УДК 539.3

Плоская нестационарная задача о взаимодействии твердого ударника с несовершенствами и упругого полупространства

А.Л. Медведский, Д.В. Тарлаковский

Аннотация

В работе рассмотрен произвольный этап взаимодействия абсолютно твердого ударника и упругого изотропного однородного полупространства в рамках плоской задачи теории упругости. Нестационарная контактная задача сведена к системе функциональных уравнений (СФУ), содержащей кратное сингулярное интегральное уравнение типа Вольтерра I рода, ядром которого являются поверхностные функции влияния для упругой полуплоскости. Для решения СФУ используется метод сеток для пространственно-временной области контакта [1, 2], модифицированный для многосвязных областей контакта и сплайн-параметризации направляющей ударника. Приведены примеры решения контактных задач для эллиптического ударника с начальными несовершенствами.

Ключевые слова

нестационарные контактные задачи; упругая полуплоскость; абсолютно твердое тело; многосвязная область контакта; пространственно-временная область контакта; эллиптический ударник; В-сплайн; контактные напряжения.

Введение

В настоящее время малоисследованными остаются вопросы нестационарного взаимодействия твердых тел с упругими преградами. Указанные задачи затрагивают широкий спектр вопросов, связанных с посадкой спускаемых космических аппаратов на грунт и водную поверхность.

Для решения соответствующих начально-краевых задач в основном используется классический метод конечного элемента. В качестве альтернативы может быть предложен один из вариантов метода гранично-временных интегральных уравнений, который при соответствующей модификации позволяет строить решения соответствующей контактной задачи в пространственно-временной области. В качестве ядер интегральных операторов в данном случае используются поверхностные функции влияния для упругой преграды. Указанный подход позволяет снизить размерность решаемой задачи за счет использования интегральных соотношений в области контакта.

1. Постановка задачи.

Рассматривается плоская задача нестационарного взаимодействия гладкого абсолютно твердого ударника и упругой однородной изотропной полуплоскости. В начальный момент времени $t=0$ ударник касается границы упругой полуплоскости Π_{10} в точке O прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 с базисом $\mathbf{e}_i$. Граница упругой полуплоскости совпадает с плоскостью $x_1=0$, ось Ox_1 направлена в глубь полупространства, а ось Ox_2 вдоль свободной поверхности (рис. 1).

Предполагается, что твердое цилиндрическое тело ограничено гладкой поверхностью, причем направляющая цилиндра Г характеризуется немонотонной кривизной, что в первом приближении моделирует несовершенство ударника и приводит к многосвязной области контакта. Для параметризации направляющей цилиндра кривой Г (рис. 1) используется следующее представление:

$$\Gamma: y_1=\chi_1(\xi), \quad y_2=\chi_2(\xi), \quad \xi\in D_\xi \subseteq \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ - ортонормированный базис связанной с центром масс системы главных центральных осей $O_1y_1y_2$ твердого тела.

Задача решается в линейной постановке, вследствие чего граничные условия ставятся на невозмущенной поверхность полупространства Π_{10} . В первом приближении не учитывается влияние деформации свободной поверхности полупространства на процесс внедрения поэтому граница области контакта $\partial\Omega(\tau)$ определяется из геометрического пересечения двух недеформированных поверхностей: неподвижной Π_{10} и подвижной поверхности твердого ударника $\Pi_{2\mathrm{T}}$ [1]. И представляет собой объединение отрезков оси Ox_2 (см. рис. 1.1). В общем случае область контакта $\Omega(\tau)$ может быть многосвязной.

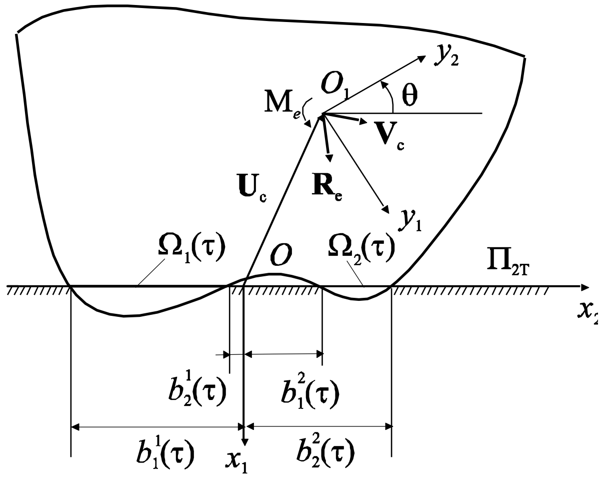

Рис. 1. Геометрия задачи

Задача решается в безразмерном виде, поэтому вводим следующие безразмерные параметры (далее тильда везде опущена):

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{L}, \gamma = \frac{c_1}{c_2}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{L^2}, \tilde{\psi} = \frac{\psi}{L^2},$$

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{L}, \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad (i, j) \in \{1, 2\}, \tag{1.2}$$

$$\tilde{m} = \frac{m}{\rho L^2}, \quad \tilde{J} = \frac{J_3}{\rho L^4}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_c = \frac{\mathbf{U}_c}{L}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_c = \frac{\mathbf{V}_c}{c_1}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega L}{c_1},$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{(\lambda + 2\mu) L}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_e = \frac{\mathbf{R}_e}{(\lambda + 2\mu) L}, \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{M}}{(\lambda + 2\mu) L^2},$$

$$\mathbf{M}_e = \frac{\mathbf{M}_e}{(\lambda + 2\mu) L^2}, \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{L}, \quad (i = 1,3),$$

где λ, μ и ρ - упругие постоянные Ламе и плотность упругой среды; L - характерный размер ударника; u_i - компоненты вектора перемещений точек полупространства; σ_{ij} - компоненты тензора напряжений; φ, c_1 и ψ, c_2 - потенциалы и скорости волн расширения-сжатия и формоизменения упругой среды; m , J_3 - погонные масса и главный момент инерции ударника относительно оси Ox_3; $\mathbf{U}_c$ и θ - вектор перемещения центра масс и угол поворота ударника вокруг центра масс; $\mathbf{R}_e$, M_e , и $\mathbf{R}$, M - соответственно погонные внешние и контактные силы и моменты, действующие на тело.

Движение ударника описывается в безразмерном виде системой уравнений плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела с соответствующими начальными условиями [1].

Уравнения движения упругой среды представляются волновыми уравнениями относительно потенциалов волн расширения-сжатия и формоизменения с известными зависимостями между потенциалами и компонентами вектора перемещений точек полуплоскости u_i и ненулевыми компонентами тензора напряжений α_{ij} [2]. В начальный момент времени $\tau = 0$ возмущения в упругой среде отсутствуют, а на бесконечности среда находится в невозмущенном состоянии.

$$\begin{gathered}
\Omega(\tau) = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i(\tau), \quad \Omega_i(\tau) = \left[b_1^i(\tau), b_2^i(\tau) \right] \in Ox_2, \\
\partial\Omega_i(\tau) = \left\{ b_i^j(\tau) \in Ox_2 \,\middle|\, g\left(0, b_i^j(\tau), \tau\right) = 0,\ j = 1,2 \right\}.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь подвижная поверхность $\Pi_{2\mathrm{T}}$ в системе координат Ox_1x_2 задается неявным образом:

$$\Pi_{\mathrm{T}} : g(x_1, x_2, \tau) = 0 \Leftrightarrow x_i = c_{ij}\chi_j(\xi) + U_{ci}(\tau), \quad i = 1,2. \tag{1.4}$$

В области контакта могут реализовываться граничные условия двух типов:

Задача 1 (свободное проскальзывание контактирующих тел):

$$\begin{gathered}
u_1(x_1, x_2, \tau)\Big|_{x_1=0} = u_{10}(x_2, \tau), \quad \left(x_2 \in \Omega(\tau)\right), \\
\sigma_{11}(x_1, x_2, \tau)\Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(x_2 \notin \Omega(\tau)\right) \\
\sigma_{12}(x_1, x_2, \tau)\Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(x_2 \in \square\right).
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Задача 2 (жесткое сцепление контактирующих тел):

$$\begin{gathered}
u_j(x_1, x_2, \tau)\Big|_{x_1=0} = u_{j0}(x_2, \tau), \quad \left(x_2 \in \Omega(\tau)\right), \\
\sigma_{1j}(x_1, x_2, \tau)\Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(x_2 \notin \Omega(\tau)\right), \quad (j = 1,2),
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где u_{j0} - компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}_0$ в базисе $\mathbf{e}_j$ точек поверхности полупространства, находящихся под ударником:

Связь $u_{j0}(x_2, \tau)$ с кинематическими параметрами ударника $\mathbf{U}_c$ и θ определяется матрицей перехода между системами координат $Ox_1x_2x_3$ и $O_1y_1y_2y_3$ [1,3]:

Результирующие реакции полупространства $\mathbf{R}$ и M связаны с контактными напряжениями $\sigma_{j0}\left(x_2,\tau\right)$ интегральными соотношениями по области контакта $\Omega\left(\tau\right)$:

$$
\begin{gathered}
R_j\left(\tau\right)=\sum_{i=1}^{n}R_j^i\left(\tau\right),\quad M_0\left(\tau\right)=\sum_{i=1}^{n}M_0^i\left(\tau\right),\\
R_j^i\left(\tau\right)=\int\limits_{b_1^i(\tau)}^{b_2^i(\tau)}\sigma_{j0}\left(\xi,\tau\right)d\xi,\quad M\left(\tau\right)=\left(\mathbf{U}_c,\mathbf{R},\mathbf{e}_3\right)+M_0\left(\tau\right),\quad \left(j=1,2\right),\\
M_0^i\left(\tau\right)=-\int\limits_{b_1^i(\tau)}^{b_2^i(\tau)}\xi\sigma_{10}\left(\xi,\tau\right)d\xi,\quad \sigma_{j0}\left(x_2,\tau\right)=\sigma_{1j}\left(x_1,x_2,\tau\right)\Big|_{x_1=0}.
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

Нестационарная контактная задача сводится к следующей системе функциональных уравнений (СФУ) [1, 3], которую представим в операторном виде:

$$
\begin{aligned}
&V_{cj}^{(m)}=m^{-1}\left(\mathbf{K}^{(0)}\left(R_{ej}^{(m)}\right)+z_{mj}\mathbf{L}_r^{(00)}\left(\sigma_{j0}^{(m)}\right)\right)+V_{cj0}^{(m)},\\
&\omega^{(m)}=J^{-1}\left(\mathbf{K}^{(0)}\left(M_{ej}^{(m)}\right)+\mathbf{K}^{(0)}\left[\left(\mathbf{U}_c^{(m)},\mathbf{R}^{(m)},\mathbf{e}_3\right)\right]-\mathbf{L}_r^{(01)}\left(\sigma_{10}^{(m)}\right)\right)+\omega_0^{(m)},\\
&U_{cj}^{(m)}=m^{-1}\left(\mathbf{K}^{(1)}\left(R_{ej}^{(m)}\right)+z_{mj}\mathbf{L}_r^{(10)}\left(\sigma_{j0}^{(m)}\right)\right)+V_{cj0}^{(m)}\tau+U_{cj0}^{(m)},\\
&\theta^{(m)}=J^{-1}\left(\mathbf{K}^{(1)}\left(M_{ej}^{(m)}\right)+\mathbf{K}^{(1)}\left[\left(\mathbf{U}_c^{(m)},\mathbf{R}^{(m)},\mathbf{e}_3\right)\right]-\mathbf{L}_r^{(11)}\left(\sigma_{10}^{(m)}\right)\right)+\omega_0^{(m)}\tau+\theta_0^{(m)},
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
u_{k0}^{(m)}=\mathbf{L}_s^{(kl)}\left(\sigma_{l0}^{(m)}\right),
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{10}^{(m)}(\tau,x_2)=U_{c1}^{(m)}(\tau)+\chi_1(\xi)\cos\theta^{(m)}(\tau)-\chi_2(\xi)\sin\theta^{(m)}(\tau),\\
&u_{20}^{(2)}(\tau,x_2)=U_{c2}^{(m)}(\tau)+\chi_1(\xi)\sin\theta^{(m)}(\tau)+\chi_2(\xi)\cos\theta^{(m)}(\tau)-x_2,\\
&\left(0,b_j^{(m)}\left(\tau\right)\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{C}\left(\theta^{(m)}(\tau)\right)\left(\chi_1(\xi_j),\chi_2(\xi_j)\right)^{\mathbf{T}}+\left(U_{c1}^{(m)},U_{c2}^{(m)}\right)^{\mathbf{T}},\\
&\left(U_{c10},U_{c20}\right)^{\mathbf{T}}=-\mathbf{C}\left(\theta_0^{(m)}\right)\left(\chi_1(\xi_0),\chi_2(\xi_0)\right)^{\mathbf{T}},\quad \left(j=1,2;\, m=1,2;\, l,k=\overline{1,m}\right),
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

где m - номер задачи.

В соотношениях (1.8) - (1.10) введены следующие интегральные операторы:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L}_s^{(mj)},\mathbf{L}_r^{(mk)}:\square\left(D\right)\to\square\left(\square_+\right),\quad \mathbf{K}^{(j)}:\square\left(\square_+\right)\to\square\left(\square_+\right),\\
&\mathbf{L}_s^{(mj)}\left(\varphi\right)=\iint\limits_D F_{mj}\left(x-\xi,\tau-t\right)\varphi\left(\xi,t\right)d\mu,\\
&\mathbf{K}^{(j)}\left(f\right)=\int\limits_0^{\tau}\left(\tau-t\right)^j f\left(t\right)dt,\quad \left(m,j\right)=1,2;\quad k=0,1;\\
&\mathbf{L}_r^{(mk)}\left(\psi\right)=\iint\limits_D\left(\tau-t\right)^m\xi^k\psi\left(\xi,t\right)d\mu,\quad \varphi,\psi\in\square\left(D\right),\ f\in\square\left(\left[0,\tau\right]\right),
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Здесь $F_{jk}\left(x_2,\tau\right)$ - поверхностные функции влияния второго рода для упругого полупространства [1, 3]:

$$\pi G_{11}^{(2)}(x,\tau)R_1(x,\tau)=\begin{cases}\gamma^4x^2\left(\gamma^2x^2-2\tau^2\right)^2\sqrt{\tau^2-x^2},1\le\frac{\tau}{|x|}<\gamma;\\ \gamma^4x^2\sqrt{\tau^2-x^2}\left[\left(\gamma^2x^2-2\tau^2\right)^2+4\tau^2\sqrt{\tau^2-x^2}\sqrt{\tau^2-\gamma^2x^2}\right],\frac{\tau}{|x|}\ge\gamma;\\ 0,\frac{\tau}{|x|}<1;\end{cases}\quad(1.12)$$

$$\pi G_{22}^{(2)}(x,\tau)R_1(x,\tau)=\begin{cases}-4\gamma^4x^2\tau^2\left(\gamma^2x^2-\tau^2\right)\sqrt{\tau^2-x^2},1\le\frac{\tau}{|x|}<\gamma;\\ \gamma^4x^2\sqrt{\tau^2-\gamma^2x^2}\left[\left(\gamma^2x^2-2\tau^2\right)^2+4\tau^2\sqrt{\tau^2-x^2}\sqrt{\tau^2-\gamma^2x^2}\right],\frac{\tau}{|x|}\ge\gamma;\\ 0,\frac{\tau}{|x|}<1\end{cases}\quad(1.13)$$

$$\pi G_{12}^{(2)}(x,\tau)=\begin{cases}2\gamma^4x^2\tau\left(\gamma^2x^2-2\tau^2\right)\sqrt{\gamma^2x^2-\tau^2}\sqrt{\tau^2-x^2}\,\mathrm{sign}x\Big/R_1(x,\tau),1\le\frac{\tau}{|x|}<\gamma;\\ \frac{\pi\gamma^4C_R^2\left(\gamma^2C_R^2-2\right)}{2\left(R_1\left(C_R,1\right)\right)_x}\delta\left(C_R\tau-|x|\right)\mathrm{sign}x,\frac{\tau}{|x|}\ge\gamma;\\ 0,\frac{\tau}{|x|}<1;\end{cases}\quad(1.14)$$

$$R_1(x,\tau)=\left(\gamma^2x^2-2\tau^2\right)^4-16\tau^4\left(\tau^2-\gamma^2x^2\right)\left(\tau^2-x^2\right).\quad(1.15)$$

$$F_{jk}(x_2,\tau)=G_{jk}^{(2)}(x_2,\tau)\quad(1.16)$$

Анализ ядер интегральных операторов $\mathbf{L}_s^{(kl)}$ показывает [1, 3], они имеют интегрируемую особенность в точке $x=\tau=0$ и сингулярности первого порядка, сосредоточенные на фронтах волн Релея $|x|=c_R\tau$ (c_R - скорость волны Релея).

2. Численный алгоритм решения СФУ.

Численная процедура решения СФУ (1.8) - (1.10) строится на базе конечно-разностной аппроксимации пространственно-временной области контакта (рис. 2).

$$D=\bigcup_{m=1}^{M}D_m,\quad D_m=\left\{(t,\xi)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,t\ge0,\,b_1^m(t)\le\xi\ge b_2^m(t)\right\},\quad(2.1)$$

где M - количество пространственно-временных подобластей.

Для аппроксимации области D на полуплоскость $\mathbb{R}^2_{t\xi},\ (t\ge0)$ наносится ортогональная сетка с равномерным шагом h:

$$
\begin{gathered}
\omega_{t\xi} = \left\{ (t_i, \xi_j) \mid t_i = ih, \xi_j = j;\ j \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N} \right\}, \\
\mathbb{R}^2_{t\xi} = \bigcup_i \bigcup_j K_{ij}, \quad K_{ij} = \left\{ (t,\xi) \in \mathbb{R}^2 \middle| t_{i-1} \le t \le t_i, \xi_j \le \xi \le \xi_{j+1} \right\}.
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

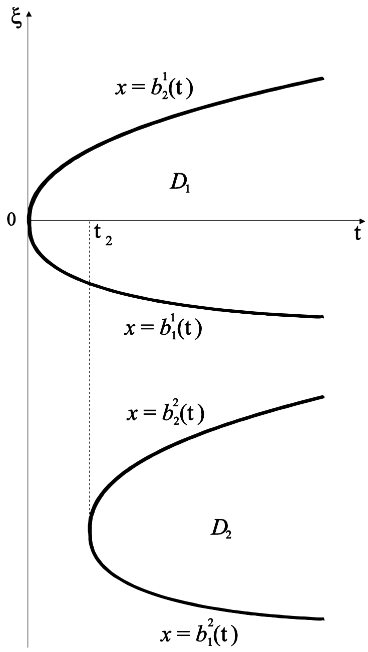

Рис. 2. Пространственно-временная область контакта D

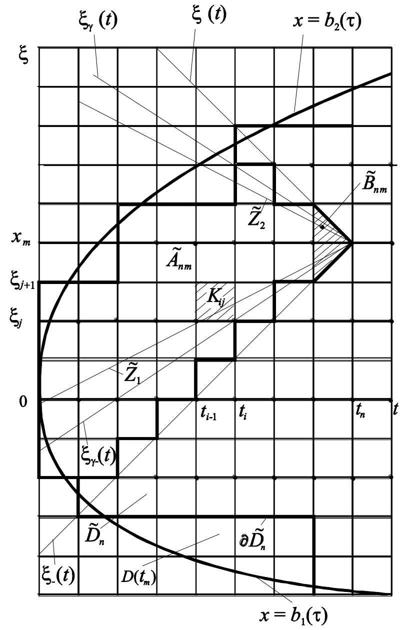

Рис. 3. Пространственно-временная область контакта D_m

Каждая из подобластей $D_m(\tau)$ в момент времени $\tau = t_n$ заменяется многоугольником $\tilde{D}_n^m$, который описывается следующим образом (рис. 3)

$$
\begin{gathered}
\tilde{D}_n^m = \bigcup_{i=1}^{n} P_{im}^n, \quad P_{im}^n = \bigcup_{j=l_{1i}^m}^{l_{ni}^m - 1} K_{ij}, \quad l_{ki}^m = \beta_k^m(t_i), \\
\beta_k^m(t) = \tilde{\beta}_k^m(t) + (-1)^{k+1} \operatorname{mod}_2\left(\left| \tilde{\beta}_k^m(t) \right| + 1 \right), \quad \tilde{\beta}_k^m(t) = \operatorname{sign} b_k^m(t) \left[\frac{\left| \beta_k^m(t) \right|}{h} \right],
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

где значком $[\cdot]$ обозначена целая часть действительного числа.

Носителями функций влияния $F_{\alpha\alpha}(x,t)$ и $F_{\alpha\beta}(x,t), (\alpha \ne \beta)$ являются следующие множества:

$$
\operatorname{supp} F_{\alpha\alpha}(mh - \xi, nh - t) = \left\{ (t,\xi) \middle| \, 0 \le t \le nh, |mh - \xi| \le nh - t \right\}. \tag{2.4}
$$

$$
\begin{gathered}
\operatorname{supp} F_{\alpha,\beta}(x,\tau) = \bigcup_{j=1}^{2} \left(C_j \cup L_j \right), \\
L_j = \left\{ (t,\xi) \in \mathbb{R}^2 \middle| t \in [0,\tau], \xi = (-1)^j C_R t \right\}, C_j = \left\{ (t,\xi) \in \mathbb{R}^2 \middle| t \in [0,\tau], t/j < (-1)^j \xi < t \right\}.
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

Поэтому интегрирование в операторах $\mathbf{L}_s^{(\alpha\alpha)}$ с учетом (2.3) и (2.4) проводится по области $\tilde{A}_{nm}$ (рис. 3, номер подобласти D_m для упрощения записи опущен):

$$\begin{gathered}\tilde{A}_{nm}=\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}\bigcup_{j=K_{1i}}^{k_{2i}-1}K_{ij}\right)\bigcup\tilde{B}_{nm},\ k_{1i}=\max\left\{l_{1i},m-n+i\right\},\quad k_{2i}=\min\left\{l_{2i},m+n-i\right\},\\ \tilde{B}_{nm}=K_n\bigcap\operatorname{supp}F_{\alpha\alpha}\left(mh-\xi,nh-t\right).\end{gathered}\tag{2.6}$$

Для операторов $\mathbf{L}_s^{(\alpha,\beta)}$ $\left(\alpha,\beta=1,2\right)$ в точке $\left(t_n,\xi_m\right)$ с учетом (2.5) используется следующая аппроксимация области интегрирования:

$$\begin{gathered}\operatorname{supp}F_{\alpha\beta}\left(mh-\xi,nh-t\right)\approx\tilde{E}_{nm}=\left[\bigcup_{j=1}^{2}\left(\tilde{C}_{nm,j}\cup\tilde{L}_{nm,j}\right)\right]\bigcup\hat{H}_{nm},\\ \tilde{L}_{nm,j}=\left\{\left(t,\xi\right)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,t\in\left[0,\left(h-1\right)h\right],\xi=mh+\left(-1\right)^j c_R\left(nh-t\right)\right\},\\ \tilde{C}_{nm,j}=\bigcup_{i=1}^{n-1}\bigcup_{k=\lambda(n,m,i,j)}^{\eta(n,m,i,j)}K_{ik},\quad\tilde{H}_{nm}=\hat{B}_{nm},\end{gathered}\tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\lambda\left(n,m,i,1\right)=m-n+i,\quad\lambda\left(n,m,i,2\right)=m+n-i,\\ \eta\left(n,m,i,1\right)=\left[m-j^{-1}\left(n-i+1\right)\right],\\ \eta\left(n,m,i,2\right)=\begin{cases}m+j^{-1}\left(n-i+1\right),m+j^{-1}\left(n-i+1\right)\in Z\\ m+j^{-1}\left(n-i+1\right),m+j^{-1}\left(n-i+1\right)\notin Z\end{cases}.\end{gathered}$$

Функциям одного и нескольких переменных $U_{c\alpha}\left(t\right)$, $V_{c\alpha}\left(t\right)$, $\theta\left(t\right)$, $\omega\left(t\right)$, $\sigma_{\alpha0}\left(\xi,t\right)$ $\left(\alpha=1,2\right)$ ставятся в соответствие сеточные функции u_α^i, v_α^i, θ^i, ω^i, σ_α^{ij}:

$$\begin{gathered}u_\alpha^i=U_{c\alpha}\left(t_i\right),\quad v_\alpha^i=V_{c\alpha}\left(t_i\right),\quad\theta^i=\theta\left(t_i\right),\quad\omega^i=\omega\left(t_i\right),\\ \sigma_\alpha^{ij}=\sigma_{\alpha0}\left(\xi_{z(j)},t_i\right),\quad z\left(j\right)=j+\operatorname{mod}_2\left(\left|j\right|\right).\end{gathered}\tag{2.8}$$

В формулах (2.8) для упрощения записи номер задачи опущен.

Интегральным операторам задачи (1.11) ставятся в соответствие разностные операторы, для которых в качестве областей интегрирования используются введенные выше аппроксимационные множества $\tilde{D}_n,\tilde{A}_{nm}$ и $\tilde{E}_{nm}$.

1) Оператор $\mathbf{K}^{(j)}$. В качестве разностного аналога используется квадратура $\mathbf{\Lambda}_K^{(j)}$, соответствующая формуле прямоугольников на отрезке $\left[0,t_n\right]$ [4]

$$\begin{gathered}\mathbf{\Lambda}_K^{(j)}:H_N\to H_N,\\ \mathbf{\Lambda}_K^{(0)}\left(y\right)=h\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad\mathbf{\Lambda}_K^{(1)}\left(y\right)=h^2\sum_{i=1}^{n}\left(n-i\right)y_i\\ y_i=y\left(t_i\right),\quad y\in H_N,\ \omega_n=\left\{t_i\in\left[0,\tau\right]\middle|\,t_i=(i-1)h,i\in\overline{1,N}\right\},\end{gathered}\tag{2.9}$$

где H_N - пространство функций, заданных на сетке ω_n.

2) Регулярный оператор $\mathbf{L}_2^{(mj)}$. Поставим ему в соответствие разностный оператор формулы прямоугольников $\boldsymbol{\Lambda}_{L_r}^{(mj)}$, определенный на пространстве сеточных функций H_{NM_i}

$$\boldsymbol{\Lambda}_{Lr}^{(0j)}(f)=h^{2+j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=l_{1i}}^{l_{2i}-1}z^j(k)\,f_{ik},\quad \boldsymbol{\Lambda}_{Lr}^{(1j)}(f)=h^{3+j}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=l_{Li}}^{l_{2i}-1}(n-i)z(k)\,f_{ik},$$
$$\omega_{hh}=\left(\left(t_i,\xi_j\right)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\, j=l_{1i},l_{2i}-1,i=\overline{1,N},N\in\mathbb{N}\right\},\tag{2.10}$$

где l_{ki} и $z(k)$ определены в (2.3) и (2.8).

3) Сингулярные операторы $\mathbf{L}_s^{(\alpha\alpha)}$. Сингулярному оператору $\mathbf{L}_s^{(\alpha\alpha)}$ $(\alpha=1,2)$ ставится в соответствие разностный аналог $\boldsymbol{\Lambda}_{L_S}^{(\alpha\alpha)}$, определенный на пространстве сеточных функций H_{NM_i}:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{L_s}^{(\alpha\alpha)}(\sigma_\alpha)=h\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1}d_{m-j,n-i}^{(\alpha\alpha)}\sigma_\alpha^{ij}-\gamma_\alpha\sigma_\alpha^{nm}\right),\quad \sigma_\alpha\in H_{NM_i}.\tag{2.11}$$

Здесь коэффициенты кубатур определяются так:

$$d_{m-j,n-i}^{(\alpha\alpha)}=r_{m-j,n-i}^{(\alpha\alpha)}+s_{m-j,n-i}^{(\alpha\alpha)},$$
$$r_{m-j,n-i}^{(\alpha\alpha)}=\iint_{k_{ij}}F_{\alpha\alpha,r}(mh-\xi,nh-t)\,d\mu,\quad s_{m-j,n-i}^{(\alpha\alpha)}=\iint_{k_{ij}}\frac{d\mu}{(mh-\xi)^2-c_R^2(nh-t)^2}.\tag{2.12}$$

Коэффициенты квадратур $s_{m-j,n-i}^{(\alpha\alpha)}$ сингулярной части вычисляются аналитически и имеют вид [5]:

$$s_{km}^{(\alpha\alpha)}=\frac{h}{2c_R^2}\sum_{i,j,l=0}^{1}(-1)^{j+l}\,\nu_{km}^{ijl}\ln\left|\nu_{km}^{ijl}\right|,\quad \nu_{km}^{ijl}=k-j+(-1)^{i+1}c_R(m+l).\tag{2.13}$$

В формуле (2.13) в силу свойств функции $f(x)=x\ln|x|$ при $\nu_{km}^{ijl}=0$ соответствующее слагаемое становится в пределе равно нулю. Коэффициенты кубатур $r_{km}^{(\alpha\alpha)}$ находятся численно с заданной точностью с помощью четырех точечных кубатур Гаусса [4].

4) Сингулярные операторы $\mathbf{L}_s^{(\alpha\beta)},(\alpha\neq\beta)$. Разностный оператор $\boldsymbol{\Lambda}_{L_s}^{(\alpha,\beta)}$, аппроксимирующий $\mathbf{L}_s^{(\alpha\beta)}$, имеет вид [1,3]:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{L_s}^{(\alpha\beta)}(\sigma_\beta)=h\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1}d_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)}\sigma_\beta^{ij},\quad \sigma_\beta\in H_{NM_i}.\tag{2.14}$$

Здесь коэффициенты квадратур $d_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)}$ определяются так:

$$
d_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)} = \begin{cases} r_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)}, \quad j \in \bigcup\limits_{k=1}^{2} \left[\lambda\left(n,m,i,k\right), \eta\left(n,m,i,k\right) \right]; \\ -p_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)} \operatorname{sign}\left(m-j\right), \quad j \in \bigcup\limits_{k=1}^{2} \left[\varphi\left(n,m,i,k\right), \psi\left(n,m,i,k\right) \right]; \end{cases} \tag{2.15}
$$

а в остальных случаях $d_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)} = 0$.

Коэффициенты квадратур $r_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)}$ вычисляются численно с помощью четырех точечных квадратурных формул Гаусса:

$$
r_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)} = h^{-1} \iint\limits_{K_{ij}} F_{\alpha\beta,1}(mh-\xi, nh-t) d\xi dt, \tag{2.16}
$$

а коэффициенты $p_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)}$ имеют вид [3]:

$$
p_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)} = \sqrt{1+c_R^2} F_{\alpha\beta,2}\left(c_R, 1\right) C_{m-j,n-i}. \tag{2.17}
$$

В соотношениях (2.16) и (2.17) используются следующие представления поверхностных функций влияния:

$$
\begin{gathered}
F_{\alpha\beta}\left(x,\tau\right) = F_{\alpha\beta,1}\left(x,\tau\right)\Big(H\left(\tau-|x|\right) - H\left(\tau-\gamma|x|\right)\Big) + \\
+F_{\alpha\beta,2}\left(c_R,1\right)\delta\left(c_R\tau-|x|\right)\operatorname{sign}x, \\
\pi F_{12,1}\left(x,\tau\right) = -\pi F_{21,1}\left(x,\tau\right) = \\
= 2\gamma^4 x^2 \tau\left(\gamma^2 x^2 - 2\tau^2\right)\sqrt{\gamma^2 x^2 - \tau^2}\sqrt{\tau^2 - x^2}\operatorname{sign}x / R_1\left(x,\tau\right), \\
F_{12,2}\left(x,\tau\right) = -F_{21,2}\left(x,\tau\right) = \frac{\gamma^4 c_R^2\left(\gamma^2 c_R^2 - 2\right)}{2R'_{1,x}\left(x,\tau\right)}, \quad \left(\alpha,\beta = 1,2; \alpha \neq \beta\right).
\end{gathered} \tag{2.18}
$$

Коэффициенты $C_{m-j,n-i}$ в (2.17) определяются вариантами пересечения прямых $\tilde{L}_{nm,j}$ и элементов K_{ij} пространственно-временной сетки.

Введенные операторы $\mathbf{\Lambda}_K^{(j)}$ (2.9), $\mathbf{\Lambda}_{L_r}^{(mj)}$ (2.10), $\mathbf{\Lambda}_{L_s}^{(\alpha\alpha)}$ (2.11) и $\mathbf{\Lambda}_{L_s}^{(\alpha\beta)}$ (2.14) позволяют построить явную разностную схему первого порядка точности по пространственной и временной координатам для системы функциональных уравнений (1.8) - (1.10).

$$
\begin{gathered}
\mathbf{U}_1^n = \mathbf{U}_1^{n-1} + h\mathbf{V}_1^{n-1}, \quad \mathbf{B}^n = \mathbf{U}_2^n + \mathbf{C}_1^n \mathbf{Y}^n, \\
\mathbf{W}^{nm} = \mathbf{U}_3^{nm} + \mathbf{C}_2^n \mathbf{Y}^{nm} - \mathbf{X}^m, \\
\mathbf{\Sigma}^{nm} = \mathbf{S}^{n-1,m} - h^{-1}\mathbf{W}^{nm}, \quad \mathbf{V}_1^n = \mathbf{V}_1^{n-1} + h\mathbf{M}\left(\mathbf{T}_e^n + \mathbf{T}^n\right).
\end{gathered} \tag{2.19}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathbf{U}_1^n=\left(u_1^n,u_2^n,\theta^n\right)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{U}_2^n=\left(\mathbf{u}^n,...,\mathbf{u}^n\right)_{1\times 2m},\quad \mathbf{u}^n=\left(u_1^n,u_2^n\right),$$

$$\mathbf{B}^n=\left(b_1^n,...,b_m^n\right)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{b}_k^n=\left(0,b_{1k}^n,0,b_{2k}^n\right),$$

$$\mathbf{Y}^n=\left(\boldsymbol{\chi}_1^n,...\boldsymbol{\chi}_m^n\right),\quad \boldsymbol{\chi}_k^n=\left(\chi_1(\xi_{1k}^n),\chi_2(\xi_{1k}^n),\chi_1(\xi_{2k}^n),\chi_2(\xi_{2k}^n)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{V}_1^n=\left(v_1^n,v_2^n,\omega^n\right)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{U}_3^{nm}=\left(u_1^n,\delta_{2l}u_2^n\right)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{Y}^{nm}=\left(\chi_1(\xi^{nm}),\chi_1(\xi^{nm})\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{W}^{nm}=\left(w_1^{nm},\delta_{2l}\gamma^{-1}w_2^{nm}\right)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{X}^m=\left(0,\delta_{2l}mh\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{nm}=\left(\sigma_1^{nm},\sigma_2^{nm}\right)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{S}^{n-1,m}=\left(\hat{s}_1^{n-1,m},\gamma^{-1}\hat{s}_2^{n-1,m}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{s}_\alpha^{nm}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=k_{1i}^m}^{k_{2i}^m}d_{m-j,n-i}^{(\alpha\beta)}\sigma_\alpha^{ij},\quad \mathbf{T}_e^n=\left(R_{e1}^n,R_{e2}^n,M_e^n\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{T}^n=\left(R_1^n,R_2^n,u_2^nR_1-u_1^nR_2-M^n\right)^{\mathrm{T}},$$

$$R_j^n=h\sum_{k=l_{1n}}^{l_{2n}-1}\sigma_j^{nk},\quad M^n=h^2\sum_{k=l_{1n}}^{l_{2n}-1}z\left(k\right)\sigma_1^{nk},\tag{2.20}$$

$$\mathbf{C}_1^n=\begin{pmatrix}\mathbf{C}(\theta^n), & ... & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}, & ... & \mathbf{C}(\theta^n)\end{pmatrix}_{4m\times 4m},\quad \mathbf{C}_2^n=\begin{pmatrix}\cos\theta^n & -\sin\theta^n\\ -\delta_{2l}\sin\theta^n & -\delta_{2l}\cos\theta^n\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}=\left(m_{ij}\right),\quad m_{11}=m_{22}=m^{-1},\quad m_{33}=J^{-1},$$

где δ_{ij} - символы Кронекера, l - номер задачи, M - количество подобластей пространственно-временной области контакта, коэффициенты кубатур $d_{m-j,n-i}^{(\alpha)}$ определяются соотношениями (2.12), (2.13) и (2.15) - (2.17).

При расчете контактных задач положительные нормальные напряжения в окрестности границы области контакта, найденной из геометрических условий (1.3), полагались равными нулю, и, тем самым определялась площадка контакта из физических условий $\sigma_{10}<0$.

Исследование вопросов аппроксимации, сходимости и устойчивости разностной схемы (2.19) осуществлялось на примере решения нестационарной контактной задачи для гладкого штампа с фиксированной площадкой контакта. Указанная задача решена в монографии [6]. Результаты расчетов указанной задачи показывают, что разработанная конечно-разностная схема обладает практической сходимостью.

3. Пример расчета.

Рассмотрим скользящее внедрение $(\theta_0=90^\circ)$ в стальное полупространство $(\gamma=1{,}871)$ абсолютно твердого тела со следующей направляющей:

$$\chi_1(\xi) = \left(1 + \frac{\delta(\xi)}{|N|}\sqrt{1-e^2}\right)\cos\xi, \quad \chi_2(\xi) = \left(\sqrt{1-e^2} + \frac{\delta(\xi)}{|N|}\right)\sin\xi,$$
$$\delta(\xi) = \delta_0 \sin n\xi, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \xi \in [0, 2\pi], \tag{3.1}$$
$$N^2 = (1-e^2)\cos^2\xi + \sin^2\xi,$$

где δ_0 - амплитуда возмущений, e - эксцентриситет ударника.

Геометрическая форма ударника при $e = 0,99$; $\delta_0 = 0,005$; $n = 10$ показана на рисунке 4.

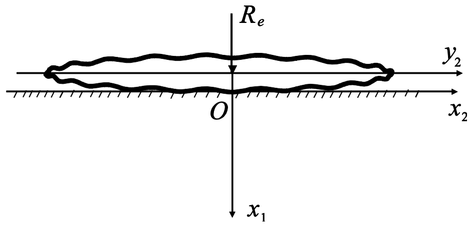

Рис. 4. Положение ударника в момент времени $\tau = 0$

Массово-инерционные параметры ударника принимались следующими: $m = 0,314$; $J = 0,079$. Начальные условия для ударника: $V_{10} = V_{20} = 0,001$; $\omega_0 = 0$. На ударник действует внешняя нагрузка $R_{e1} = R_{e2} = 0,01$; $M_e \equiv 0$.

Решение задачи строится с использованием конечно-разностной схемы (2.19) (шаг интегрирования $h = 5 \cdot 10^{-5}$, конечное время счета $\tau_k = 0,5$). Задача решалась при двух видах контактных граничных условий (сплошные линии на рисунках соответствуют жесткому сцеплению контактирующих поверхностей, штриховая - свободному проскальзыванию).

Результаты расчетов указанной задачи представлены на рисунках 5 – 12. На рисунке 5 изображена многосвязная пространственно-временная область контакта. Как следует из рисунка, на конечный момент времени τ_k в задаче имеется шесть подобластей с монотонно возрастающими по времени границами. На рисунке 6 изображена временная зависимость минимальной скорости расширения границы области контакта $\dot{b}_{\min} = \min\limits_{m,i,k} \dot{b}_{ik}^m$. Из рисунка следует, что взаимодействие ударника с полупространством происходит на дозвуковом этапе взаимодействия $\dot{b}_{\min} < 1$.

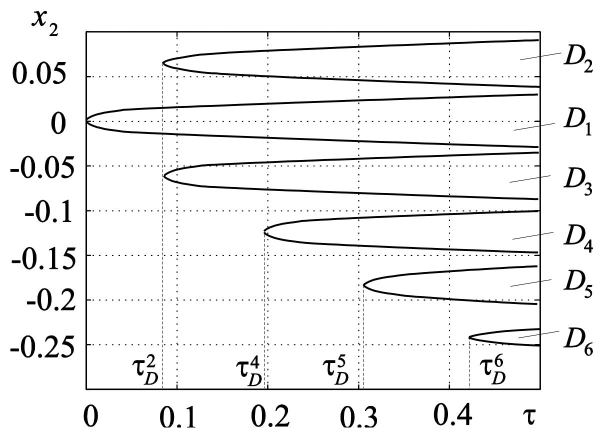

Рис. 5. Многосвязная область контакта D
($\tau_D^2 = 0,087;\ \tau_D^4 = 0,19;\ \tau_D^5 = 0,28;\ \tau_D^6 = 0,42$)

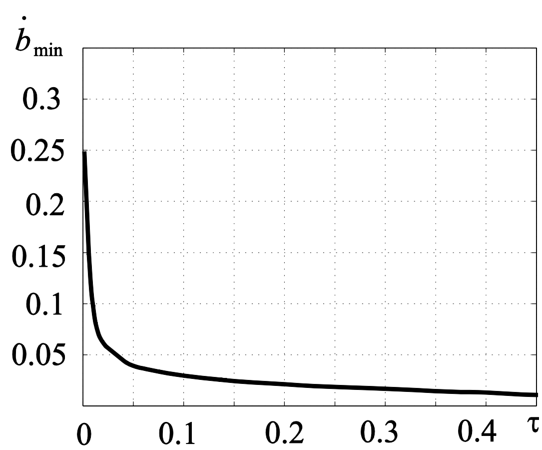

Рис. 6. Временная зависимость минимальной скорости расширения границы области контакта $\dot{b}_{\min}(\tau)$

Рисунки 7 и 8 отражают кинематику движения ударника. Как следует из рисунка 7, учет жесткого сцепления ударника и полупространства увеличивает «жесткость» последнего, что приводит к снижению абсолютных значений компонент вектора скорости, причем наиболее существенное влияние оказывается на нормальное к поверхности полупространства движение ударника. Жесткое сцепление приводит также к существенному увеличению абсолютных значений угловых скоростей ударника (рис. 8).

Распределения нормальных и касательных напряжений под ударником для подобластей D_1 и D_2 представлены на рисунках 9 – 12.

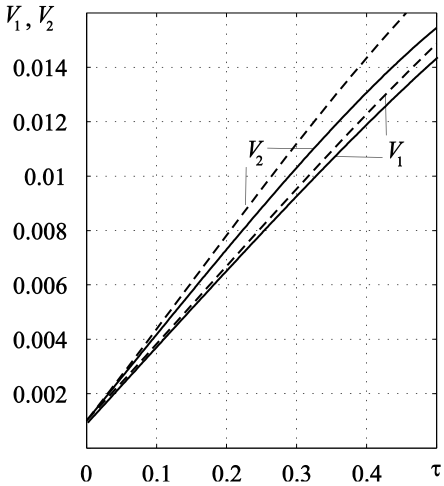

Рис. 7. Временная зависимость компонент вектора скорости ударника V_1 и V_2

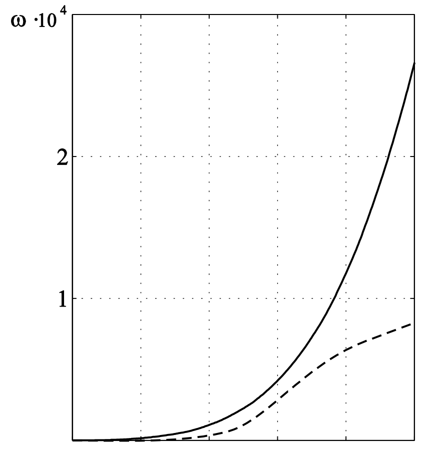

Рис. 8. Временная зависимость угловой скорости ударника ω

Вертикальные штриховые прямые соответствуют границе области контакта в указанные моменты времени, причем номера кривых соответствуют номерам прямых.

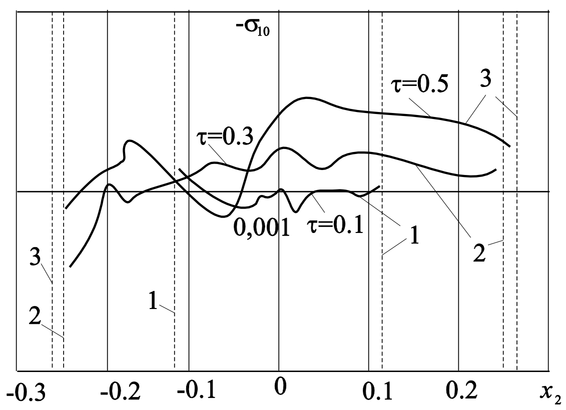

Рис. 9. Распределение нормальных контактных напряжений $\sigma_{10}(x,\tau)$ в области D_1

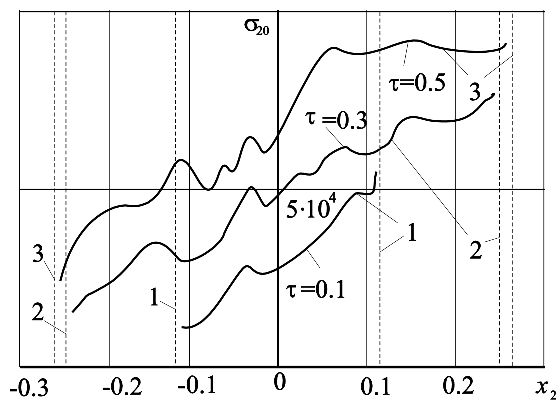

Рис. 10. Распределение касательных контактных напряжений $\sigma_{20}(x,\tau)$ в области D_1

Из рисунков 11 – 12 следует, что в случае скользящего удара в условиях жесткого сцепления происходит существенное увеличение касательных напряжений в окрестности границ областей контакта b_2^m. Аналогичный эффект наблюдается и для нормальных напряжений для областей контакта D_m, образующихся в процессе взаимодействия ударника и полупространства. Расчеты задач о вертикальном внедрении ударника показывают, что в этом случае касательные напряжения под ударником на порядок меньше контактных нормальных напряжений.

Рис. 11. Распределение нормальных контактных напряжений $\sigma_{10}(x,\tau)$ в области D_2

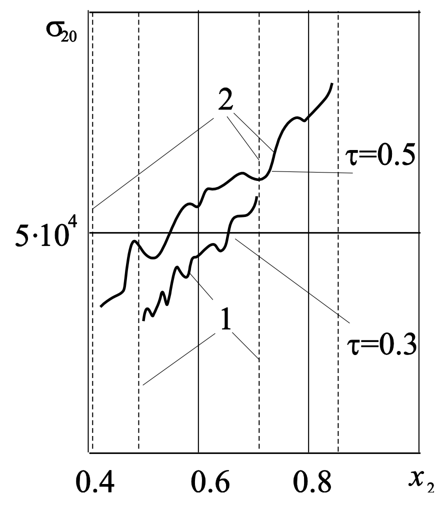

Рис. 12. Распределение касательных контактных напряжений $\sigma_{20}(x,\tau)$ в области D_2

Работа выполнена при финансовой поддержке: РФФИ (коды проектов № 09-01-00731-а, № 12-08-00934), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы по лоту «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области нанотехнологий и наноматериалов» (госконтракт № 02.740.11.0790 «24» апреля 2010 г.), Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-64683.2010.8).

Библиографический список

1. Тарлаковский Д.В. Двумерные контактные задачи с подвижными границами/ А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский. – М.: Изд-во, 1990. - 48 с.

2. Новацкий В. Теория упругости/ В. Новацкий. - М: Мир, 1975. - 872 с.

3. Медведский А. Л. Наклонный удар абсолютно твердого цилиндра по упругому полупространству / А. Л. Медведский, А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский// Изв. РАН. МТТ._ 1994._ № 1.- С. 27–37.

4. Бахвалов Н.С. Численные методы/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - 3, перераб. и доп. изд. - М: Бином, 2003. - 632 с.

5. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений/ И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. - М: Наука. Глав. ред. физ.- мат. лит., 1971. - 1108 с.

6. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи/ В. М. Сеймов. - Киев: Наук.думка, 1976. - 283 с.

Сведения об авторах

Медведский Александр Леонидович, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.ф.-м.н., доцент,

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: (499) 158-44-99, 8-903-712-77-16; e-mail: mdv66@mail.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, заведующий кафедрой Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф.-м.н., профессор.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: (499) 158-43-06; e-mail: tdv902@mai.ru