УДК-517.977

# Определение относительной значимости экономичности и безопасности воздушного движения с помощью обратной задачи линейного программирования

**Тин Пхон Чжо**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*e-mail: thethtweaung@gmail.com*

**Аннотация**

Решается задача определения весовых коэффициентов параметрического критерия оптимальности в линейной форме, когда известны ограничения в виде линейных равенств и примеры выбора лучших решений прямой задачи линейного программирования найдена процедура определения координат ближайших вершин и формирования матрицы данных без использования строк целевой функции, что определяет основу предложенного обратного симплекс-метода.

**Ключевые слова**: безопасность полета, линейное программирование, обратная задача параметрической оптимизации.

## Введение

В данной работе посвящены решению обратной задачи линейного программирования с целью установления весовых коэффициентов значимости экономичности и безопасности движения судов в эшелоне захода на посадку. Задача обеспечения максимальной безопасности и экономичности захода самолетов на посадку требует в общем виде знания критерия оптимальности в аналитической форме, чтобы принимать нужные решения о следовании в эшелоне одного самолета за другим на определенной дистанции, не тратив при этом лишнее топливо на маневрирование.

Однако, как это бывает и в других задачах, диспетчер знает, ***как надо действовать*** в конкретном случае, но математическая модель критерия ему ***неизвестна***. В одной ситуации он принимает альтернативные решения на сокращение, либо увеличение дистанции между самолетами за счет бокового маневра или увеличения тяги, в других случаях при возрастании риска воздушного движения, диспетчер отказывается от вхождения одного из самолетов в эшелон и дает команду его ухода на повторный круг. Поэтому возникает целесообразность воссоздания критерия по отдельным примерам оптимального поведения, чтобы затем его использовать в общем случае.

**Постановка Задачи**

В ряде важных технических задач бывает так, что на параметры, определяющие эффективность системы, наложены известные ограничения, которые в первом приближении могут быть представлены в виде линейных неравенств, но сам критерий лицу, принимающему решение (ЛПР), неизвестен. Если этот критерий также представить в виде линейной свертки от параметров $X_i$ назовем их в дальнейшем переменными

$$Z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \tag{1}$$

Сами переменные по характеру своего поведения не отрицательны, а выбираемые ЛПР решения альтернативны, то процесс выбора наиболее рационального решения можно трактовать как нахождение одной из вершин выпуклого многогранника, показанного на рис.1, что можно было быть сделать с помощью известной прямой задачи линейного программирования. Рис.1. иллюстрирует решение следующей частной задачи (пример.1.)

$$
\begin{aligned}
&Z = C_1X_1 + C_2X_2 \to \max \\
&X_1 + 2X_2 \le 8 \\
&X_2 - X_1 \le 1 \\
&X_2 \le 2 \\
&4X_1 + 3X_2 \le 24 \\
&X_1 \ge 0; X_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

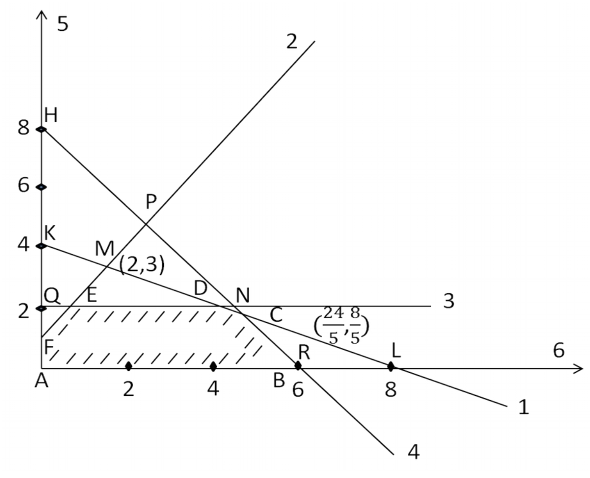


Рис.1. Выпуклый многогранник для примера решения задачи с двумя переменными

Однако для тех ситуаций, когда весовые коэффициенты $C_i$ не заданы, но известны результаты рационального поведения ЛПР в виде указанных им ответов(или вершин), можно попытаться решить обратную задачу линейного программирования –

задана группа линейных неравенств в виде ограничений на множество переменных $X_i : i = 1.......n$;

- известна принятая за лучшее решение вершина многогранника с координатами

$$X_i(0)\,; i = 1....n$$

- в качестве параметрического критерия оптимальности принята линейная модель (1);

- требуется по возможности более точно идентифицировать коэффициенты критерия $C_i$.

**Процедура определения координат ближайших вершин при заданном оптимальном решении прямой задачи**

Прежде чем приступить к необходимым рассуждением, немного упростим талб.4, убрав неизвестную пока строку целевой функции и обозначив нулевые переменные $S_1$ и $S_3$ в вершине D через специальные координаты $y_1$ и $y_2$. Тогда получив матрицу II, показанную в виде табл.5, проведем следующие рассуждения.

Табл.1. Матрица II для нахождения соседних вершин

| | $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $S_2$ | $Y_2$ | $S_4$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 3 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | -2 | 0 | 4 |
| $S_4$ | 0 | 0 | -4 | 0 | 5 | 1 | 2 |

Сравним таблицы 3 и 4, относящихся к соседним вершинам E и D. Видно, что для перехода из вершины E к вершин D одна из нулевых переменных $S_2$ определяла ведущий столбец, (чтобы указать направление движения по контуру многогранника), с помощью которого находилась ведущая строка по известному правилу прямого симплекс-метода, и затем эта переменная исключалась из нулевых, в которые попадала переменная $S_1$. Тем самым определялась соседняя вершина D на пересечении прямых линий 1 и 3, что соответствует вновь полученным нулевым переменным $S_1$ и $S_3$.

Таким образом, замена одной из нулевых переменных на новую описанным способом обеспечивает попадание в ближайшую вершину. Значит, если взять в матрице II любую из переменных $y_i$, то можно найти один из ведущих столбцов, а затем и ведущую строку и координаты соседней вершины. Покажем это.

Возьмем столбец 4 для $y_1$ и представим его ведущим. Для него ведущей является строка 2, т.к у нее неотрицательное отношение $3/1$ минимально. Тогда вместо $S_2$ ненулевой переменной станет $y_1$, а после пересчета матрицы II получим табл.6, в которой в правом столбце возникнут нужные координаты соседней вершины $E(X_1 = 1, X_2 = 2)$ на прямой линии 3, показанной на рис.1.

Талб.2. Полученные данные для соседней вершины $E(X_1 = 1, X_2 = 2)$

| | $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $S_2$ | $Y_2$ | $S_4$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 3 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $S_4$ | 0 | 0 | 0 | 4 | -7 | 1 | 14 |

Теперь повторим те же действия с матрицей II, взяв в качестве ведущего другой столбец $y_2$ – для которого ведущей является строка 5 с минимальным неотрицательным отношением $2/5$. После соответствующего пересчета ведущей строки и других строк по известным правилам прямого симплекс-метода получим таблицу 7, в которой в правом столбце возникнут нужные координаты другой соседней вершины $C(X_1 = 4,4, X_2 = 1,6)$.

Табл.3. Полученные данные для соседней вершины $C(X_1 = 4,4, X_2 = 1,6)$

| | $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $S_2$ | $Y_2$ | $S_4$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_2$ | 0 | 0 | $-\frac{7}{5}$ | 1 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{21}{5}$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{8}{5}$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | $-\frac{3}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{42}{5}$ |
| $Y_2$ | 0 | 0 | $-\frac{4}{5}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

Показанный расчет позволяет сформулировать общую группу правил определения координат соседних вершин:

- сформировать матрицу II без строки целевой функции, обозначив нулевые переменные для указанной оптимальной вершины через $y_i (i = 1.....n)$.

- с помощью каждой переменной $y_i$ поочередно определить ведущий столбец, затем для него известным симплекс-методом- ведущую строку, с помощью которой пересчитать все строки матрицы II и получить n таблиц с указанными в правом столбце координатами $X_i(l)$ $(l=1....n)$ соседних вершин.

Полученный в примере ответ открывает путь составления группы неравенств (3), уточняющих возможные интервалы искомых коэффициентов $C_1$ и $C_2$ критерия эффективности

$$C_i X_1(0)+C_2 X_2(0) \rangle C_i X_1(1)+C_2 X_2(1)$$

$$C_i X_1(0)+C_2 X_2(0) \rangle C_i X_1(2)+C_2 X_2(2)$$

Оптимальная вершина D имеет координаты - $X_1(0)=4$ ; $X_2(0)=2$; вершина E - координаты $X_1(1)=1$; $X_2(1)=2$; вершина C координаты $X_1(2)=4,4$; $X_2(2)=1,6$. Тогда получим,

$$C_1.4+C_2.2 \rangle C_1.1+C_2.2 \text{ или } 3C_1 \rangle 0$$

$$C_1.4+2C_2 \rangle C_1.4,4+1,6C_2 \quad \text{или} \quad 0,4C_1 \langle 0,4C_2$$

$$\text{что означает} \quad 0 \langle C_1 \langle C_2 \qquad (3)$$

Поэтому, если принять $C_2=1$, условие (4) позволяет для коэффициента $C_1$ взять любое положительное число, меньшее единицы, например в середине интервала $C_1=0,5$. Непосредственные повторные расчеты прямой задачи показывают, что полученный ответ, как и прежде, соответствует вершине D, что обнадеживает, хотя при не отрицательности весовых коэффициентов $C_i$ допуск (4) на $C_1$ получился в данном примере односторонним.

Теперь можно вернуться к вопросу получения данных таблицы 4 без использования строки целевой функции, учитывая при ее восстановлении только факт принадлежности выбранной вершины как лучшего решения.

**Формирование матрицы данных для выбранной оптимальной вершины без использования строки целевой функции**

Чтобы решить эту частную задачу, обратимся к исходной таблице 1, для которой начало координат $X_1 = X_2 = 0$ является первой опорной вершиной, с чего начинается план обхода многогранника. В этой ситуации, во-первых, нулевыми являются исходные переменные $X_1$ и $X_2$, и своими обозначениями они уже отличаются от ненулевых переменных $S_j$. В назначенной ЛПР оптимальной вершине нулевыми переменными могут быть как координаты $X_i$, так и переменные $S_j$. Поэтому стоит их, как было сказано выше, выделить для наглядности в первой строке и в левом столбце начальной таблицы 1 особыми координатами $y_l$, которые для вершины D соответствуют искусственным переменным $S_1$ и $S_3$, т.е. пусть $S_1 = y_1$, $S_3 = y_2$.

Во-вторых, при переходе из вершины A в соседнюю вершину осуществляется замена одной из имеющихся ненулевых переменных (например, $S_2$ из общего из множества, указанного в левом столбце табл.1). Эта замена осуществляется известным в прямом симплекс-методе способом назначения ведущего столбца( с помощью строки целевой функции), ведущей строки и пересчета всех строк таблицы в новую матрицу. В нашем случае отсутствия целевой функции в качестве назначаемого столбца можно взять первым любой, соответствующий одной из координат $X_i$, а в качестве ведущей строки из принадлежащих к переменным $y_j$ строку, у которой неотрицательное отношение $\frac{b_j}{a_{ij}}$ минимально.

В-третьих, оптимальная вершина преимущественно не является ближайшей к началу координат, и поэтому при n=2 отличается не одной, а двумя ненулевыми переменными- вместо $X_1$ и $X_2$ или должны стать переменные $y_1$ и $y_2$.

В связи с этим предлагается перенести начало преобразований из вершины А сразу в оптимальную вершину D путем двойного пересчета таблицы 1.Иными словами, предлагается новый "опорный план" с началом в вершине D. С этой целью исходную таблицу 1 преобразуем в матрицу **I** этого опорного плана, которая не содержит строки целевой функции, а искусственные переменные $S_1$ и $S_3$ в левом столбце и правой строке заменены на нулевые переменные $y_1$ и $y_2$ , играющие роль системы отсчета координат вместо $X_1$ и $X_2$.

Табл.4. матрица **I** исходных данных с указанием нулевых переменных в назначенной оптимальной вершине

| | $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $S_2$ | $Y_2$ | $S_4$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| $S_2$ | -1 | +1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $Y_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $S_4$ | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 24 |

Нужно сразу заметить, что в самом начале решения нам известны лишь координаты $X_1(0)=4$ и $X_2(0)=2$ вершины D без указания того, какие неравенства для этой вершины превращаются в равенства, или какие переменные становятся нулевыми. Но это нетрудно сделать предварительно, подставив значения $X_i(0)$ в имеющиеся ограничения (2). В частности, в данном примере из условий (2) получим при $X_1=4$: $X_2=2$

1. $S_1=8-X_1-2X_2=0$

2. $S_2=1+X_1-X_2=3$

3. $S_3=2-X_2=0$

4. $S_4=24-4X_1-3X_2=2$

Видно, что нулевыми переменными в вершине D стали $S_1$ и $S_3$, которые переобозначены через $y_1$ и $y_2$. В общем случае в имеющиеся линейные неравенства.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j;\ j=1...k \qquad (4)$$

вводятся искусственные переменные $S_j$, чтобы получить равенства, решение которых при заданных координатах $X_i(0)$ оптимальной вершины дает ответ, какие из этих переменных нулевые. Число этих переменных $S_l=0(l=1....n)$ равно n, и их нужно обозначить через $y_l$, если для них выполняются условия

$$S_l=y_l=b_l-\sum_{i=1}^{n} a_{il}x_i(0)=0; l=1,.....n \qquad (5)$$

Проведем теперь необходимые расчеты. Возьмем в качестве любой из координат $X_i$ переменную $X_1$, что определяет ведущим столбец 2. В этом столбце среди строк 2 и 4, принадлежащих переменным $y_1$ и $y_2$, ведущей является строка 2, не требующая дополнительной нормализации. Поэтому вычтем ее из остальных строк и получим новую промежуточную таблицу 9.

Табл.5. Таблица данных после замены переменной $y_1$ на $X_1$

| | $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $S_2$ | $Y_2$ | $S_4$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| $S_2$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 9 |
| $Y_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $S_4$ | 0 | -5 | -4 | 0 | 0 | 1 | -8 |

После обращения к столбцу с $X_1$ переходим к другой нулевой переменной $X_2$ - ведущим стал столбец 3, а в нем принадлежащая к $y_2$ строка 4 –единственная, имеющая неотрицательный элемент 1, поэтому она становится ведущей. Это позволяет без нормализации пересчитать остальные строки. Нетрудно убедиться, что после расчетов из таблицы 9 формируется матрица **II**, представленная выше таблицей 5.

Можно также пояснить геометрический смысл сделанных преобразований с помощью рис.1 – переход от данных таблицы 8 к таблице 9 означает вначале движение от точки A в точку L (на линию 1 ), а затем - точку D.

Рассмотренный способ пересчета при переходе из начала координат $X_i$ в новую опорную вершину можно теперь обобщить на случай произвольного числа n переменных $X_i$ в виде следующих правил перехода в заданную оптимальную вершину:

- в качестве ведущего столбца поочередно используются столбцы с искомыми ненулевыми переменными $X_i$.

- в назначенном столбце анализируются только те элементы, которые принадлежат строкам с нулевыми переменными $y_j$ ( j= 1,…,n) в назначенной вершине.

- из всех строк ведущей является строка, имеющая главным неотрицательный элемент, а отношение $b_j / a_j$ коэффициентов правом столбце к этому элементу минимально;

- после выбора ведущей строки стоящая в левом столбце переменная $y_l$ заменяется на переменную $X_i$ из ведущего столбца;

- ведущая строка нормализуется, чтобы ее главный элемент стал равным 1;

- остальные строки матрицы пересчитываются известным в прямом симплекс-методе способом;

- во вновь найденной матрице находится новый ведущий столбец (i=2 …….n) до тех пор, пока не будут учтены все переменные $X_i$, и процедура выявления новой ведущей строки и пересчета остальных срок повторяется.

- число повторяющихся циклов пересчета равно числу искомых ненулевых переменных, в результате чего будет сформирована матрица **II.** При веденных вычислительных операций достаточно, чтобы целиком описать процесс решения обратной задачи в нужной последовательности.

## Общая процедура обратного симплекс-метода решения задачи линейного программирования

Блок-схема состоит из четырех основных блоков. Первый блок определяет необходимые действия при условии, что неравенствам (4), определяющим содержание строк таблицы 1, соответствует выпуклый многогранник, находящийся внутри n – мерного параллелепипеда, размеры которого будут уточнены ниже. Назначаемая ЛПР заданная вершина с известными координатами $X_i(0)$ принадлежит этому многограннику, для которой значение неизвестной целевой функции Z максимально. Относительно коэффициентов $C_i$ линейной свертки критерия известно лишь то, что все они положительны. Тогда при заданных неравенствах (4) и координатах $X_i(0)$ определяются нулевые переменные $y_l; l=1...n$, и с их помощью формируется исходная матрица I, поставив их в соответствующие элементы левого столбца и первой строки. Второй блок осуществляет перенос условий задачи из начала координат в заданную оптимальную вершину с помощью последовательного перебора переменных $X_i$. В отличие от прямого симплекс-метода при переходе в ближайшую соседнюю вершину, совокупность операций по выбору ведущих столбца и строки выполняется нужное число раз, вместо одного цикла в прямом методе. При этом в каждом i - том цикле вычисления проводятся над

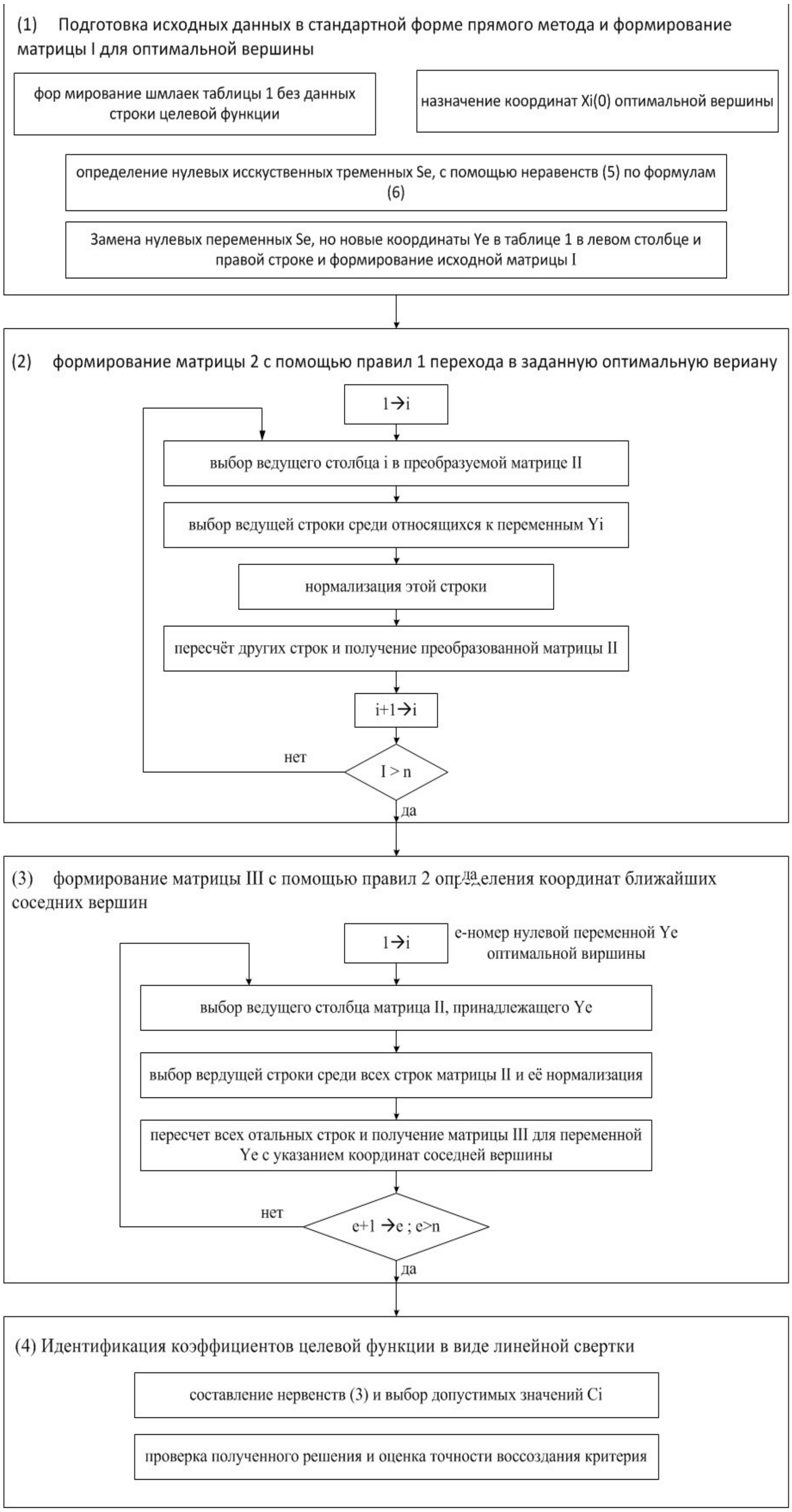


Рис.7. Блок-схема вычислительных операции обратного симплекс-метода при не известной целевой функции

преобразованной матрицей **II**, полученной на предыдущем шаге. Сами циклы образуются путем последовательного использования столбцов, принадлежащих указанным в верхней первой строке переменным $X_i$. При этом необходимо сделать следующее замечание – в ряде редких случаев часть координат $X_i\,(i=1...k)$ оптимальной вершины может быть назначена нулевыми самим ЛПР. Например, если в примере.1 выбрана вершина F, то $X_1=0$, а для вершины R значение $X_2=0$. Поэтому эти переменные в циклах вычисления матрицы **II** не участвуют, в связи с чем на рис.2 в блоке 2 специально отмечено, что i– это номер нулевой переменной, участвующей в расчетах, число циклов равно (n-k), а к - число нулевых переменных в оптимальной вершине. Более подробно этот случай будет рассмотрен ниже в примере 4.

В третьем блоке задающими последовательный перебор являются нулевые переменные $y_l$ в первом столбце. При этом на каждом шаге преобразованиям подвергается одна и та же исходная матрица **II**. Зато результатом каждого шага является получение “своей” $l$ – той матрицы **III**, в которой в правом столбце указаны координаты $X_i(l)$ $l$ – той соседней вершины. Поэтому в конце третьего блока выбислений получается n – матриц **III**.

Четвертый блок является завершающим. После составления неравенств(3), дающих интервальную оценку искомых коэффициентов $C_i$, можно назначить их точечные значения внутри интервалов и затем для проверки найти решение прямой задачи с восстановленной целевой функцией. Если полученный результат альтернативного выбора совпадает с заданным ЛПР ответом, то идентификацию можно признать успешной, а найденная форма критерия может быть использована для других целей. Например, можно сравнить полученное значение Z с некоторым идеальным случаем попадания координат $X_i$ в вершину n-мерного параллелепипеда, “противостоящую” началу координат, и в результате сравнения оценить эффективность оптимизации при назначенных ограничениях (4). Можно использовать также полученную целевую функцию при других неравенствах (5) в новых условиях, которые могут меняться, что часто бывает в инженерной практике. Тогда в динамической обстановке удастся решать новую прямую задачу линейного программирования с известным критерием, что упростит необходимые действия.

## Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы-

1. Предложен обратный симплекс-метод идентификации неизвестной целевой функции критерия в виде линейной свертки, если задан результат решения при известных ограничениях на переменные в виде линейных неравенств.

2. Предложенный подход к решению обратной задачи линейно го программирования принципиально отличается от двойственной задачи [2], в которой весовые коэффициенты критерия в виде линейной свертки считаются известными.

3. Воссоздание целевой функции с помощью полученных интервальных оценок позволяет использовать ее при решении прямой задачи в новых условиях - либо в автоматическом режиме, либо в роли подсказчика, снижая тем самым влияние человеческого фактора.

4. Точность решения обратной задачи зависит от того, какие вершины многогранника и сколько становится известными их в результате рациональных альтернативных действий ЛПР, что может быть использовано для идентификации. Рассмотрение этого вопроса требует дальнейших исследований.

## Библиографический список


1. Гасс С. Линейное программирование. – М: ФИЗМАТГИЗ, 1961. - 304 с.
2. Лебедев Г.Н., Тин Пхон Чжо. Оценка безопасности и экономичности полета самолетов при заходе на посадку с помощью обратной задачи линейного программирования // Мехатроника, автоматизация, управление. №11. 2008. С. 41 – 46.
3. Лебедев Г.Н. и др. Теория оптимальных систем. – М.: Изд-во МАИ, - 1999. - 137 с.