

Плотность спина электромагнитных волн

Р.И. Храпко

Вопреки общепринятому мнению утверждается, что плоская электромагнитная волна круговой поляризации содержит спиновый момент импульса. Рассмотрено поле вращающегося электрического диполя. Использована необычная ковариантная форма электродинамики, представляющая самостоятельный интерес. Выясняется причина того, что тензор спина электродинамики считается равным нулю. Предложено конкретное ненулевое выражение для истинной тензорной плотности спина электромагнитных волн. Продемонстрирована работоспособность этого выражения на примере поглощения волны круговой поляризации.

1. Введение

Общепризнанным является странное утверждение, что плоская электромагнитная волна круговой поляризации не содержит никакого момента импульса. Это утверждение восходит, видимо, к работе Шапочникова [1] (цитировано по [2]). Оно четко сформулировано, например, в [3 - 8].

Следует отметить, однако, что для такой точки зрения имеется определенное психологическое основание: в плоской волне круговой поляризации ничего не крутится, она представляет собой винтовую поверхность, составленную из векторов E или B (вернее, она состоит из элементов такой поверхности) и движется поступательно. Трудно вообразить, что на самом деле такая волна разбита на кванты, каждый из которых несет спиновый момент импульса.

Одновременно такая точка зрения имеет очень серьезное теоретическое обоснование: в современной классической электродинамике отсутствует тензор спина. Тензор энергии-импульса известен, это максвелловский тензор. А тензор спина считается равным нулю (см. ниже).

В соответствии с общепризнанной точкой зрения только луч света круговой поляризации обладает моментом импульса, который называют спином, хотя он, на наш взгляд, имеет явно орбитальный характер. Дело в том, что этот момент импульса рассчитывают по простой формуле, приведенной, например, в [9]:

$$L = \int [r[EH]]dV . \quad (1.8.6)$$

Из этой формулы следует, что весь момент импульса такого луча локализован в районе его боковой границы, там, где электромагнитные поля имеют продольные составляющие, а вектор Пойнтинга, соответственно, имеет составляющую, перпендикулярную направлению распространения луча. Это хорошо показано в монографии [10], с.228.

Однако тут возникает проблема предсказать поведение круглой мишени, на которую падает световой луч круговой поляризации, в том случае, когда мишень разделена на концентрические части. Согласно приведенной формуле, момент импульса будет принимать только внешняя часть мишени, расположенная в районе границы луча. Внутренняя часть мишени, расположенная в зоне однородного поля, не будет принимать момент импульса, если считать, что тензор спина электродинамики равен нулю (но она будет принимать энергию, потому что будет освещена!).

Между тем Р. Фейнман наглядно показывает [11], как при поглощении плоской волны круговой поляризации поглощающая среда получает совместно момент импульса и энергию в соотношении $1/\omega$, пропорционально поглощающей площади.

В связи с этим представляет определенный интерес точно решить задачу о поведении мишени, разделенной на концентрические части, в случае конкретного источника поля, при учете углового распределения момента импульса. С этой целью будет рассмотрено поле вращающегося электрического диполя. Мы применим для этого сферические координаты и необычную ковариантную форму электродинамики, которая удобна в данном случае, но представляет и самостоятельный интерес.

Мы разберем далее, почему тензор спина электродинамики считается равным нулю, предложим конкретное ненулевое выражение для истинной тензорной плотности спина электромагнитных волн и продемонстрируем работоспособность этого выражения на примере поглощения волны круговой поляризации.

2. Ковариантная форма электродинамики

Как известно, половина полей электромагнетизма представляет из себя антисимметричные ковариантные тензоры, иначе, дифференциальные формы или, короче, формы. Например, 2-форма: магнитная индукция B_{ij} . 1-формы: напряженность электрического поля E_i и магнитный векторный потенциал A_i .

Другая половина полей электромагнетизма - это антисимметричные контравариантные плотности веса +1, которые мы будем называть псевдо формами. Например, псевдо 1-форма: напряженность магнитного поля H^i_{\wedge} .. Псевдо 2-формы: электрическая индукция D^i_{\wedge} и плотность электрического тока j^i_{\wedge} . Псевдо 3-форма: плотность электрического заряда ρ_{\wedge} .

Чтобы не использовать готические буквы, мы применяем знак \wedge на уровне нижних (верхних) индексов для обозначения плотности веса +1 (-1). Это обозначение восходит к [12], с.52 и напоминает, что, например, электрическая индукция преобразуется при замене координат согласно

$$D^i_{\wedge} = D^i_{\wedge'} \partial_{i'}^i |\Delta|.$$

Здесь $\partial_{i'}$ - матрица преобразования координат: $\partial_{i'} = \partial x^i / \partial x^{i'}$, а Δ' , дельта со штрихом на уровне верхних индексов, - определитель обратной матрицы, $\Delta' = Det(\partial_{i'})$. Как видно, здесь применяется система меченых индексов, при которой штрих несут индексы, а не коренные буквы.

Уравнения Максвелла используют внешнее дифференцирование:

$$2\partial_{[i}E_{k]} + B_{ik} = 0, \quad \partial_{[j}B_{ik]} = 0, \quad \partial_i D_{\wedge}^i = \rho_{\wedge}, \quad \partial_k H_{\wedge}^{ik} - D_{\wedge}^i = j_{\wedge}^i.$$

Если обозначить $E_k = B_{k0} = -B_{0k}$, $D_{\wedge}^i = -H_{\wedge}^{i0} = H_{\wedge}^{0i}$, $\rho_{\wedge} = j_{\wedge}^0$, то уравнения Максвелла можно придать 4-мерную форму:

$$\partial_{[\alpha}B_{\beta\gamma]} = 0, \quad \partial_{\beta}H_{\wedge}^{\alpha\beta} = j_{\wedge}^{\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3.$$

Поля электромагнетизма попарно *сопряжены* метрическим тензором:

$$E_i = D_{\wedge}^j g_{ij}^{\wedge}, \quad D_{\wedge}^j = E_i g_{\wedge}^{ij}, \quad B_{ik} = H_{\wedge}^{jl} g_{ij}^{\wedge} g_{kl}, \quad H_{\wedge}^{jl} = B_{ik} g_{\wedge}^{ij} g^{kl}.$$

Здесь $g_{\wedge}^i = g_{ij} / \sqrt{g_{\wedge}}$, $g_{\wedge}^{ij} = g^{ij} \sqrt{g_{\wedge}}$ - метрическая тензорная плотность. Таким образом, здесь, поднимая или опуская тензорные индексы, мы изменяем коренную букву. Это вызвано множителем $\sqrt{g_{\wedge}}$.

Все поля могут быть представлены в *дуальном* виде с помощью антисимметричной псевдо плотности ε_{ijk}^{\sim} или ε_{\sim}^{ijk} ($\varepsilon_{123}^{\sim} = \varepsilon_{\sim}^{123} = 1$). Это объясняет название "псевдо формы":

$$\varepsilon_{\sim}^{ijk} E_k = E_{\sim}^{ij}, \quad \varepsilon_{\sim}^{ijk} B_{jk} = B_{\sim}^i, \quad \varepsilon_{ijk}^{\sim} D_{\wedge}^k = D_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ijk}^{\sim} H_{\wedge}^{jk} = H_i^*.$$

Звездочка $*$ обозначает "псевдо" при отсутствии \sim , то есть участие знака якобиана в преобразовании величины. Например:

$$H_i^* \partial_{i'} = H_{i'}^{*'} \cdot \Delta' / |\Delta'|.$$

Знак \sim на уровне нижних (верхних) индексов используется для обозначения псевдо плотности веса +1 (-1). Эти обозначения тоже восходят к [12].

Заметим, что когда дуализируется плотность или поли(ко)вектор, суммирование происходит по последним индексам псевдо плотности ε , а когда дуализируется псевдо величина, суммирование происходит по первым индексам псевдо плотности ε . Такое соглашение обеспечивает инволютивность дуализации, то есть возвращение к исходной величине после двукратной дуализации, и сохранение скалярного произведения при дуализации сомножителей. Компоненты тензорной плотности энергии-импульса записываются так:

$$T_{\wedge}^{ij} = -D^i D_{\wedge}^j - B_{\wedge}^i B_{\wedge}^j + (E_k D_{\wedge}^k + H_k^* B_{\wedge}^k) g^{ij} / 2, \quad T_{\wedge}^{0i} = E_k H_{\wedge}^{ik} = g^{ik} B_{kj} D_{\wedge}^j.$$

3. Поле вращающегося диполя

Мы применим для вычислений сферические координаты, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, с метрикой

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad \sqrt{g_{\wedge}} = r^2 \sin \theta.$$

Нас интересуют энергия и момент импульса, падающие на воображаемую полусферу, опирающуюся на плоскость yz вращения диполя. Элемент поверхности сферы с внешней ориентацией изображается псевдо бивектором $da_*^{ij} = 2d\theta\delta_2^{[i}d\varphi\delta_3^{j]}$ или ковекторной плотностью $da_k^{\wedge} = da_*^{ij}\tilde{\varepsilon}_{ijk}/2$, у которой отлична от нуля только компонента $da_1^{\wedge} = d\theta d\varphi$. Мы будем обозначать двумерную поверхность буквой a , а не S , так же как в [11], поскольку букву S отдадим спине. Энергия, компоненты импульса и момента импульса, приходящиеся на элемент da_k^{\wedge} в единицу времени, то есть сила F и момент силы M , даются выражениями:

$$dP^0 = T_{\wedge}^{0k} da_k^{\wedge}, \quad dF^i = T_{\wedge}^{ik} da_k^{\wedge}, \quad dM^{ij} = 2r^{[i}T_{\wedge}^{j]k} da_k^{\wedge}.$$

Тривектор момента силы относительно оси x или момент силы относительно оси x , являющийся псевдо скаляром, выглядят так:

$$dM_x^{ij} = 6\hat{x}^l r^i T_{\wedge}^{j]k} da_k^{\wedge}, \quad dM_x^* = \hat{x}^l r^i T_{\wedge}^{jk} da_k^{\wedge} \varepsilon_{lij} \sqrt{g_{\wedge}}.$$

Здесь $r^i = r\delta_1^i$ - радиус-вектор, $\hat{x}^l = \{\cos \theta, -\sin \theta \cdot r^{-1}, 0\}$ - единичный вектор, параллельный оси x .

В соответствии с этими выражениями, нас будут интересовать компонента

$T_{\wedge}^{01} = g^{11}(B_{12}D_{\wedge}^2 + B_{13}D_{\wedge}^3)$ для подсчета энергии и компонента $T_{\wedge}^{31} = -D^3D_{\wedge}^1$ для подсчета момента импульса.

При расчете момента импульса нельзя ограничиться волновой частью электромагнитного поля, так как в волновой зоне отличны от нуля средние значения только радиальных компонент T_{\wedge}^{01} и T_{\wedge}^{11} , не дающих вклад в момент импульса. Поэтому мы воспользуемся точным выражением для поля из учебника [13], формула (141.10), учитывая используемую систему единиц:

$$4\pi D^i = 3p^k r_k r^i / r^5 - p^i / r^3 + 3\dot{p}^k r_k r^i / r^4 - \dot{p}^i / r^2 + \ddot{p}^k r_k r^i / r^3 - \ddot{p}^i / r,$$

$$4\pi B_{ik} = 2\dot{p}_{[i}r_{k]} / r^3 + 2\ddot{p}_{[i}r_{k]} / r^2.$$

В качестве дипольного момента p^i мы возьмем единичный вращающийся вектор в комплексной форме, так что $\mathbf{p} = \Re\{0, p^y, p^z\}$. В декартовых координатах его компонентами будут $p^y = e^{i\omega t}$, $p^z = -ie^{i\omega t}$, а в сферических координатах он выглядит

$$p^i = \{\sin \theta, (\cos \theta)/r, -i/(r \sin \theta)\} e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Использование этих формул дает: $D^i =$

$$\{2(1/r^3 + i\omega/r^2)\sin \theta, -(1/r^4 + i\omega/r^3 - \omega^2/r^2)\cos \theta, (i/r^4 - \omega/r^3 - i\omega^2/r^2)/\sin \theta\} e^{i\omega(t-r) - i\varphi} / 4\pi\},$$

$$B_{12} = \cos \theta \cdot (-i\omega / r + \omega^2) e^{i\omega(t-r)-i\varphi} / 4\pi, \quad B_{13} = -\sin \theta \cdot (\omega / r + i\omega^2) e^{i\omega(t-r)-i\varphi} / 4\pi.$$

Далее, вычислим средние по времени значения компонентов $T_{\wedge}^{01}, T_{\wedge}^{31}$ тензорной плотности энергии-импульса по формуле со стр. 151 монографии [14] (черта означает комплексное сопряжение).

$$\begin{aligned} \langle T_{\wedge}^{01} \rangle &= g^{11} \sqrt{g_{\wedge}} \Re(B_{12} \bar{D}^2 + B_{13} \bar{D}^3) / 2 = \omega^4 (\cos^2 \theta + 1) \sin \theta / 32\pi^2, \\ \langle T_{\wedge}^{31} \rangle &= -\sqrt{g_{\wedge}} \Re(D^3 \bar{D}^1) / 2 = r^{-2} \omega^3 \sin \theta / 16\pi^2. \end{aligned}$$

Интегрирование этих выражений по замкнутой сфере дает значения полной энергии и полного момента импульса, прошедших в единицу времени:

$$\begin{aligned} \langle P^0 \rangle &= \int \langle T_{\wedge}^{01} \rangle d\theta d\varphi = \omega^4 \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta + 1) \sin \theta d\theta / 16\pi = \omega^4 / 6\pi, \\ \langle M_x^* \rangle &= \int \hat{x}^2 r^1 \langle T_{\wedge}^{31} \rangle da_{\wedge} \varepsilon_{231} \sqrt{g_{\wedge}} = \omega^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta / 8\pi = \omega^3 / 6\pi. \end{aligned}$$

Значение энергии совпадает (после умножения на 4π) со значением из [14], с. 228, а отношение $\langle P^0 \rangle / \langle M_x^* \rangle = \omega$ равно отношению энергии фотона к спину фотона. Последнее обстоятельство считается доказательством того, что подсчитанный момент импульса является спином излучения.

Однако, согласно этому расчету, момент импульса будет получать главным образом экваториальная часть сферы, расположенная вблизи плоскости вращения диполя и освещаемая светом эллиптической или плоской поляризации. Полярные области, вблизи оси x , интенсивно освещаемые светом поляризации близкой к круговой, будут обеднены моментом импульса. На наш взгляд, это наглядно показывает, что рассчитанный момент импульса является не спиновым, а орбитальным, а полученный результат не исчерпывает действительность. И он вообще имеет не волновое происхождение, ибо $[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$ не обязательно имеет волновую природу.

В действительности полярные области, освещенные светом круговой поляризации, несомненно, будут получать момент импульса в значительном количестве. Это следует хотя бы из приведенного выше рассуждения Фейнмана. Однако для расчета этого момента импульса, по нашему мнению, необходимо ввести тензор спина электромагнитных волн, который в стандартной электродинамике отсутствует. Во всяком случае, максвелловский тензор напряжений не может обеспечить вращение центральной части мишени.

4. Стандартная концепция спина электромагнитного поля

Как хорошо известно, тензоры энергии-импульса и спина выводятся с помощью лагранжевого формализма. В частности, канонический калибровочно инвариантный лагранжиан

$$\Lambda = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4$$

приводит к канонической паре тензоров энергии импульса и спина

$$T_c^{\alpha\gamma} = -\partial^\alpha A_\mu \cdot F^{\gamma\mu} + g^{\alpha\gamma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4, \quad Y_c^{\alpha\gamma\beta} = -2A^{[\alpha} F^{\gamma]\beta}$$

(для краткости мы будем иногда называть тензорные плотности тензорами и не будем писать значок \wedge).

Однако такие тензоры противоречат опыту. Это очевидно ввиду несимметрии тензора энергии-импульса и легко проверяется непосредственно [15, 16]. Дело в том, что свертки этих тензоров с трехмерным элементом гиперповерхности dV_γ должны быть равны наблюдаемым величинам, инфинитезимальному 4-импульсу dP^α и 4-спину $dS^{\alpha\gamma}$:

$$dP^\alpha = T^{\alpha\gamma} dV_\gamma, \quad dS^{\alpha\gamma} = Y^{\alpha\gamma\beta} dV_\beta,$$

а этого нет на самом деле.

Последние выражения можно записать в 3-мерном виде:

$$dF^i = T^{ik} da_k, \quad dM^{ik} = Y^{ikj} da_j.$$

В таком виде они использовались в разделе 3. Отметим, что в настоящей работе мы игнорируем спинорное происхождение спинового момента импульса S и рассматриваем его наравне с обычным (орбитальным) моментом L .

Истинный тензор энергии-импульса, которым является тензор Максвелла-Минковского

$$T^{\alpha\gamma} = -F^{\alpha\mu} F_\mu^\gamma + g^{\alpha\gamma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4,$$

теоретики получают, просто *рукой* добавляя к каноническому тензору энергии-импульса $T_c^{\alpha\gamma}$ *ad*

hoc конструкцию $\tilde{T}_c^{\alpha\gamma}$, которая даже не имеет вида $\partial_\mu \Psi^{\alpha\gamma\mu}$:

$$T^{\alpha\gamma} = T_c^{\alpha\gamma} + \tilde{T}_c^{\alpha\gamma} = T_c^{\alpha\gamma} + A^\alpha j^\gamma + \partial_\beta (A^\alpha F^{\gamma\beta}).$$

Аналогично, простым вычитанием величины $Y_c^{\alpha\gamma\beta}$ из величины $Y_c^{\alpha\gamma\beta}$ теоретики элиминируют тензор спина электродинамики. На наш взгляд, это неудовлетворительно, хотя общепризнанно. Общепризнанность подтверждается формулой (1.8.6) из [9] или, например, цитатой из классической монографии [4]: "Момент количества движения света... можно определить как

$$M = \int [r \cdot S] dV,$$

где S - вектор Пойнтинга".

5. Тензор спина электродинамики.

В действительности, тензор энергии-импульса Максвелла-Минковского получен как обобщение экспериментальных данных. Единственный теоретический способ получения этого тензора заключается в варьировании лагранжиана по метрическому тензору в пространстве Минковского. Но это представляется нам счастливой случайностью, потому что никакого тензора спина, например, нельзя получить аналогичной вариацией по кручению ни для электромагнитного поля, ни для поля, заведомо обладающего спином в пространстве Минковского. Это объясняется тем, что в пространстве Минковского и даже в римановом пространстве тензоры кручения и конторсии тождественно равны нулю, в отличие от метрического тензора.

Ввиду отсутствия экспериментальных данных в отношении тензора спина электродинамики, на данном этапе, по-видимому, следует пользоваться косвенными соображениями для его получения. Определенные соображения (см. Примечания в конце статьи) дают следующее выражение:

$$Y^{\alpha\gamma\beta} = 2A^{[\alpha} \partial^{|\beta|} A^{\gamma]}.$$

Для проверки работоспособности этого выражения мы рассмотрим плоскую плоско поляризованную электромагнитную волну в комплексной форме. В вакууме, в области $x < 0$, называемой далее Left-областью, эта волна состоит из падающей и отраженной частей, а в области $x > 0$, называемой Right-областью, она экспоненциально затухает:

$$\begin{aligned} H_L^{02} = -B_{02}^L &= e^{i(t-x)} - re^{i(t+x)}, & H_R^{02} = -B_{02}^R &= (1-r)e^{i(t-\varsigma x)}, \\ H_L^{12} = B_{12}^L &= e^{i(t-x)} + re^{i(t+x)}, & H_R^{12} = B_{12}^R &= (1-r)e^{i(t-\varsigma x)}, \\ A_2^L = \int B_{02}^L dt = \int B_{12}^L dx &= ie^{i(t-x)} - ire^{i(t+x)}, & A_2^R &= i(1-r)e^{i(t-\varsigma x)}, \end{aligned}$$

r - коэффициент отражения. В R-области мы ввели для краткости комплексное волновое число $\varsigma = k - i\beta$. Так что затухание на самом деле происходит по закону

$$e^{i(t-kx)-\beta x} = e^{i(t-\varsigma x)}.$$

Требование $\partial_0 B_{12}^R + \partial_1 B_{20}^R = 0$ дает $r = (\varsigma - 1)/(\varsigma + 1)$, а желание выполнить закон Ома,

$\partial_0 H_R^{20} + \partial_1 H_R^{21} = j^2 = \sigma H_R^{02}$, приводит к $\varsigma^2 = 1 - i\sigma$, то есть к

$$k^2 - \beta^2 = 1, \quad 2k\beta = \sigma.$$

Полученное здесь решение для плоско поляризованной волны легко интерпретировать, как волну круговой поляризации, что совершенно необходимо для наших целей. Для этого следует изменить традиционное представление колеблющихся векторов в виде действительных частей комплексных векторов. Следует использовать, кроме вещественных частей введенных комплексных тензоров, которые представляют собой y -компоненты, например, $\Re(H_L^{02})$, $\Re(A_2^R)$, также и мнимые части в качестве z -компонентов, например, $H_L^{03} = \Im(H_L^{02})$, $A_3^R = \Im(A_2^R)$. При

такой интерпретации оказывается, что для антисимметризованного произведения справедлива следующая формула (точная, без усреднения по времени):

$$Y^{23\beta} = 2A^{12}\partial^{|\beta|}A^{31} = \Re(A^2)\Im(\partial^\beta A^2) - \Im(A^2)\Re(\partial^\beta A^2) = \Im(\bar{A}^2 \cdot \partial^\beta A^2).$$

По этой формуле для плотности потока спина Y^{231} получим:

$$Y_L^{231} = 1 - |r|^2, \quad Y_R^{231} = (1 - |r|^2)e^{-2\beta x}.$$

Плотность потока энергии, равная компоненте T_0^1 тензора энергии-импульса и представляющая собой скалярное произведение, определяется по другой формуле:

$$T_0^1 = -\Re(H^{12})\Re(B_{02}) - \Im(H^{12})\Im(B_{02}) = -\Re(\bar{H}^{12} \cdot B_{02}).$$

Эта формула дает ${}^L T_0^1 = 1 - |r|^2$, ${}^R T_0^1 = (1 - |r|^2)e^{-2\beta x}$, что находится в согласии с соотношением $1/\omega$ между потоком спина и энергии, с которой мы начали статью, поскольку мы положили $\omega = 1$.

Примечания

Часть настоящей статьи под названием "Угловое распределение момента импульса вращающегося диполя" была направлена в *Известия вузов. Физика* (22.05.00), *ЖЭТФ* (22.05.00), *ТМФ* (29.05.00), *УФН* (31.05.00).

Большая часть настоящей статьи является фрагментом серьезной статьи "Проблемы тензоров энергии-импульса и спина в электромагнетизме", направленной в *УФН* (12.01.00), *Известия вузов. Физика* (16.02.00), *ТМФ* (18.02.00), *ЖЭТФ* (13.04.00).

Часть материала статьи в расширенном виде под названием "Спин и орбитальный момент - это одно и то же?" направлялась в *УФН*(25.02.99), *ЖЭТФ* (25.02.99), *ТМФ* (25.02.99), *Известия вузов. Физика* (15.10.99).

Еще раньше материал настоящей статьи входил в статью "Тензор спина электромагнитного поля", направленную в *Письма в ЖЭТФ* (14.05.98), *ЖЭТФ* (27.01.99), *ТМФ* (29.04.99), *Известия вузов. Физика* (18.05.99).

Все статьи были отклонены с неудовлетворительными по содержанию рецензиями или оставлены без ответа.

Материал настоящей статьи безответно находится в редакции журнала *American Journal of Physics* под названием "Is true energy-momenyum tensor not unique?" с 15.09.99 (#11159) и под названием "Does plane wave not carry a spin?" с 07.10.99 (#11203).

Единственным местом, где материал настоящей статьи был частично опубликован, явился сборник [16]. Правда, с этой публикацией приключилась история, которая, возможно, подтверждает гипотезу Стругацких о том, что Природа восстает против серьезных научных достижений. Эта гипотеза высказана в романе "За миллиард лет до конца света". Так вот, при безукоризненной печати 275-и тезисов в сборнике [16] тезисы доклада Р.И.Храпко "Истинные

тензоры энергии-импульса и спина однозначны" оказались смазанными настолько, что их трудно прочитать.

Список литературы

1. Шапочников К. // An. d. Phys. - 1914, v. 43.- с.473.
2. Вульфсон К. О моменте количества движения электромагнитных волн.// Успехи физических наук. - 1987, т. 152.- с.667-674.
3. Соколов И. Момент импульса электромагнитных волн, эффект Садовского и генерация магнитных полей в плазме.// Успехи физических наук. - 1991, N10.- с.175-190.
4. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. - М.: ИЛ, 1956.- 471 с.
5. Humblet J.// Physica. - 1943, v. 10.- p.585.
6. Ohanian H. What is spin? // Amer. J. Phys. - 1986, v. 54.- p.500.
7. Crichton J. et al. // General Relativity & Gravitation. - 1990, v. 22.- p.61.
8. Simmonds J.W., Guttman M.J. States, Waves and Photons. - Addison-Wesley Reading, MA, 1970.- 475 p.
9. Ахиезер А.И. и Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. - М.:Наука, 1969.- 511 с.
10. Джексон Д. Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.- 567 с.
11. Фейнман Р. и др.. Фейнмановские лекции по физике. Т. 8,9. - М.: Мир, 1978. - 524 с.
12. Схоутен Я. Тензорный анализ для физиков. - М.: Наука, 1965.- 456 с.
13. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. - М.: Наука, 1996.- 320 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973.- 504 с.
15. Р.И. Храпко. Истинный тензор энергии-импульса однозначен. - <http://www.mai.ru> Труды МАИ, вып. 2.
16. Храпко Р.И. Истинные тензоры энергии-импульса и спина среды однозначны.// Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конференция, Владимир. 1999: Тез. докл. - Москва, 1999. - с.47.