

УДК 531.36: 534.1

## **Параметрическое управление с ограничением движениями двухмассового маятника**

**Безгласный С.П.\*, Батина Е.С.\*\*, Пиякина Е.Е\*\*\*.**

*Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика  
С.П. Королева (национальный исследовательский университет), ул. Московское  
шоссе, 34, Самара, 443086, Россия*

*\*e-mail: bezglasnsp@rambler.ru.*

*\*\*e-mail: katja4-2@mail.ru*

*\*\*\*e-mail: snait2009@yandex.ru*

### **Аннотация**

Рассматривается задача о параметрическом управлении плоскими движениями двухмассового маятника (качелями). Предложен новый закон управления раскачкой и успокоением качелей при предположениях об ограничениях на перемещения подвижной массы и о гладкости закона управления. Управляющим параметром является непрерывно изменяющаяся и зависящая от фазового состояния длина участка стержня от точки подвеса маятника до подвижной массы. Построены функции Ляпунова, доказывающие асимптотическую устойчивость и неустойчивость нижнего положения маятника в случаях его успокоения и раскачки соответственно.

**Ключевые слова:** двухмассовый маятник, ограниченное управление, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость

## Введение

Изучение движений математического маятника обнаруживает много качественных свойств динамики нелинейной системы и вызывает самостоятельный интерес у современных исследователей. Кроме того, очень часто в задачах механики плоские движения исследуемых систем и объектов при различных упрощениях моделируют математическим маятником. Так, например, в работе [1] получены бифуркационные диаграммы равновесий, исследованы резонансы и показано наличие стохастической паутины вблизи равновесий в задаче о колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании при больших частотах вибраций и малых амплитудах колебаний длины маятника и точки его подвеса. В [2] при помощи КАМ-теории в близком к резонансному случаю проведен анализ периодических и условно-периодических движений системы в задаче о движении двух одинаковых маятников, связанных линейной упругой пружиной, в окрестности их устойчивого вертикального положения равновесия. В работе [3] с помощью метода предельных функций и предельных систем [4] решена задача о стабилизации релейным управлением программных движений маятника в переменном поле силы тяжести при наличии неучтенных воздействий.

Одной из классических задач механики о маятниковых движениях является задача об управлении качелями. Рассматривают две основные модели качелей – одномассовый и двухмассовый маятники. Для одномассовой модели

в виде математического маятника переменной длины авторами в ряде работ, например [5–10], исследовались вопросы устойчивости и неустойчивости верхнего и нижнего положений, влияния сил (сухого, вязкого трений и аэродинамического сопротивления), выбора оптимальных режимов раскачки, гашения колебаний и возникновения резонансов. Двухмассовая модель качелей использована в работах [11–13]. В [11] методами усреднения [14] и принципа максимума [15] решены задачи управления и оптимизации для случаев малых колебаний и быстрых вращений путем регулируемой по скорости длиной маятника. В работе [12] решены задачи об оптимальной раскачке и оптимальном торможении качелей релейным и «релейно-непрерывным» управлением длиной подвеса подвижной массы для случаев движения без трения и с наличием разных видов трения. В работе [13] решены задачи о диаметральной переориентации и гравитационной стабилизации плоских движений спутника на круговой орбите с помощью подвижной массы по принципу качелей.

В большинстве указанных выше работ задачи об управлении качелями решались с помощью скачкообразного (релейного) изменения величины перемещения подвижной массы. В силу инертности масс на практике реализация релейного изменения длины представляется затруднительной. Авторами работ [16, 13] предложен непрерывный закон движения подвижной массы, позволяющий раскачивать и тормозить качели. В [16] исследованы управляемые движения в окрестностях нижнего и верхнего положений

равновесия качелей и оценены зоны застоя, возникающие при влиянии сил вязкого трения. Но управляющий закон, предложенный в этих работах, предполагает неограниченность расстояния от точки подвеса до подвижной массы в обе стороны, в частности, в [16] авторами приведен численный пример, в котором теоретически считается, что стержень продлен вверх за точку подвеса маятника с предоставленной возможностью движения по нему подвижной массы, что является нецелесообразным и крайне затруднительным с точки зрения практической реализации. В работе [17] был предложен новый закон управлением подвижной массой по принципу качелей, который предполагает ограниченность относительного перемещения этой массы вдоль стержня. Но он имеет точки излома, значит, как и для релейного закона управления, при его реализации будет возникать эффект биения вследствие скачкообразного изменения скорости движения управляемой массы.

В данной работе предложен закон управления движениями для двухмассовой модели качелей посредством непрерывного изменения длины подвеса маятника при условии, что перемещения подвижной массы ограничены с двух сторон, непрерывны и имеют непрерывную производную. Ограниченность и гладкость закона управления позволяют на основе классической теории устойчивости аналитически доказать асимптотическую устойчивость и неустойчивость различных движений качелей и предоставляют более удобные возможности для его практической реализации.

## 1 Постановка задачи

Рассмотрим в поле силы тяжести плоские движения закрепленного в неподвижной точке  $O$  невесомого стержня с двумя точечными массами – двухмассового маятника (рис. 1).

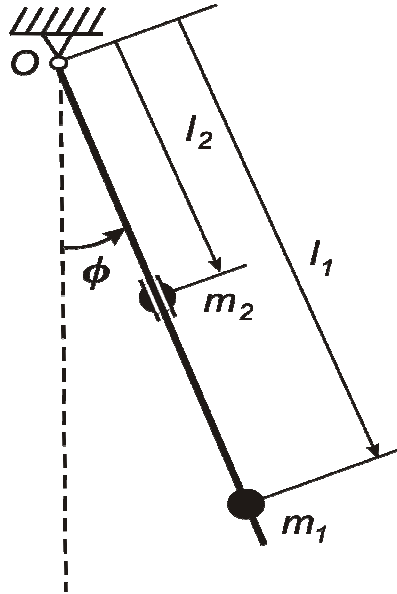


Рис. 1. Двухмассовый маятник.

Пусть  $l_1$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до неподвижно закрепленной на стержне массы  $m_1$ , а материальная точка  $m_2$  может перемещаться вдоль стержня.

Угол отклонения маятника от вертикали обозначим через  $\varphi$ . Как и в [16], управлением будет расстояние от точки подвеса  $O$  до подвижной массы  $m_2$ , являющееся непрерывной функцией вектора фазового состояния:

$$l_2 = l_2(\varphi, \dot{\varphi}) \tag{1.1}$$

где точка обозначает производную по времени.

Кинетическая и потенциальная энергии маятника имеют вид

$$T = \frac{m_2}{2} (\dot{l}_2^2 + l_2^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = -m_2 g l_2 \cos \varphi - m_1 g l_1 \cos \varphi.$$

Запишем уравнение движения маятника в виде уравнения Лагранжа второго рода

$$(m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2) \ddot{\varphi} + 2m_2 l_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi} + (m_2 l_2 + m_1 l_1) g \sin \varphi = 0 \quad (1.2)$$

где  $g$  – ускорение сил тяготения.

Поставим и решим задачи об управлении плоскими движениями двухмассового маятника – построить непрерывные законы (с непрерывной производной) управления движением подвижной массы  $m_2$  при двусторонних ограничениях на перемещения этой массы, реализующие раскачку и асимптотическое успокоение колебаний соответственно в окрестности нижнего положения равновесия.

## 2 Закон управления для асимптотического успокоения качелей

Решение задачи об асимптотическом успокоении колебаний двухмассового маятника относительно его нижнего положения равновесия  $\varphi = \dot{\varphi} = 0$  управлением (1.1) получим на основе второго метода классической теории устойчивости. Выберем управляющий закон в виде:

$$l_2 = \begin{cases} l_0 + A \sin \dot{\varphi} \sin \varphi, & \text{при } \dot{\varphi} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \\ l_0 + A \cdot \sin \varphi \cdot \text{sign} \dot{\varphi}, & \text{при } \dot{\varphi} \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; +\infty). \end{cases} \quad (2.1)$$

где величина  $l_0 = \text{const} > 0$  задает некоторое начальное положение подвижной массы  $m_2$ , относительно которого будут происходить ее движения вдоль стержня. Число  $0 < A = \text{const} < l_0$  является нормирующим множителем, ограничивающим амплитуду движения массы  $m_2$ . При выборе управления (2.1) движение подвижной массы вдоль стержня происходят аналогично движениям центра масс человека на качелях, останавливающего колебания качелей с помощью периодических приседаний. А именно, при движении качелей вниз человек сначала приседает, а потом встает, поднимая свой центр масс. При движении качелей вниз – наоборот.

Производную для величины  $l_2$  определим равенствами:

$$\dot{l}_2 = \begin{cases} \dot{\varphi} A \cos \varphi \sin \dot{\varphi} + A \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \dot{\varphi}, & \text{при } \dot{\varphi} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \\ A \dot{\varphi} \cos \varphi \text{sign} \dot{\varphi}, & \text{при } \dot{\varphi} \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; +\infty). \end{cases} \quad (2.2)$$

С учетом предложенного закона (2.1) для величины  $l_2$  и ее производной (2.2) уравнение движения маятника (1.2) равносильно системе:

$$\left[ \begin{array}{l} (l_1^2 m_1 + m_2(l_0 + A \sin \varphi \sin \dot{\varphi})^2 + 2m_2(l_0 + A \sin \varphi \sin \dot{\varphi}) A \sin \varphi \cos \dot{\varphi} \cdot \\ \cdot \dot{\varphi}) \ddot{\varphi} = -2m_2(l_0 + A \sin \varphi \sin \dot{\varphi}) \dot{\varphi}^2 A \cos \varphi \sin \dot{\varphi} - (l_1 m_1 + (l_0 + A \sin \varphi \sin \dot{\varphi}) \cdot \\ \cdot m_2) g \sin \varphi, \\ \\ \dot{\varphi} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \\ (m_2(l_0 + A \sin \varphi \operatorname{sign} \dot{\varphi})^2 + m_1 l_1^2) \ddot{\varphi} = -2m_2(l_0 + A \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{sign} \dot{\varphi}) A \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \cdot \\ \cdot \operatorname{sign} \dot{\varphi} - (m_2(l_0 + A \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{sign} \dot{\varphi}) + m_1 l_1) g \sin \varphi, \\ \\ \dot{\varphi} \in \left(-\infty; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Уравнения возмущенного движения системы в окрестности исследуемого нулевого положения равновесия имеют вид

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{2m_2(l_0 + A \sin x \sin \dot{x}) \dot{x}^2 A \cos x \sin \dot{x} + (l_1 m_1 + (l_0 + A \sin x \sin \dot{x}) m_2) g \sin x}{l_1^2 m_1 + m_2(l_0 + A \sin x \sin \dot{x})^2 + 2m_2 \dot{x} (l_0 + A \sin x \sin \dot{x}) A \sin x \cdot \cos \dot{x}}; \\ \\ \dot{x} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{2m_2(l_0 + A \sin x \cdot \operatorname{sign} \dot{x}) A \dot{x}^2 \cos x \cdot \operatorname{sign} \dot{x} + (m_2(l_0 + A \sin x \cdot \operatorname{sign} \dot{x}) + m_1 l_1) g \sin x}{m_2(l_0 + A \cdot \sin x \cdot \operatorname{sign} \dot{x})^2 + m_1 l_1^2}; \\ \\ \dot{x} \in \left(-\infty; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

где  $x = \varphi$  – отклонение угла маятника от нижней точки покоя.

Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.4) рассмотрим функцию Ляпунова  $V = V(x, \dot{x})$ :

$$\begin{aligned} V &= \frac{m_2 l_0 (l_0 + 3A \dot{x} \sin x) + m_1 l_1^2}{2} \dot{x}^2 + \left( m_2 \left[ l_0 + \frac{A}{2} \dot{x} \sin x \right] + m_1 l_1 \right) g (1 - \cos x) \approx \\ &\approx \frac{m_2 l_0^2 + m_1 l_1^2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2 l_0 + m_1 l_1}{2} g x^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$



Эта функция  $V(x, \dot{x})$  в окрестности нижнего положения равновесия  $x = \dot{x} = 0$  является положительно определенной и допускает бесконечно малый высший предел по переменным  $x, \dot{x}$ . Производная этой функции по времени в силу системы (2.4) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости имеет вид:

$$\dot{V} \approx -\frac{Ag^2 l_1 m_1 m_2 + Ag^2 l_0 m_2^2}{4(l_1^2 m_1 + l_0^2 m_2)} x^4 - \frac{(2Agl_0 l_1 m_1 m_2 + Agl_1^2 m_1 m_2 + 3Agl_0^2 m_2^2)}{4(l_1^2 m_1 + l_0^2 m_2)} x^2 \dot{x}^2 - \frac{1}{2} Al_0 m_2 \dot{x}^4$$

Таким образом, положительно определенной функции (2.5) отвечает отрицательно определенная производная, поэтому на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [18] нижнее положение  $x = \dot{x} = 0$  маятника является асимптотически устойчивым.

Для сколь угодно больших значений отклонения  $x(t_0)$  и скорости  $\dot{x}(t_0)$  в силу анализа энергии маятника, проведенного в [6] для похожего (ступенчатого) закона управления, имеем убывание полной энергии маятника по геометрической прогрессии, что приводит к асимптотическому уменьшению текущих значений скорости  $\dot{x}(t_0)$  и отклонения  $x(t_0)$ . В частности, если в силу выбора начальных условий маятник совершает вращательные движения, то при перемещениях подвижной массы вдоль стержня согласно закону (2.1) с течением времени происходит переход от вращения к колебаниям с последующим затуханием амплитуды колебаний до значений из сколь угодно малой окрестности одной из

точек  $x = 2\pi k$ ,  $\dot{x} = 0$ , где  $k \in Z$  – целое число. Так как все точки множества  $x = 2\pi k$ ,  $\dot{x} = 0$  физически соответствуют одному и тому же нижнему положению равновесия маятника, то управление (2.1) является стабилизирующим это положение равновесия для любых начальных отклонений. При этом точка  $x = \dot{x} = 0$  системы уравнений (2.4) строго говоря не является асимптотически устойчивой в целом.

Проведенные численные расчеты подтверждают сделанные выводы об асимптотической устойчивости нижнего равновесия и демонстрируют асимптотическое затухание амплитуды колебаний не только в малой окрестности, но и при произвольно больших начальных отклонениях. На рисунке 2 изображен график зависимости угла  $x$  от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения при следующих значениях параметров системы:  $m_1 = m_2 = 1$  кг,  $l_0 = 5$  м,  $l_1 = 12$  м,  $A = 1$  м·с,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup> и начальных данных:  $x(t_0) = 2,2$  рад,  $\dot{x}(t_0) = 0$  рад/с. Интегрирование проведено на временном промежутке  $t \in [0, 280]$  с.

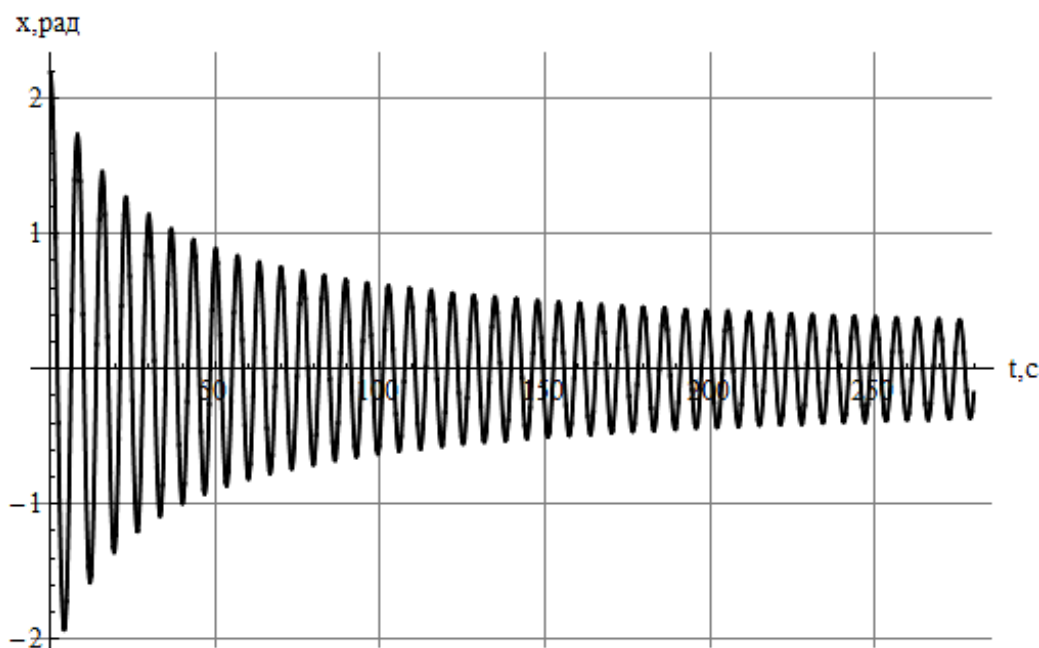


Рис. 2. Зависимость угла  $x$  от времени

На рис. 3 изображен фазовый портрет решения уравнения (2.4) с управлением (2.1). Фазовая траектория отображает затухание амплитуды и скорости колебаний маятника вокруг нулевого положения равновесия, начинающихся с достаточно больших значений  $x(t_0) = 2,2 \text{ рад}$  начальных отклонений. Графики, представленные на рисунках 2 и 3, иллюстрируют очень медленную сходимость решений к нулевому положению равновесия после значений  $x = 0,3 \text{ рад}$ , что позволяет сделать вывод о слабой эффективности предложенных управлений при малых углах отклонений. Тем не менее, численное интегрирование, проведенное на больших интервалах времени, подтверждает асимптотическую сходимость решений и отсутствие ненулевых предельных циклов.

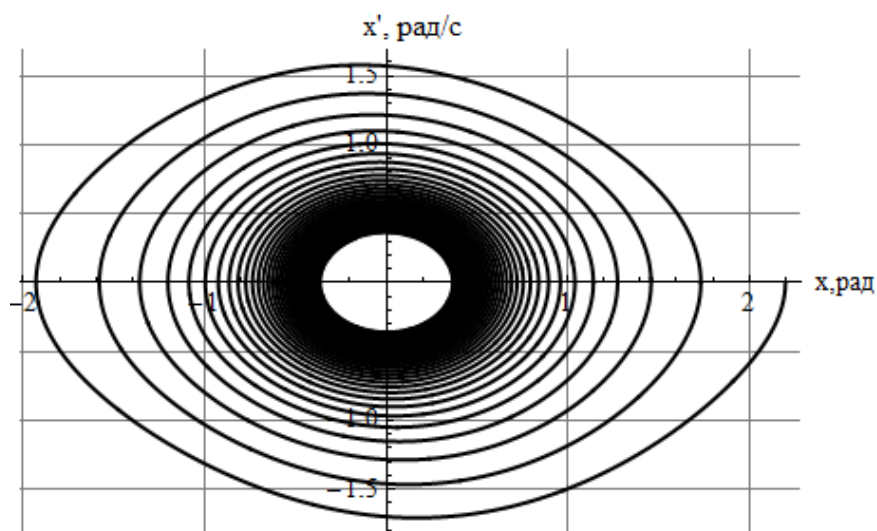


Рис. 3. Фазовый портрет

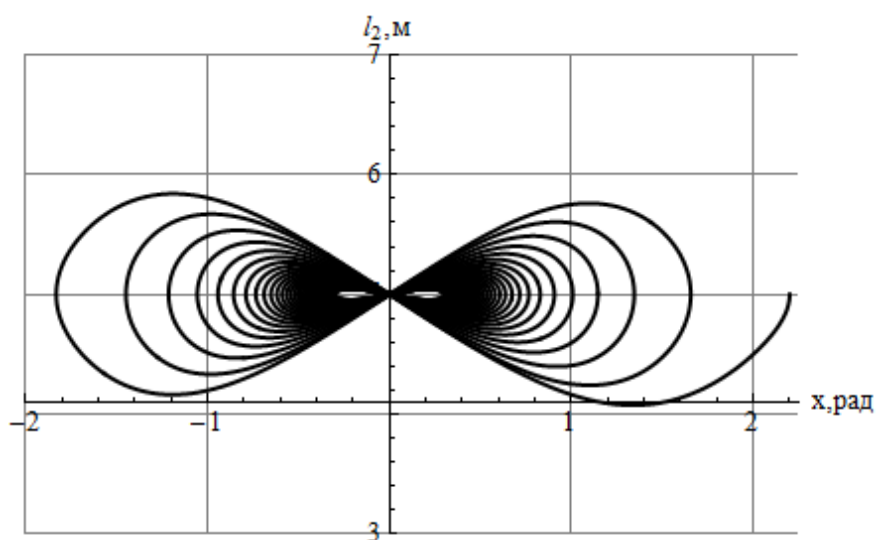


Рис. 4. Зависимость длины подвеса подвижной точки от угла отклонения.

Рис. 4 демонстрирует поведение величины  $l_2$  в окрестности величины  $l_0$ , и из него видно, что перемещения подвижной массы вдоль стержня ограничены и происходят в пределах плюс минус одного метра около значения  $l_0 = 5$  м.

### 3 Раскачка качелей

Применим аналогичный подход к решению задачи о раскачке качелей из произвольной окрестности нижнего положения равновесия. Как отмечалось в [11], при нулевых начальных значениях  $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$  система (1.2) является неуправляемой для всех  $t_0 \leq t < \infty$  при любом законе управления вида  $l_2 = l_2(\varphi, \dot{\varphi})$ . Однако если выбором этого закона добиться, чтобы положение  $x = \dot{x} = 0$  системы было неустойчивым по Ляпунову, то действующие на систему внешние возмущения выведут ее из положения равновесия, и станет возможным эффективный процесс управления – раскачка.

Выбрав закон управления в виде

$$l_2 = \begin{cases} l_0 - A \sin \dot{\varphi} \sin \varphi, & \text{при } \dot{\varphi} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \\ l_0 - A \sin \varphi \cdot \text{sign} \dot{\varphi}, & \text{при } \dot{\varphi} \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; +\infty). \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\dot{l}_2 = \begin{cases} -\dot{\varphi} A \cos \varphi \sin \dot{\varphi} - A \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \dot{\varphi}, & \text{при } \dot{\varphi} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \\ -A \dot{\varphi} \cos \varphi \text{sign} \dot{\varphi}, & \text{при } \dot{\varphi} \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; +\infty). \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $l_0 = \text{const} > 0$ ,  $0 < A = \text{const} < l_0$ , получим для отклонения  $x = \varphi$  уравнения возмущенного движения системы в окрестности исследуемого нулевого решения

$$\left[ \begin{cases} \ddot{x} = \frac{2m_2(l_0 - A \sin x \sin \dot{x}) \dot{x}^2 A \cos x \sin \dot{x} - (l_1 m_1 + (l_0 - A \sin x \sin \dot{x}) m_2) g \sin x}{l_1^2 m_1 + m_2 (l_0 - A \sin x \sin \dot{x})^2 - 2m_2 \dot{x} (l_0 - A \sin x \sin \dot{x}) A \sin x \cos x}; \\ \dot{x} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \ddot{x} = \frac{2m_2(l_0 - A \sin x \cdot \text{sign} \dot{x}) A \dot{x}^2 \cos x \cdot \text{sign} \dot{x} - (m_2(l_0 - A \sin x \cdot \text{sign} \dot{x}) + m_1 l_1) g \sin x}{m_2 (l_0 - A \sin x \cdot \text{sign} \dot{x})^2 + m_1 l_1^2}; \\ \dot{x} \in \left(-\infty; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Возьмем положительно определенную в окрестности нижнего положения равновесия  $x = \dot{x} = 0$  функцию Ляпунова

$$\begin{aligned} V &= \frac{m_2 l_0 (l_0 - 3A \dot{x} \sin x) + m_1 l_1^2}{2} \dot{x}^2 + \left( m_2 \left[ l_0 - \frac{A}{2} \dot{x} \sin x \right] + m_1 l_1 \right) g (1 - \cos x) \approx \\ &\approx \frac{m_2 l_0^2 + m_1 l_1^2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2 l_0 + m_1 l_1}{2} g x^2 + \dots \end{aligned}$$

Ее полная производная по времени в силу уравнений (3.3) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости включительно по переменным  $x$ ,  $\dot{x}$  имеет вид

$$\dot{V} \approx \frac{A g^2 l_1 m_1 m_2 + A g^2 l_0 m_2^2}{4(l_1^2 m_1 + l_0^2 m_2)} x^4 + \frac{(2A g l_0 l_1 m_1 m_2 + A g l_1^2 m_1 m_2 + 3A g l_0^2 m_2^2)}{4(l_1^2 m_1 + l_0^2 m_2)} x^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} A l_0 m_2 \dot{x}^4$$

и является положительно определенной функцией. На основании первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [18] нижнее положение  $x = \dot{x} = 0$  маятника неустойчиво.

На рис. 5 изображен график зависимости угла  $x$  от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения при следующих значениях параметров системы:  $m_1 = m_2 = 1$  кг,  $l_1 = l_0 = 12$  м,  $A = 1,5$  м·с,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup> и начальных данных:  $x(t_0) = 0,4$  рад,  $\dot{x}(t_0) = 0$  рад/с. Интегрирование проведено на временном промежутке  $t \in [0, 215]$  с.

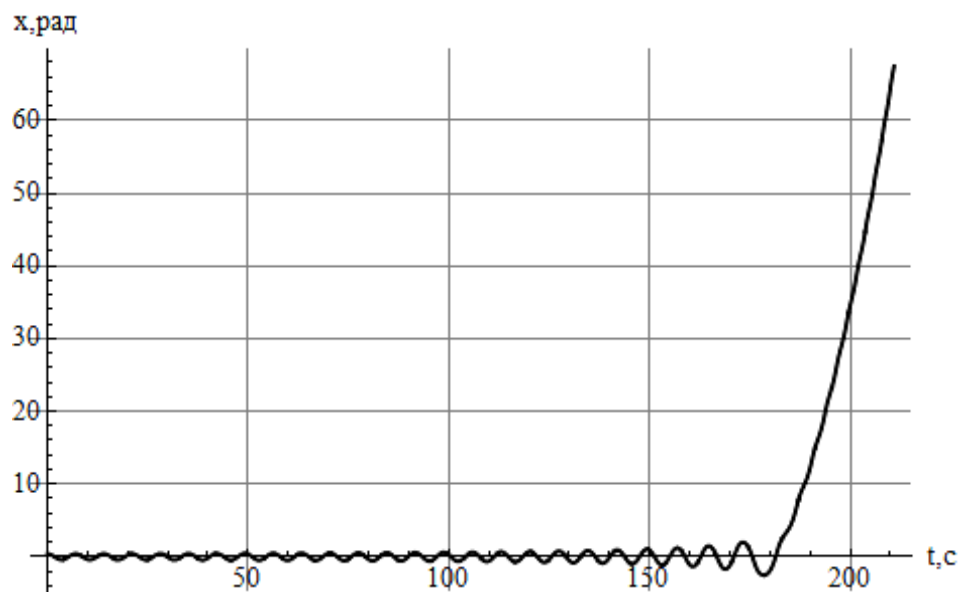


Рис. 5. Зависимость угла  $x$  от времени

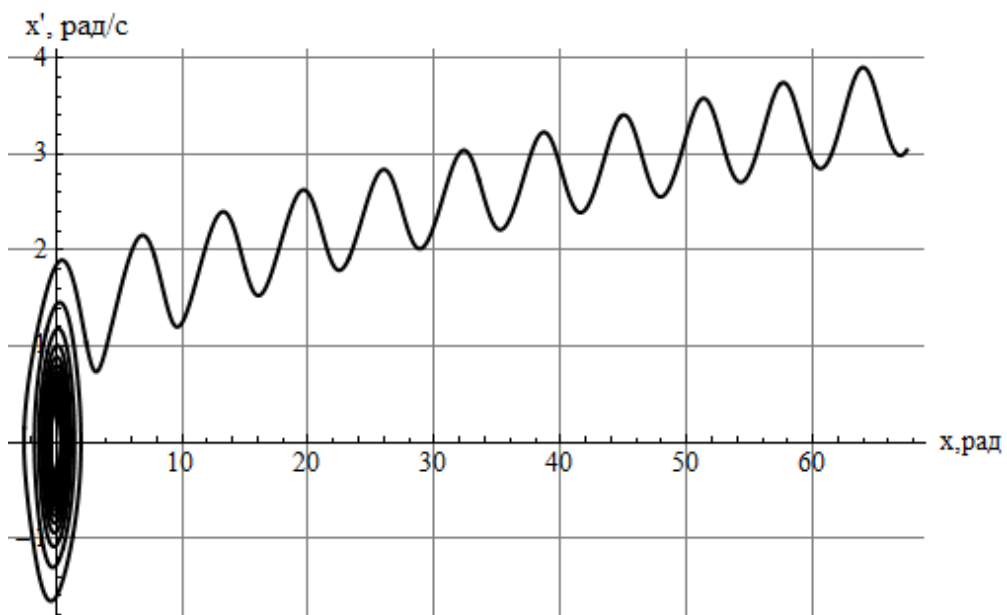


Рис. 6 . Фазовый портрет

На рис. 6 изображен соответствующий фазовый портрет. Фазовая траектория отображает нарастание амплитуды и скорости колебания двухмассового маятника и переход от колебаний к вращательному движению. Рис. 7 демонстрирует поведение величины  $l_2$ , которая, несмотря на нарастание отклонений и скоростей, остается ограниченной в пределах плюс минус полтора метров около значения  $l_0 = 12$  м.

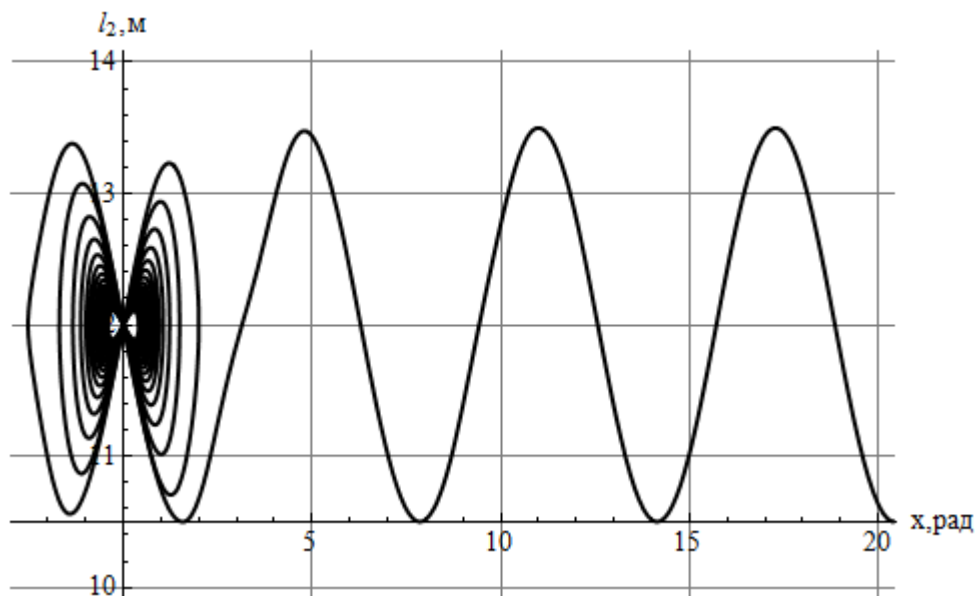


Рис. 7. Зависимость длины подвеса подвижной точки от угла отклонения.

#### 4 Заключение.

В работе для задачи параметрического управления плоскими движениями двухмассового маятника (качелей) предложены законы ограниченного гладкого управления его раскачкой и асимптотическим успокоением путем непрерывного изменения длины подвеса маятника, зависящей от фазового состояния. Для предложенных законов управления методом функций Ляпунова доказана асимптотическая устойчивость и неустойчивость соответственно разных движений. Теоретические результаты подтверждены и проиллюстрированы численными



расчетами. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании управляемых маятниковых движений различных механических систем.

### **Библиографический список**

1. Красильников П.С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // ПММ. 2012. Т. 76, вып. 1. С. 36–51.
2. Маркеев А.П. Нелинейные колебания симпатических маятников // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 3. С. 605–622.
3. Андреев А.С. Метод функций Ляпунова в задачах управления // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 4. С. 64–73.
4. Андреев А.С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т.60. Вып. 3. С. 388–396.
5. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». - Алма-Ата : Наука, 1981. 253 с.
6. Magnus K. Schwingungen. Stuttgart: B.G. Teubner, 1976. = Магнус К. Колебания. М. : Мир, 1982. 304 с.
7. Чечурин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л. : Изд-во ЛГУ, 1983. 219 с.
8. Сейранян А.П. Качели. Параметрический резонанс // ПММ. 2004. – Т. 68. Вып. 5. С. 847–856.
9. Зевин А.А., Филоненко Л.А. Качественное исследование колебаний маятника с периодически меняющейся длиной и математическая модель качелей // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 6. С. 989–1003.
10. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Устойчивость равновесия маятника переменной длины // ПММ. 2009. Т.73. Вып. 6. С. 893–901.
11. Акуленко Л.Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // ПММ. 1993. Т.57. Вып. 2. С. 82–91.

12. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием качелей // ПММ.1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92–101.
13. Асланов В.С., Безгласный С.П. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 565–575.
14. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М. : Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
15. Математическая теория оптимальных процессов. / Л.С. Понтрягин [и др.]. М. : Наука, 1969. 384 с.
16. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 32–46.
17. Безгласный С.П., Пиякина Е.Е., Талипова А.А. Ограниченное управление двухмассовым маятником // Автоматизация процессов управления. 2013. Т. 34. № 4.
18. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 530 с.