УДК 519.977

Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа

Немыченков Г.И.

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,

ул. Викторенко, 7, Москва, 125319, Россия

e-mail: grigorian_05@list.ru

Аннотация

Рассматривается задача синтеза оптимальных дискретных систем автоматного типа, описываемых рекуррентными включениями, которые служат математической моделью устройств управления в форме автомата с памятью. Она обобщает классическую задачу оптимального управления дискретными системами. Разработано программно-алгоритмическое обеспечение синтеза одномерных и двумерных систем автоматного типа. Анализ работы алгоритма проведен путем его применения для решения академических примеров, для которых известно аналитическое решение.

Ключевые слова: дискретная система; оптимальное управление; алгоритм синтеза оптимального управления.

Введение

В работе рассматриваются дискретные системы автоматного типа (САТ), которые служат математическими моделями устройств управления в форме автомата с памятью. Дискретная система автоматного типа моделирует управление переключениями режимов работы сложных динамических систем и является одной из составляющих гибридных систем [1]. Дискретная система автоматного типа описывается рекуррентными уравнениями или включениями и служит математической моделью устройств управления в форме автомата с памятью. Она является одной из составляющих в динамических системах с автоматной частью [2,3], логико-динамических [4,5,6] и гибридных системах [1,7]. Под гибридной системой понимается система, в которой процессы имеют несколько уровней разнородного описания, а состояние системы характеризуется непрерывно меняющимися и дискретно меняющимися компонентами [8]. Такие системы встречаются в прикладных задачах управления механическими, электроэнергетическими системами, в задачах управления летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и во многих других областях.

В прикладных задачах управления движением летательных аппаратов нередко возникают ограничения на количество переключений. Например, для перевода спутника с низкой круговой орбиты на высокую (геостационарную) используется разгонный блок "Бриз-М". Допустимое количество запусков маршевого двигателя разгонного блока – не более 10. Поэтому если состояние двигателя (включен/выключен) описывается дискретной системой, то общее количество переключений системы будет, естественно, ограничено. Такие ограничения можно учесть при синтезе переключающих систем [9,10]. В задаче активной стабилизации спутника применение переключающих систем для описания работы реактивного двигателя позволяет учитывать неэффективные затраты топлива при его включении и выключении [6].

Целью работы является разработка программно-алгоритмического обеспечения синтеза позиционного управления на основе достаточных условий оптимальности.

Постановка задачи

Кратко сформулируем математическую постановку задачи синтеза дискретных систем автоматного типа.

Пусть на промежутке времени $T = [t_0, t_1]$ траектория $y: T \to Y \subset \mathbb{R}^m$ дискретной системы автоматного типа имеет конечное число скачков в точках $\tau_1, \dots, \tau_N$, образующих неубывающую последовательность

$$t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_N \leq \tau_{N+1} = t_1. \tag{1}$$

Состояния $\mathrm{y_i = y(\tau_i)}$ системы в тактовые моменты времени [9] удовлетворяют включению

$$y_i \in Y(\tau_i, y_{i-1}),\ i = 1, \dots, N. \tag{2}$$

Начальное состояние задано начальным условием $\mathrm{y(t_0) = y_0}$. Множество допустимых траекторий обозначим через $\mathcal{Y}$. Качество допустимых траекторий с мгновенными многократными переключениями оценивается функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f\big(t, y(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{N} g(\tau_i, y_{i-1}, y_i) + F(y(t_1)). \tag{3}$$

Требуется найти минимальное значение функционала и допустимую траекторию $y^*(\cdot)$, на которой это значение достигается:

$$I\big(y^*(\cdot)\big) = \min_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}(t_0,y_0)} I\big(y(\cdot)\big). \qquad (4)$$

Количество N и тактовые моменты $\tau_1,\dots,\tau_N$ заранее не заданы и определяются в результате оптимизации.

Условные функции цены

Применение динамического программирования опирается на понятие функции цены [10] (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана), значение $\varphi(t,y)$ которой по определению равно значению функционала оставшихся (будущих) потерь:

$$I\big(t,y,y(\cdot)\big) = \int_t^{t_1} f\big(t,y(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{N} g(\tau_i,y_{i-1},y_i) + F\big(y(t_1)\big), \qquad (5)$$

вычисленному на оптимальной траектории, исходящей из позиции (t,y), т.е. удовлетворяющей начальному условию $y(t) = y$. В (5) тактовые моменты времени $\tau_1,\dots\tau_N$ образуют неубывающую последовательность на промежутке $[t,t_1]$: $t = \tau_0 \le \tau_1 \le \cdots \tau_N \le \tau_{N+1} = t_1$. Количество N и моменты $\tau_1,\dots\tau_N$ переключений в (5) заранее не заданы и подлежат оптимизации. Другими словами, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (5) на множестве допустимых траекторий $\mathcal{Y}(t,y)$:

$$\varphi(t,y) = \min_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}(t,y)} I\big(t,y,y(\cdot)\big). \qquad (6)$$

Предлагаемый алгоритм основан на построении условной функции цены. Условная функция цены, согласно [9] равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (5) на множестве $\mathcal{Y}^N(t,y)$ допустимых траекторий с не более чем N переключениями:

$$\varphi^N(t,y) = \min_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}^N(t,y)} I\big(t,y,y(\cdot)\big). \qquad (7)$$

Таким образом, условная функция цены отличается от "настоящей" функции цены дополнительным ограничением на количество переключений.

Рекуррентное уравнение для последовательности условных функций цены

Нулевую функцию цены $\varphi^0(t,y)$ находим как значение функционала (5) на постоянной траектории $y(t) = y$:

$$\varphi_0(t,y) = \int_t^{t_1} f(t,y)dt + F(y) \qquad (8)$$

при всех $(t,y) \in T \times Y$. Следующие условные функции цены удовлетворяют уравнению

$$\varphi^k(t,y) = \min_{t\le\tau\le t_1}\left\{\int_t^{\tau} f(t,y)dt + \min_{z\in Y(t,y)\cup\{y\}}\left[\varphi^{k-1}(\tau,z) + g^0(t,y,z)\right]\right\}, \qquad (9)$$

где

$$g^0(t,y,z) = \begin{cases} g(t,y,z), & y \ne z, \\ 0, & y = z \end{cases}. \qquad (10)$$

Таким образом, условные функции цены $\varphi^k(t,y)$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют уравнению (9), а нулевая функция $\varphi^0(t,y)$ находится по формуле (6). Функция цены находится по условным функциям в результате предельного перехода

$$\varphi(t,y) = \lim_{N\to\infty} \varphi^N(t,y). \tag{11}$$

Алгоритм синтеза

Шаг 0. Находим нулевую функцию цены φ^0 согласно формуле (6)

$$\varphi^0(t,y) = \int_t^{t_1} f(t,y)dt + F(y) \tag{12}$$

при всех $(t,y) \in \mathrm{T} \times \mathrm{Y}$. Задаем нулевую позиционную конструкцию:

$$\boldsymbol{y}^0(t,y) = y. \tag{13}$$

Задаем номер $k = 1$ следующих искомых условных функций цены и конструкций.

Шаг 1^k. Находим

а) образующую

$$\varphi_k(t,y) = \min_{z\in Y(t,y)\cup\{y\}} \{\varphi^{k-1}(t,z) + g^0(t,y,z)\}; \tag{14}$$

б) вспомогательную конструкцию

$$\mathbf{y}_{\boldsymbol{k}}(t,y) = \arg \min_{z\in Y(t,y)\cup\{y\}} \{\varphi^{k-1}(t,z) + g^0(t,y,z)\}. \tag{15}$$

Шаг 2^k. Решая при $t < t_1$ систему неравенств

$$\begin{cases} \varphi_k(t,y) < \varphi^{k-1}(t,y); \\ f(t,\mathbf{y}_k(t,y)) - g_t\big(t,y,\mathbf{y}_k(t,y)\big) \le f(t,y); \end{cases} \tag{16}$$

определяем множество активных позиций π_k, в которых происходит переключение. При $t = t_1$ второе неравенство в (16) не учитывается. Если данная система не имеет решений ($\pi_k = \emptyset$), то процесс построения условных функций цены и конструкции заканчивается. Если левая граница $\partial\pi_k$ совпадает с левой границей $\partial\Pi$ всего пространства позиций, то пропускаем следующий шаг 3^k, полагая $\pi_{0k} = \emptyset$.

Шаг 3^k. Если система (16) совместна ($\pi_k = \emptyset$), то находим образующую $\varphi_{0k}(t,y)$, интегрируя на области π_{0k} (π_{0k} – множество пассивных позиций, предшествующих π_k) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{0k}(t,y) + f(t,y) = 0 \tag{17}$$

с терминальным условием на левой границе $\partial\pi_k$ области π_k:

$$\varphi_{0k}(t,y) = \varphi_k(t,y). \tag{18}$$

Шаг 4^k. Составляем условную функцию цены

$$\varphi^k(t,y) = \begin{cases} \varphi_{0k}(t,y), (t,y) \in \pi_{0k}; \\ \varphi_k(t,y), (t,y) \in \pi_k; \\ \varphi^{k-1}, (t,y) \in \pi^k \backslash (\pi_k \cup \pi_{0k}); \end{cases} \tag{19}$$

и позиционную конструкцию САТ:

$$\mathrm{y}^k(\mathrm{t},\mathrm{y}) = \begin{cases} \mathrm{y}, (\mathrm{t},\mathrm{y}) \in \pi^k \backslash \pi_k; \\ \mathrm{y}_k(\mathrm{t},\mathrm{y}), (\mathrm{t},\mathrm{y}) \in \pi_k. \end{cases} \tag{20}$$

Процесс заканчивается, если $\pi_k = \emptyset$. Дополнительным условием окончания может служить ограничение допустимого количества переключений, например натуральным числом К. В этом случае, если $k < \mathrm{K}$ и $\pi_k \neq \emptyset$, то продолжаем построение образующих с шага 1^k, полагая $k := k + 1$, иначе процесс заканчивается.

Компьютерная технология решения

При численной реализации алгоритма приближенного синтеза оптимальных дискретных систем автоматного типа пространство позиций $\Pi = \mathrm{T} \times Y$ ограничивается и заменяется сеткой с узлами $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ с шагом $\Delta\, \tau$ по времени и шагом $\Delta\, y = \Delta\, y_1, \dots \Delta\, y_m$ по состоянию. Если по каждой координате вектора состояния выбрано М узлов, то сетка в пространстве позиций будет содержать $(N+1)M^m$ узлов. Допустимые траектории должны проходить по сетке. Количество переключений нужно ограничить: либо в каждый тактовый момент времени

$$k_i \leq K_i, i = 0,1, \dots, N, \tag{21}$$

либо в совокупности

$$\mathrm{k}_0 + \mathrm{k}_1 + \dots + \mathrm{k}_\mathrm{N} \leq \mathrm{K}. \tag{22}$$

В предложенном алгоритме синтеза оптимальной САТ имеются две операции, которые нужно выполнять с использованием численных методов: интегрирование дифференциального уравнения и конечномерная целочисленная минимизация при решении рекуррентного уравнения, которые, как правило, нельзя выполнить точно (аналитически). Поэтому приходится использовать приближенные (численные) методы.

Дифференциальное уравнение и терминальное условие имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_0(t,y) + f(t,y) = 0, \qquad \varphi_0(t_1,y) = F(y). \tag{23}$$

Эта задача Коши решается простым интегрированием

$$\varphi_0(t,y) = F(y) + \int_t^{t_1} f(t,y)dt. \tag{24}$$

Здесь можно использовать любой метод численного интегрирования. При решении примеров использовался метод трапеций, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени.

Операции минимизации используется при решении рекуррентного уравнения (14). Поскольку уравнение решается на сетке, то операция минимизации становится целочисленной. В алгоритме используется простой перебор по узлам сетки. Такой подход нельзя считать эффективным. В случае большой размерности минимизацию следует выполнять другими методами [11].

В результате работы программ, реализующих алгоритм, будут получены значения образующих. Количество образующих при ограничениях (21)

$$(K_0+1)(K_1+1)\cdot\ldots\cdot(K_N+1). \tag{25}$$

Для каждой образующей на сетке требуется запомнить $(N+1)M^m$ значений. Таким образом, объем памяти, требуемой для хранения значений, составляет $(K_0+1)(K_1+1)\cdot\ldots\cdot(K_N+1)(N+1)M^m$ действительных чисел.

Количество арифметических операций оценить затруднительно, поскольку алгоритм включает целочисленную минимизацию.

Пример. Пусть траектория $y:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ дискретной системы автоматного типа в точках разрыва $\tau_1,\ldots,\tau_N$ $(0\le\tau_1\le\cdots\le\tau_N\le1)$ удовлетворяет включению

$$y_{1_i}\in[0,+\infty),$$

$$y_{2_i}\in[0,+\infty),$$

где $y_{1_i}=y_1(\tau_i)$, $y_{2_i}=y_2(\tau_i)$, $i=1,\ldots,N$.

Качество траектории оценивается функционалом

$$I=\int_0^1[\mu_1y^1(t)+\mu_2y^2(t)]dt+\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{8}+\frac{(1-\tau_i)^2}{2}\right\}+\frac{1}{2}\mu_1[1-y_N^1]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\mu_2[1-y_N^2]^2.$$

Требуется найти оптимальную позиционную конструкцию системы, а также оптимальные траектории с начальными условиями:

а) $t=0, y_1=3.4, y_2=3.4.$

б) $t=0.4, y_1=3.4, y_2=1.2.$

По сравнению с основной постановкой задачи имеем $T = [0,1]$, $Y = [0,4] \times [0,4]$, $g(t, y_1, y_2) = \frac{1}{8} + \frac{(1-t_i)^2}{2}$, $f(t, y_1, y_2) = \mu_1 y^1(t) + \mu_2 y^2(t)$, $F(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\mu_1[1 - y_N^1]^2 + \frac{1}{2}\mu_2[1 - y_N^2]^2$.

На рис. 1 и рис. 2 представлено численное решение примера. Разным цветом обозначены области с разным количеством переключений. В зеленом, красном, черном, желтом, синем, розовом полях оптимальная траектория будет иметь соответственно $0,1,2,3,4,5$ скачков. Шаг сетки dt = 0.2; $dy_1 = dy_2 = 0.1$; число узлов 6 x 41 x 41.

а) В результате была получена оптимальная траектория, имеющая координаты (0;3.4;3.4)->(0;2.4;2.4)->(0;1.4;1.4)->(0;0.4;0.4)->(0.2;0.4;0.4)->->(0.2;0;0)->(1;0;0)->(1;1;1). Первые три скачка траектория совершает из точки (0;3.4;3.4) в точку (0;0.4;0.4), которая находится в пассивной области, где скачок делать не нужно. Далее оптимальная траектория попадает в точку (0.2;0.4;0.4) из которой она совершает скачек в точку (0.2;0;0), она также находится в пассивной области. Затем следует точка (1;0;0), из которой совершается заключительный скачок в точку (1;1;1). Следовательно, оптимальная траектория имеет 5 скачков.

б) Аналогично, при заданных начальных условиях, можно определить, что оптимальная траектория будет иметь 4 скачка (0.4;3.4;1.2)->(0.4;2.4;0.2)->(0.4;1.4;0)->(0.4;0.4;0)->(1;0.4;0)->(1;1;1).

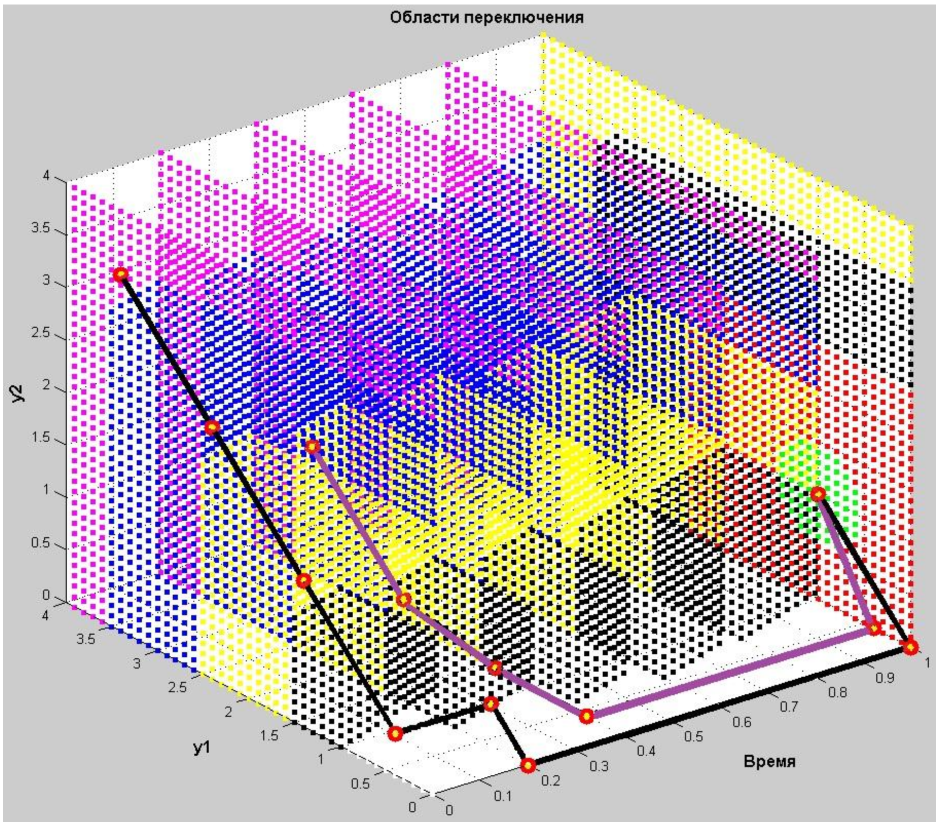

Рис. 1 Решение примера

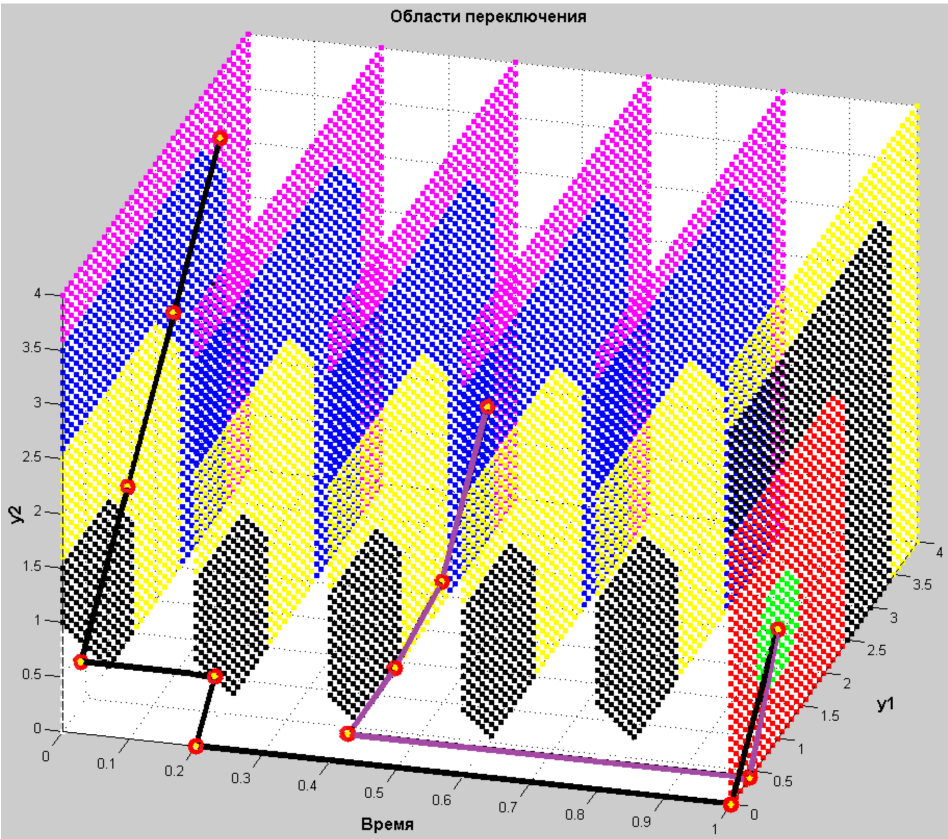

Рис. 2 Решение примера

Заключение

Рассмотрены задачи оптимального управления дискретными САТ, движение которых описывается рекуррентными уравнениями. В отличие от дискретных систем, изменение состояний которых происходит только в фиксированные моменты времени, переключения состояний САТ допускаются в произвольные моменты времени. Разработан алгоритм синтеза дискретной САТ, описываемый рекуррентным включением и заключающийся в построении условных функций цены. Разработан программный комплекс синтеза оптимальной САТ с однократными или мгновенными многократными переключениями. Решен академический пример синтеза двумерной дискретной САТ.

Библиографический список

1. Cassandras C.G., Pepyne D.L., Wardi Y. Optimal Control of a Class of Hybrid Systems // IEEE Trans. Aut. Con. 2001. V.46. №3. P. 398–415.
2. Бортаковский А.С. Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. №6. С.77–92.
3. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А. Интеллектное управление динамическими системами. - М.: Физматлит, 2000. - 352 с.
4. Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems: IFAC Workshop. Irkutsk: Inst. Syst. Dyn. and Control Theory. Sib. Branch RAS, 2003.

5. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами // Труды МАИ, 2007, №27: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34013

6. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез управления активной стабилизацией спутника на основе необходимых условий оптимальности логико-динамических систем // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т.15. №2. С. 28-35.

7. Гурман В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. №4. С.70–75.

8. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973. – 448 с.

9. Бортаковский А.С., Коновалова А.А. Синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. №5. С. 38-70.

10. Бортаковский А.С., Коновалова А.А. Достаточные условия оптимальности дискретных систем автоматного типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. №1. С. 18-44.

11. Кофман А., Анри-Лабордер А. Методы и модели исследования оптимизации. Целочисленное программирование. - М.: Мир, 1976. – 432 с.

12. Малинина Н.Л. Сравнительная эффективность различных способов разработки алгоритмов и программ // Труды МАИ, 2006, №23: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34091