lambda_*}{\partial v}=0$$

и будут допускать, кроме интеграла энергии, дополнительный квадратичный по обобщенным скоростям первый интеграл

$$G = \frac{A_1A_2A_3}{8}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)\frac{1}{uv}\left(\frac{u^2u'^2}{\left(mr^2u+1\right)\left(1-A_1u\right)\left(1-A_2u\right)\left(1-A_3u\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{v^2v'^2}{\left(mr^2v+1\right)\left(1-A_1v\right)\left(1-A_2v\right)\left(1-A_3v\right)}\right).$$

Таким образом, нами показано, как задача о движении шара Чаплыгина по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости приводится к исследованию лиувиллевой системы с двумя степенями свободы.

Заключение.

В данной работе рассмотрены несколько задач классической механики, исследование которых может быть приведено к исследованию системы Лиувилля с двумя степенями свободы. Это задача Якоби о движении по инерции материальной точки по поверхности эллипсоида (задача о геодезических на эллипсоиде), задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера (при нулевой постоянной интеграла площадей) и задача о качении шара Чаплыгина по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Поскольку Лиувиллевы системы с двумя степенями свободы обладают независимым с интегралом энергии первым интегралом, квадратичным по обобщенным скоростям, то предложенный способ приведения позволяет обосновать интегрируемость данных систем и построить бифуркационные диаграммы – кривые на плоскости постоянных первых интегралов, на которых данные интегралы будут зависимы.

Список источников

1. Liouville J. Sur quelques cas particulieres ou les equations du mouvement d’un point materiel peuvent s’integrer // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1846, vol. 11, pp. 345-378.

2. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=65212

3. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=72568

4. Сафонов А.И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды

МАИ. 2022. № 126. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=168988. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

5. Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике. - М.: Изд-во Московского университета, 1984. - 296 с.

6. Татаринов Я.В. Построение компактных инвариантов многообразий, отличных от торов, в одной интегрируемой неголономной задаче // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 216.

7. Татаринов Я.В. Разделяющиеся переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1988. Т. XXIII. С. 160-174.

8. Бебенин Р.М., Татаринов Я.В. Частотная невырожденность в задачах небесной механики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2000. № 5. С. 30-35.

9. Кисляков А.С., Макаревич М.М., Татаринов Я.В. Топологический анализ нового интегрируемого варианта неголономной задачи Суслова // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2006. № 6. С. 34-41.

10. Алексеев В.М. Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений // Бюллетень ИТА АН СССР. 1965. Т. 10. № 4. С. 241-271.

11. Sumbatov A.S. Invariant Characterization of Liouville’s System with Two Degrees of Freedom // International Journal of Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering, 2022, vol. 4, pp. 74-76. DOI:10.37394/232026.2022.4.9

12. Llibre J., Valls C. Integrability of Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom and Homogeneous Potential of Degree Zero // Journal of Applied Mathematics and Physics, 2018, vol. 6, pp. 2192-2201. DOI:10.4236/jamp.2018.611184

13. Ryabov P.E., Sokolov S.V. Bifurcation Diagram of the Model of a Lagrange Top with a Vibrating Suspension Point // Mathematics, 2023, vol. 11(3), pp. 533. DOI:10.3390/math11030533

14. Jingjia Qu. Complex Dynamics of Some Hamiltonian Systems: Nonintegrability of Equations of Motion // Advances in Mathematical Physics, 2019, vol. 2019. ID 9326947.

15. Martynchuk N., Dullin H.R., Efstathiou K., Waalkens H. Scattering Invariants in Euler's two – center problem // Nonlinearity, 2019, vol. 32, pp. 1296-1326. DOI:10.1088/1361-6544/aaf542

16. Баркин М.Ю. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных «действие-угол» для задачи Эйлера – Пуансо // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=47336

17. Якоби К. Лекции по динамике. - Л.-М.: ГРОТ, 1936. - 271 с.

18. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация интегрируемых систем типа Эйлера в динамике твердого тела // Успехи математических наук. 1993. Т. 48. № 5. С. 163-164.

19. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации – I // Математический сборник. 1994. Т. 185. № 4. С. 27-80.

20. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации – II // Математический сборник. 1994. Т. 185. № 5. С. 27-78.

21. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // Функциональный анализ и его приложения. 1995. Т. 29. Вып. 3. С. 1-15.

22. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1903. Т. 24. Вып. 1. С. 139-168.

23. Чаплыгин С.А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Математический сборник. 1911. Т. 28. Вып. 2. С. 303-314.

24. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Геометризация теоремы Чаплыгина о приводящем множителе // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 627-640.

25. Веретенников В.Г., Синицын В.А. К теории приводящего множителя С.А. Чаплыгина // Доклады РАН. 2007. Т. 412. № 5. С. 628-632.

References

1. Liouville J. Sur quelques cas particulieres ou les equations du mouvement d’un point materiel peuvent s’integrer, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1846, vol. 11, pp. 345-378.

2. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI,* 2016, no. 85. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212

3. Bardin B.S., Chekina E.A. *Trudy MAI,* 2016, no. 89. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72568

4. Safonov A.I. *Trudy MAI,* 2022, no. 126. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=168988. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

5. Tatarinov Ya.V. *Lektsii po klassicheskoi dinamike* (Lectures on Classical Dynamics), Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1984, 296 p.

6. Tatarinov Ya.V. *Uspekhi matematicheskikh nauk,* 1985, vol. 40, no. 5, pp. 216.

7. Tatarinov Ya.V. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu,* 1988, vol. XXIII, pp. 160-174.

8. Bebenin R.M., Tatarinov Ya.V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika,* 2000, no. 5, pp. 30-35.

9. Kislyakov A.S., Makarevich M.M., Tatarinov Ya.V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika,* 2006, no. 6, pp. 34-41.

10. Alekseev V.M. *Byulleten' ITA AN SSSR,* 1965, vol. 10, no. 4, pp. 241-271.

11. Sumbatov A.S. Invariant Characterization of Liouville's System with Two Degrees of Freedom, *International Journal of Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering*, 2022, vol. 4, pp. 74-76. DOI:10.37394/232026.2022.4.9

12. Llibre J., Valls C. Integrability of Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom and Homogeneous Potential of Degree Zero, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2018, vol. 6, pp. 2192-2201. DOI:10.4236/jamp.2018.611184

13. Ryabov P.E., Sokolov S.V. Bifurcation Diagram of the Model of a Lagrange Top with a Vibrating Suspension Point, *Mathematics,* 2023, vol. 11(3), pp. 533. DOI:10.3390/math11030533

14. Jingjia Qu. Complex Dynamics of Some Hamiltonian Systems: Nonintegrability of Equations of Motion, *Advances in Mathematical Physics*, 2019, vol. 2019, ID 9326947.

15. Martynchuk N., Dullin H.R., Efstathiou K., Waalkens H. Scattering Invariants in Euler's two – center problem, *Nonlinearity*, 2019, vol. 32, pp. 1296-1326. DOI:10.1088/1361-6544/aaf542

16. Barkin M.Yu. *Trudy MAI,* 2014, no. 72. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47336

17. Jacobi C.G.J. Vorlesungen uber Dynamik, Berlin, Georg Reimer Verlag, 1866, 578 p..

18. Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Uspekhi matematicheskikh nauk,* 1993, vol. 48, no. 5, pp. 163-164.

19. Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Matematicheskii sbornik,* 1994, vol. 185, no. 4, pp. 27-80.

20. Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Matematicheskii sbornik,* 1994, vol. 185, no. 5, pp. 27-78.

21. Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya,* 1995, vol. 29, no. 3, pp. 1-15.

22. Chaplygin S.A. *Matematicheskii sbornik,* 1903, vol. 24, no. 1, pp. 139-168.

23. Chaplygin S.A. *Matematicheskii sbornik*, 1911, vol. 28, no. 2, pp. 303-314.

24. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Geometrizatsiya teoremy Chaplygina o privodyashchem mnozhitele // Nelineinaya dinamika. 2013. T. 9. № 4. S. 627-640.

25. Veretennikov V.G., Sinitsyn V.A. *Doklady RAN*, 2007, vol. 412, no. 5, pp. 628-632.

Статья поступила в редакцию 15.01.2023
Одобрена после рецензирования 18.01.2023
Принята к публикации 27.02.2023
The article was submitted on 15.01.2023; approved after reviewing on 18.01.2023; accepted for publication on 27.02.2023